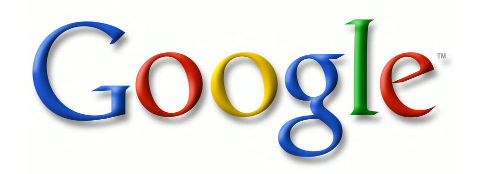
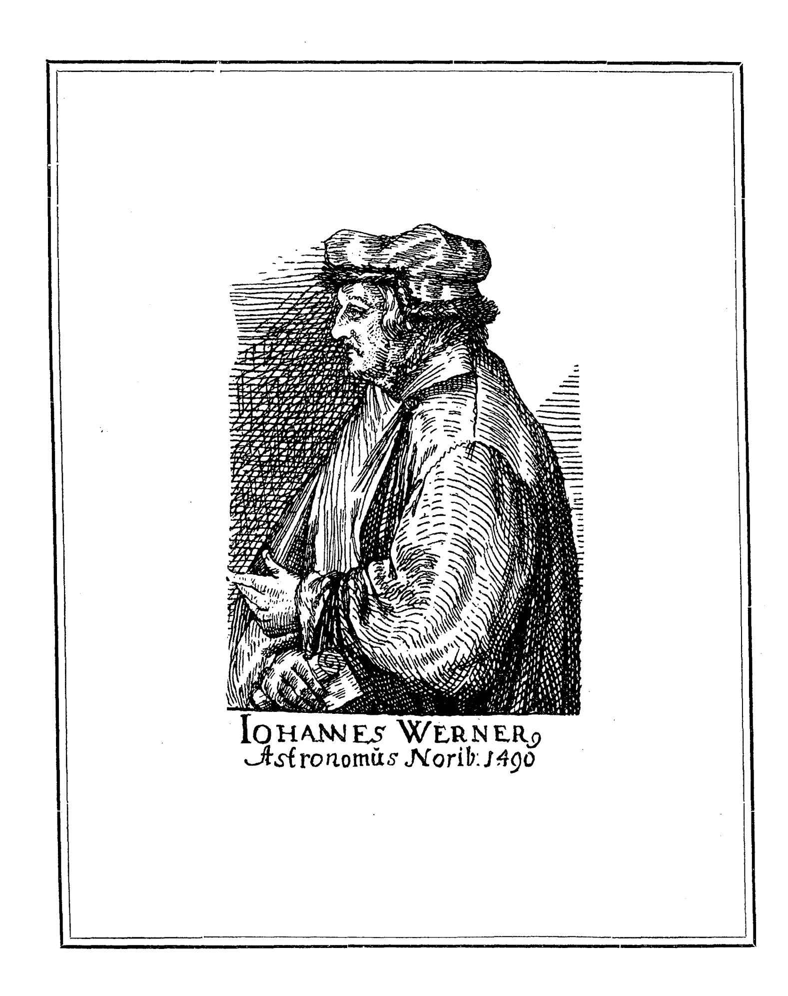




IOHANNES WERNERUS
Astronomus Norib: 1490

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XXIV. HEFT

IOANNIS VERNERI

DE TRIANGULIS SPHAERICIS

LIBRI QUATUOR

DE METEOROSCOPIIS

LIBRI SEX

CUM PROOEMIO

GEORGII IOACHIMI RHETICI

I

DE TRIANGULIS SPHAERICIS

HERAUSGEGEBEN VON

AXEL ANTHON BJÖRNBO

MIT 211 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907



ANTON v. BRAUNMÜHL

DEM GESCHICHTSCHREIBER DER TRIGONOMETRIE

GEWIDMET

IOANNIS VERNERI MATHEMATICI NORIMBERGENSIS,

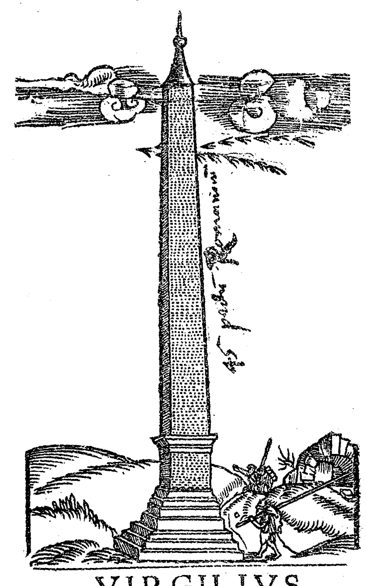
DE TRIANGVLIS SPHOERICIS LIBRI QVATVOR.

DE METEOROSCOPIIS LIBRI SEX.

Nunc primum Studio & Diligentia *GEORGII IOACHIMI RHETICI* in lucem editi.

OBELISCI INSCRIPTIO.
PLIN: LIB: XXXVI. CAP: IX.

RERVM NATVRAE INTERPRETATIONEM, AEGYPTIORVM OPERA PHILOSOPHIAE CONTINENT.



VIRGILIVS.
FELIX QVI POTVIT RERVM COGNOSCERE CAVSAS.

CRACOVIAE,
LAZARVS ANDREAE EXCVDEBAT.
ANNO M. D. L VII.

SCIRE DEBENT OMNES, NOSTRAS Editiones scriptorum Mathematicorum, & Imperatoriæ Mai. & Sereniss. Regis Poloniæ Priuilegijs munitas esse, quibus tam expressiones quam imitationes & uendicationes nostrorum operum, quæ ab alijs fiant, probibentur grauissimis multis contrafacientibus propositis. Quare, ab alienis omnes manus & operas suas abstinebunt, ne lucrum quærentes damnum inueniant.

PROOEMIVM AD SERENISSIMAM MAIESTATEM FERDINANDI REGIS ROMANORVM VNGARIÆ ET BOHEMIÆ, PP. ET OPTIMARVM DISCIPLINARVM ATQVE ARTIVM PROTECTORIS, ETCET.

GEORGII IOACHIMI RHETICI IN LIBROS IOANNIS VERNERI MATHEMATICI NORIMBERGENSIS, STVDIO ET DILIGENTIÆ SVÆ IN LVCEM EDITOS.

IVLIVS CAESAR in summis maximarum rerum negotijs, in Republica collapsa instituenda, in profligandis hostibus, cum totius imperij pondus sustineret, inter arma & tubarũ strepitus, historias, quas Thucidides Principũ thesauros appellat, & euoluit & conscripsit, eo quidem successu, vt nõ præbuisse alijs rationem & facultatẽ à se res gestas conscribendi videatur, sed omnem alijs ea de re scribendi copiam præripuisse. Alterum, quod maximè Heroicum esse duxit, cum Alexandrum magnum factis superare niteretur, et flesset ad eius statuam, antequam quicq̃ magni, dignum suo spiritu aut genio, eo ætatis adhuc gessisset, est, quod Alexandrum etiam doctrina superare voluit. Hunc ab Aristotele in Physicis eruditum sciebat, sibi autem ipsum cœlum suspiciendum duxit.

Didicerat in Repub: sicut mũdus non nisi vnum Solem ferre posset, ita verissimum esse illud Homeri, οὐκ ἀγαθὸν πολυκοιρανίη, εἷς κοίρανος ἔστω.

In cœlo Solem esse Monarcham, se in terra. Quare & Solis in cœlo imperium cognoscere cupiebat. Anni metas perspicere, & Reipub: suæ, certam anni & temporum rationem instituere, ipso Sole, per ortus ac occasus siderum, monstratore ac duce. Hanc ad rem perficiendam, adhibuit summum suæ ætatis Mathematicum Sosigenem, quem de conuersionibus libros Proclus Diadochus scripsisse tradit.

Quanta mutatio Imperij, ab illa forma quam Iulius animo suo

a ij conceperat,

conceperat, aut etiam posteritati reliquerat, facta sit, videmus, & Turcica tyrannis nobis ostendit. At eam rationem anni & temporum, quam vtiliter & propter historiarum seriem, & multiplices vsus in vita, ad Solis motum instituit, totus adhuc mūdus obseruat. Quamuis Cicero & alij sua ætate hoc studium riderent, ac sidera ex Cæsaris edicto oriri clamarent. Sic enim non nisi Heroica & diuina ingenia, sicut Atlas, Orion, Hercules, & Achilleæ naturæ, ad tam sublimia feruntur studia, cum alij contemptis cœlestibus, perpetuis illis & illustrissimis ignibus, quibus & sacrę literæ conferunt beatos & dignos æterna vita, circa terrestria illa venusta, iucunda, vtilia versantur, illisq; toti inhærent. TAmen, quæ maximus Iulius admirabatur, eruditissimus & optimus tunc quisq; sibi inprimis curæ esse sinebat. Quanta vero confusio temporum, ante hanc Iuliani anni institutiōem fuerit, qui perpetuam siderum politiam exquirimus, et qui Historias condunt experimur. De qua confusione alias à nobis dicitur. Hoc indolendum, quod, cum maxima solertia, & summis laboribus Sosigenes præter Iuliani anni institutionem, rationes ortus & occasus siderum præfixerit, quæ temporum successu & motu siderum in Eudoxi, vsitatis fastis, à vero aberrabant, hodie ea omnia vsq; adeo neglecta iaceant, cum tamen maximos vsus habeant. Inde enim tempestatum ratio precipue constat. Inde sunt singularum gētium corporum & animorum diuersi, & proprij sui habitus. Hinc imperiorum mutationes dependent, Quę olim culta erant ingenijs, terræ fertilitate, imperio, Nunc sterilia incultaq; iacent, & barbari inhabitant, Tyrannide oppressa. Horum siderum motus, ortui, et occasui, respondet transitus imperiorum, ab ortu ad occasum, & inde in septentrionem. Hinc ferissimæ nationes mitescunt, sterilis terra culturam suscipit, demittuntur cœlitus alij, terræ, ingeniorum, corporum habitus. Et semper cccl. fere annis aliquam insignem in sublunari mundo mutationem pro insigni stellati orbis aliqua motus varietate fieri videmus. Scimus sacras literas tales mutationes tribuere peccatis. Fatemur terræ ideo maledici. Sed cum per verbum Dei, & inuocationem nominis diuini, nemo resistit cœli inclinationibus, ordinaria mala non modo non auertimus, sed & plura insuper accumulamus, & calamitates calamitatibus addimus, ac prouocantes iram Dei, quasi vi elicimus diuinam maledictionem.

NB.

Verum enimuero Quod auris audit, Quod oculus videt, Deus facit vtrunq;,

facit vtrunq; inquit Sapientissimus rex Salomon. Vt videremus Solem, Lunam, Planetas, Sidera, & obseruaremus eorũ statos cursus, Dei munere factum, qui mentes exuscitat ad hæc consideranda & intuenda, atq; ideo potissimum,

Os homini sublime dedit, cœlumq; videre
Iußit, & erectos ad sidera tollere vultus.

Sicut & Plato, antiquissima Aegyptiorum doctrina imbutus, recte iudicat, Nec nos hac in parte Galeni cauillatio moueat. Item quod statuimus, dum Geometras & Arithmeticos seu Logistas audimus, hæc ideo tradi, vt cœlum his ducibus exploremus, DEus facit. Cœlum per Astronomiam loquitur nobiscum, Terra per Geographiam, Naturæ, quæ in his continentur per Phylosophiã, Physicen dictam, & eius exędificatricem Medicinam. QVOMODO DEVS SEMPER GEOMETRAM AGAT. Certa stent omnia lege: Præterita, præsentia, futura. Quomodo quisq; sit mundus in imagine parua. Cœlũ & terra ab initio Historicos potius libros, quis dixerit, mutationum imperiorum, si quis recte hæc, hoc est, non cœcutientibus oculis inspexerit, non surdis auribus præterierit: Quæ omnia postea scriptæ historiæ testantur, tantum ita acta sicut cœlum præmonstrauerat & ordinauerat. Cœlum & quę suo circumplexu tegit, veri sunt Physici libri, qui naturæ secreta nobis ob oculos ponunt. Imo visibiles manus, & organa quæ à nobis contrectari queant, quibus Deus naturam foueat, gubernet, sustentet, quo nobis bene faciat. Hæc oculi nostri non vident, nisi à Deo illustrentur, nisi eruantur per Geometriam & Arithmeticam, quas Plato primas artes vocat, ex barbarico cœno. Hos doctores nemo audit, nisi surdas aures, ad cœlestia percipienda Deus per Geometriam & Arithmeticam aperiat. Deus, in cuius manu sunt Regum & Principum animi, oculos Iulio Cæsari ad cœlum sustulit, vt cognosceret literas, quibus visibiliter naturæ conditor nobiscum loqueretur. Deus aperuit Iulio Cæsari aures, vt Sosigenem audiret loquentem vera non vana, certa non commentitia, vtilia vitæ & saluti humanæ, non superstitiosa & noxia, de ordine cœli, Luminum, Planetarum, Siderum, Hyemis & Aestatis, Lucis & Tenebrarum. Et qui horum necessarij & ordinati in natura essent effectus. Quomodo visibiliter hæc omnia nobis sint proposita, in signa, & non in contemptum, vt obseruaretur à nobis, ex his visibilibus, inuisibilis Dei virtus, sapientia, iustitia, constans, certa, firma, stata eius nobis benefaciendi voluntas.

Victoriæ Iulij Cæsaris maxima Dei fuere beneficia, qui eũ suo protexit Clypeo, Quod miserabili cecidit fato, eo est factum, vt videret posteritas, antea Diuinitus seruatum, non propria virtute, non casu, non fortuna. Ita & Cyro astitit semper Deus, Illi præterea dedit, vt anni certam rationem institueret, & collapsam motuum ac ortuum doctrinam, instauraret. Sub hoc Persarum Monarchia incœpit, & motuum doctrina primum pululare cœpit. Nam Babilonicæ obseruationes, quibus Hipparchus & Ptolemæus vsi sunt, in illa apparet incidisse tempora. Diuo Augusto gratificans Manilius Mathematicus, Obelisco auream pilam imposuit. Antonini Pij temporibus, floruit Ptolemæus. Inter hunc et Proauum Serenissimæ Maiestatis tuæ Diuum Fridericum, vix vnus & alter leuiter floruere, hoc est annis mille trecentis, videlicet Albategnius Aracensis, & Azophi, sub Proauo noua lux oriri cœpit Mathematicis disciplinis, eo tempore Georgius Burbachius, & Ioannes de Monte regio, Mathemata ex Saracenica barbarie primum euoluere conati sunt. Horum Georgius in aliquo loco fuit, apud Illustrissimum Sigismundum Austriæ. Regiomontanus apud summos pontifices. Deinde clarissima ingenia, Ioannes Stabius, & Andreas Stiborius, quæ Auus Serenissimæ Regiæ Maiestatis tuæ, Diuus Maximilianus fouit, aluit, prouexit, cum impense his delectaretur studijs, eaq; tanquam artifex intelligeret.

Cũ vero Principes Reip: grauissimis curis & mole negotiorũ occupati, nihil temporis habeant, quo in Geometrico puluere se exerceant, excogitauere summi illi viri Stabius & Stiborius in gratiam Serenissimi Aui Maiestatis tuæ, varia instrumenta, & Astronomicas Machinas, quibus & iter agens, & bella gerens, & Historias suas conscribens, tamẽ cœli meatus, ortus & occasus siderum, non modo obseruaret, Sed & causas horum omnium, sine defatigatione, & cito & recte primo quasi intuitu, perciperet.

Porro quia Stabius, tum Mathematici, tum Historiographi munere, apud Serenissimam ipsius Maiestatem fungebatur, neq; ad sublimia hæc pro dignitate tractanda satis otij illi esset, ac videret Ioannem Vernerum Norimbergensem doctrinæ Mathematum qua excellebat, adiunxisse earum vsum, instabat Vernero, vt eandem viam insisteret, quo cum Serenissimę Maiestati Cæsareę, tum multis Principibus viris gratificaretur, qui Mathematicis disciplinis Cæsarea

nis Cæsarea autoritate permoti, delectabantur. Conscripsit igitur Vernerus sex libros de Meteoroscopijs, quibus omnia præcepta doctrinæ primę conuersionis & Geographię, ea facilitate cõplexus est, vt sine Logistices fastidio, aut Geometrico puluere, vnusquisq; Solis obliquationes singulis diebus capiat. Sublimitatẽ poli mundi diuersis modis inueniat, Vera siderum in cœli globo loca statuat, ortus & occasus, occultationes & apparitiones omnium siderum, leui negotio præuideat. Omnis generis Sciotherica seu Horologia ad quamuis planiciem, etiam fortuito oblatam depingat. Quorum alię pro diuerso situ exactius, horas ad meridiẽ ostendunt, Aliæ ad ortum & occasum. Diei partes ex Solis aut siderum simplici intuitu varijs rationibus discernat. Viæ Solis seu Zodiaci transitus per horizontas, meridianos, & circulos per Horizontis vertices ductos, Item ipsius cum his sectiones, vnde defectus Solis varios Lunęq; labores deprehendimus. In Geographicis, ex tribus maximorum circulorum arcubus, & tribus inclinationis angulis, locorum in globo terræ positus ratiocinamur. Duorum videlicet locorũ sublimate poli, & eorum itineraria distantia. Meridiani vnius ad alterum inclinatione, item amborum meridianorum inclinationibus ad eundem maximum, qui per vtriusq; loci verticem ducitur. Quandocunq; vero tria, ex his sex, quacũq; permutatione facta, data & nota fuerint, hæc Meteoroscopia, primo quasi accessu non modo reliqua tria aperiunt, sed ostendunt etiam, quomodo de siderum ortu & occasu, & quãdo culminant, locorum longitudines & latitudines explicandæ sint.

In ea vero doctrina, quę est de effectibus Politię cœli, Solis, Lunę, Planetarum, fixarum, & horum inter se, in mundo, & ad nos habitudine, ea pars quę inambulatiões Liberatoris seu Aphetę exquirit, est omnium difficillima.

Quare Albohazen, proprios libros aperiendi nodos, hãc ob causam conscripserat, Hi nodi, in his libris, sine negotio aperiuntur, sed & totius cœli facies, de his Meteoroscopijs, ad quoduis temporis momentum depinxerimus expedite, vnde cœli à Deo ordinatos effectus ratiocinemur.

Hos de Meteoroscopijs libros, & de triãgulis sphæricis, Georgius Hartman Mathematicus Noricus, Doctrina & virtute pręstãs, post Verneri mortem, tanquam ex naufragio dispersas tabellas, hinc inde collegit, & ea, quæ quasi folijs Sybillæ descripta atq; di-

 spersa essent

ſperſa eſſent concinnauit , mihiq́ꝫ ante quindecim annos dedit.
Cur tam diu apud me latuerint,multæ ſunt cauſæ. Primum & ſe-
cundum Meteoroſcopium,quidam pro ſuis ediderāt, nam vt po-
ſtea à Georgio audiui,illi apud ſe conſpecti operis rationē & for-
mam expreſſerant, Sat ſciebam Bellorophontis fabulam luſuros,
vt ſe quidem facti autores prędicarent: ſed apud nos eſſe,qui mō-
ſtro ſuperato linguam haberet, qua facti autorem demonſtraret.
Dum dubitamus noſter ne, an illi Meteoroſcopiorum ſint auto-
res , nihil præterea ea de re prodire videmus . Verneri igitur
Meteoroſcopia, amplius præmenda non duximus, maxime cum
alia inſuper duo Meteoroſcopia tradiderit,prioribus longe præ-
ſtantiora. Quum præterea muta illa ſint, & abſq́ꝫ lingua , noſtra
vero facunda,& quæ ſua eruditione omnē poſteritatem aluerint.
Virgilius ſua Aeneida flāmis potius abſumi voluit,quā edi vl-
tima manu non impoſita,Neq́ꝫ noſter,ſua vt res exigebat,perpoli-
re & perficere potuit, morte præuentus. Ego in alieno opere in-
genium noſtrum oſtentare nolui , & ita qualia ſunt imperpolita
aut etiam imperfecta an ederem , dubitaui. Vicit tandem omnes
deliberationes, Diui Auguſti conſilium. Aeneis,licet non ſit,qua
optaſſet Virgilius arte & diligentia, exculta,tamen Diuus Augu
ſtus, his diuini Virgilij laboribus totam poſteritatem defraudari
noluit. Videmus & ſimili conſilio,pleraq́ꝫ excellentiſsimi Medi-
ci Montani ſcripta, dicta & facta, in lucem prodire. Non igitur
dubitemus & nos , Germani noſtri Mathematicum opus, non o-
mnibus modis excultum,neq́ꝫ abſolutum edere,quod tamen præ-
ſtantius erit,multorū aliorum perpolitis,& magno apparatu ſcri-
ptis voluminibus.Diuus Auguſtus poſteritati imperfectum Vir-
gilij opus commendauit,& ſua autoritate contra Zoilorum ma-
lignitatem,tutatus eſt. Ita Sereniſsimam tuam Maieſtatem hos li-
bros in gratiam Sereniſsimi Aui Regiæ tuæ Maieſtatis conſcri-
ptos,clementiſsime ſuſcepturam, & ſe in eis oblectaturam, ſpero.
Si quidem ſummatim Aſtronomica & Geographica pręcepta cō-
tinent,eaq́ꝫ præcipua, quæ Sphærica doctrina conſtant. Scio Se-
reniſsimam Maieſtatem tuam, his diſciplinis virtute Cæſarea de-
lectari. Ideoq́ꝫ illi placere, vt hi libri ad poſteritatem propagētur.
His ſex de Meteoroſcopijs libris,præmiſimus quatuor de Sphæri-
cis triangulis. Quinti materiā congeſſerat,Sed ea in manus Hart-
manni non Venere. Annotauerat, quam doctrinæ partem in eo
tractaſſet , ſed nos inchoatam optimi Appellis Venerem diuerſa
manu non

manu non perficiendam statuimus. Porro eam Vernerus in his condendis libris viam est ingressus, vt doctrinæ triangulorum Sphæricorum à se traditæ, nihil à quouis artifice addi, quod non redundaret, posset, nihil demi, sine noxa totius operis, cum nihil redundet. Voluit omnibus numeris esse perfectum, elementis exceptis, quæ à Theodosio & Menelao traduntur. Hoc suum consilium prudentissime in his quę effecta sunt pertendit, ita vt facile erudita facilitate, omnium ante se in hoc genere scripta superet. Nostrum vero consilium fuit, vt eruditi quibus tantum est otij, quo Geometricum versent puluerem, habeant principio totius de sphæricis Matheseos Thesaurum, in libris triangulorum. In subsequentibus vero de Meteoroscopijs libris, videant tanti Thesauri vsum, se in ijs exerceant, & inde quicquid sphæricę consideratione dignum habeat cœlum, mare, terra, naturę in his contentę, depromant. Hæc, si explicare vellē, tota Astronomia, Geographia, doctrina de siderum effectibus in medium producenda forent, Verum Serenissima Maiestas Tua Regia virtute Cæsarea, longe rectius et sublimius hæc animo intuetur suo, & perspicit, quam vlla à nobis oratione depingi possit.

Serenissima Maiestas tua Regia, in imperio nunc maximū vt audimus conscribit exercitum, ad repellendas Turcicas incursiōes. Precamur Christum Dei filium, vt Serenissimæ Maiestati Tuæ Regię, de cœlo det victoriam, is sedit ad dexteram Dei patris, & confringet hostes Christiani nominis exoratus, tanquam vas figuli vt non remaneat testula, in qua parum ignis feratur.

Diximus astra naturę ordine, hęc inferiora gubernare, Sed cœli conditor, qui astra nomine vocat, eis modum & terminum præscribit, vbi vult, cursum sistit, effectus vt vult, moderatur, Sicut Iosuę Solem in cœlo sistebat, & Sedechię solem retrahebat. Quantum vero ad astra attinet, non dubito, quin Turcico imperio immineat ruina maxima, repentina, improuisa, appropinquāte influxu ignei Trigoni, et languescente Aquei Trigoni viribus. Accedit et orbis fixarum anomalia, ad tertium eius terminum. Quoties vero talem aliquem attingit terminum, semper contigisse in mundo, et in imperijs maximas mutationes, constat ex Historijs. Ac sub idem tempus, naturę conditorem Deum sua exercuisse iudicia. Deposuisse potentes de sede, & exaltasse humiles, quod & Xerxi euenit, dum Græciam innumerabili inuaderet exercitu.

Primus

Primus Nicolaus Copernicus, nostrę ætatis nunquam satis laudatus Hipparchus, hanc orbis fixarum anomalię rationem deprehendit, quemadmodum aliàs copiose ostendimus. Cum vero in Prussia, plus minus triennio egissem, discedenti mihi optimus senex iniunxit, vt eniterer ea perficere, quę ipse, senio & suo quodam impeditus fato, minus potuisset absoluere. De ijs quę in Luminum et Planetarum conuersiõibus adhuc desiderantur, alio in loco erit dicendi occasio.

In positu vero Siderum orbis stellarum, pleraq; esse constat in Ptolemaica descriptione, à veritate aliena. Primo propter librariorum inscitiam, cum sæpius describendo tales indices, facile in numeris admittatur error. Deinde, quia obseruatiões vix ad Decades partium sint acceptæ, idq; per armillas, quibus in promptu est, & ad gradus semissim errare. Quantum momenti habitura esset iusta orbis stellati descriptio, in doctrina de effectibus siderũ, partim supra diximus. Hoc affirmare ausim, totam eam Physices partem, quę est de siderum effectibus, ideo minus suam tueri inter reliquas disciplinas autoritatem, quod qui ea tractant, plerunq; soli sunt Planetarij, et partiarij, neglecta ea consideratione quę est in hac arte præcipua. Hanc ob causam crediderim, maximum artis vsum intercidisse. Georgius Tanstetter, et Andreas Perlachius, summi viri, eadem hæc perspexere, & proculdubio, si iustos siderum positus habuissent, res in arte maximas præstitissent. Cum igitur tanti momenti hæc sit exquisitio, & hanc prouinciam dominus Copernicus nobis iniunxerit, quem non solum tanquam præceptorem, sed vt patrem colui, obseruaui, ac ei semper gratificari studui. Postquam Geometria & Arithmetica satis me præparaueram, elegi Cracouiam obseruationis locum, cum Copernicus depræhendisset Frauenburgum, suę obseruationis locum, cum Cracouia æqualiter distare ab occasu, sub eodẽ meridiano. Hic, auxilio & liberalitate Magnifici Dñi, DOMINI IOANNIS BONERI, erexi Obeliscũ, quadraginta quinq; pedum Romanorum. Nã meo iudicio, nullum aliud instrumentum præstãtius Obelisco fuerit.

Omniũ primus in Aegypto Obeliscos instituit Rex Mitres, vt Plinius refert, somnio iussus. Deum autem velle, vt suam Geometriam in natura consideremus, etiam Galenus testatur. Cum enim non auderet demonstrationes Geometricas, in Anatomicis libris adducere, ne suę ætatis medicos ab eorum lectione deterreret. Iussus in somnis à Deo, demonstrationem Geometricam fabricę ocu

bricę oculi,posuit. Obeliscus autem Solis numini sacratos,nomi-
ne illorum Aegyptio significari,testatur Plinius. Sicut enim Sol,
rex & Monarcha est Politię cœli,ad cuius numeros & motus re-
liqua mouentur sidera. Est & totius mundi oculus, cuius luce il-
lustrantur omnia. Ita solo Obelisco, omnes leges Politię cœlestis
exacte depræhendi, & scribi possunt. Solus Obeliscus oculos ar-
tificum aperire, & lucem capiendarum obseruationum conscri-
bendæ historiæ motuum,perscrutādi aptas demonstrationes mo-
tuum,præbere potest, vt per eum omni momento capiantur vti-
les motuum obseruationes. Scribit Stiborius,& tanquam artifex
posteritatem monet, nouis subinde obseruationibus fulciendam
motuum doctrinam,non conditis tabulis perpetuo inhærendum,
sed cœlo se conformandum. Non igitur Obeliscus humanum est
inuentum,sed Deo autore institutus,non vt satisfaceret curiosita-
ti humanę, sed vt Dei in cœlo & terra Geometriam doceret, Ar-
millæ,regulę,Astrolabia,Quadrantes,sunt humana inuenta. Ideo
& laboriosa & maxime erroribus oportuna. Obeliscus Dei mo-
nitu ædificatus, facile omnia hæc præstat, & exacte. Porro duos
Obeliscos inscriptos ait Plinius.

RERVM NATVRÆ INTERPRETATIONEM.
ÆGYPTIORVM OPERA PHILOSOPHIÆ CONTINENT.

Quid hac inscriptione aliud sibi volueré, quam has Machinas
nõ frustra institutas, sed in vsus maximos.Esse opera Philosophię
Aegyptiorꝝ, non Philosophię Græcorum aut Latinorꝝ,sed Aegy-
ptiorũ,qui parentes Geometrię,Arithmeticę,et Astronomię,à pa-
tribus vsq; & Abrahamo,si Iosepho credimus,fuere,à quibus Plato
in Gręciam,Pythagoras in Italiam Mathemata traduxere. Ac tra-
dit Plinius,sub idem tempus in Aegypto Pythagoram fuisse,dum
ille centum viginti quinq; pedum & Dodrantis Obeliscus statu-
eretur,quem postea Romę Diuus Augustus in circo statuit.Obe-
liscos igitur vocant Aegyptij,interpretes rerum naturæ,aut quod
maius est ipsius rerum naturę interpretationem. Quis autem aspi-
ciens lapideam hanc molem, cogitauerit, hæc moles est interpre-
tatio rerum naturę, aut rerum naturę interpres? Nemo credide-
rim hominum, nisi de illorum numero fuerit, quorum vestigia,
dum in littore naufragus & expes videret Aristippus, iussit cala-
mitatis socios,bono animo esse, se enim hominum vestigia cerne-
re, cum videret Geometricas figuras in littoris arena passim exa-
ratas. Ex-

ratas. Explicatius igitur dixerimus, Obeliscum esse opus Philosophię, demonstrans ordinē, modum, et rationē capiendi positus Solis, Lunę, Errātium, ac reliquorum siderum, vnde stati siderū motus, omnesq; cœlestis Politię leges exquirantur, ac Astronomia cū Geographia et ea Physices parte, quę est de effectibus siderū, humanę vitæ maxime necessarię disciplinæ, exædificentur, stabiliantur, ꝓpagentur. Diuus Augustus, Plinio teste, Obelisco horas diei capiebat, vsus pulcherrimus, Sed quę est Rheni, pulcherrimi fluminis, cōparatio ad totum mare, Terrę ad cœlum, ea est Gnomonices ad totum Obelisci vsum.

Dolendum igitur Turcicum Tyrannum ex Aegypto Constātinopolim, tantum thesaurum, in nullum penitus vsum, ob solam ambitionem deuehere. Vtinam Romanus Obeliscus, non etiam tot iam seculis mutus staret, sed cum doctrina & ingenijs excellat Italia, inde nobis Astronomiam instauraret, in sui celebritatem, et omnium nostrum vtilitatē. Concedat hæc optantibus atq; curantibus, interq; has, mihi, DEus benigne vitam, & Serenissima Maiestas Tua me tueatur, & audiet posteritas, quantus thesaurus sit Obeliscus: Non frustra Aegyptios Reges, in Obeliscos maximos auri & argenti thesauros erogasse, vt dulcissimos à nobis commemoratos, & præstantissimos sibi thesauros compararent. Hactenus me rei angustia & multiplicia infortunia atq; aduersa presserunt, quo minus sicut volui, Astronomiæ inuigilare potuerim, & Medica me totū sibi rapuere. Quod si Serenissima Tua Regia Maiestas me tuendum susceperit, & his studijs gaudens, meam operam nō despexerit, ea Dei benignitate daturus sum, quę cum Deo, tum Serenissimæ Maiestati Tuę Regiæ grata acceptaq; fore non dubito, vel potius mihi persuadeo.

His me submisse Serenissimę Maiestati Tuę Regię commendo.



I

IOANNIS VERNERI

DE TRIANGULIS SPHAERICIS

LIBRI QUATUOR

IOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS DE TRIANGULIS SPHAERICIS.

Cod. R 1259 fol. 1

LIBER PRIMUS.

Deffinitiones.

I. Circulus maximus in sphaera est, cuius planum sphaeram super ipsius centrum secat aequaliter.

II. Circulus minor est, qui sphaeram extra sphaerae centrum secat per inaequalia.

III. Segmentum circuli maximi est pars maximi, quae continetur a parte circum|ferentiae et rectae in maximum inductae. Sed et circumferentiam sectoris segmenti nomine quandoque accipimus. 1v

IV. Angulus sphaericus, qui in hoc et sequentibus libris consideratur, est, qui in superficie sphaerae ex maximorum circulorum segmentis concinnatur.

V. Si circulus maximus super circulum maximum sphaerae consistens continuos angulos aequales fecerit, uterque eorum rectus est, et maximi sibi mutuo sunt recti seu perpendiculares.

VI. Angulus acutus sphaeralis est, qui a maximis sphaerae circulis comprehensus recto minor existit. |

VII. Obtusus angulus sphaeralis est, qui maximis sphaerae circulis concinnatus rectum exsuperat angulum. 2r

VIII. Si duo segmenta quempiam datum angulum continentia in quadrantes efficiantur ad eandem partem, atque per fines eorundem quadrantum maximi segmentum fuerit productum, protracti itaque segmenti et inter quadrantum fines comprehensi magnitudo anguli dati magnitudinem definit. Hoc segmentum si quadrans fuerit, angulus datus erit rectus; si quadrante minor, acutus; si maior, obtusus.

IX. Triangulum, quod in hoc et sequentibus consideratur libris, est, quod ex maximorum in sphaera concinnatur segmentis. |

X. Segmentum maximi circuli seu orbis magni in dato puncto alteri segmento congredi dico, quod, cum altero sphaeralem continens angulum, unam et continuam orbis sectionem minime constituat. 2v

XI. Segmentum genere incertum est, eisdem subiectis, quod in eadem trianguli dispositione aut quadrans esse possit, vel quadrante maius, aut minus.



XII. Angulus genere dubius est, qui pari trianguli dispositione, eisdem subiectis, aliquando rectus est, aliquando acutus aut obtusus. |

3r

Propositio prima.

Si in sphaerico triangulo duo, qui ad basim sunt anguli, recti sunt, erit utrumque duorum segmentorum iuxta eosdem rectos angulos quadranti aequale.

In sphaerico igitur triangulo ABC uterque duorum angulorum ABC, ACB, qui ad basim BC sunt, sit rectus. Dico, quod utrumque duorum segmentorum AB, AC sit quadrans.

Eadem namque AB, AC segmenta constat esse aequalia per propositionem tertiam primi libri Menelai *de sphaericis*; et quia utriusque segmentorum duorum AB, AC planum ex hipothesi erigitur ad planum orbis BC segmenti, igitur utriusque segmentorum duorum AB, AC circulus permeat polum orbis segmenti BC.[1]) Ergo communis sectio A duorum segmentorum polus erit orbis segmenti BC, nisi eiusdem circuli super sphaera 3v scripti in eandem partem duo poli | dari poterint, quod est impossibile.[2]) Et quoniam A polus est magni circuli segmenti BC, igitur utrumque duorum segmentorum AB, AC quadrans est.[3])

Si igitur in sphaerico triangulo duo, qui ad basim sunt anguli, recti sunt, et reliqua ut supra; q. o. osten[dere].

Propositio secunda.

Si sphaericus trigonus rectum unum habuerit angulum, et alterum iuxta rectum angulum segmentum quadrante minus, et segmentum eidem angulo recto obiectum quadranti aequale, erit altera circa eundem rectum angulum circumferentia quadranti aequalis, atque idem triangulus duos habebit rectos angulos.

In sphaerico itaque triangulo ABC angulus ABC rectus sit, et AC segmentum quadrans eidem recto angulo oppositum, atque AB segmentum quadrante minus. Dico, quod alterum BC segmentorum iuxta rectum angulum ABC sit quadrans, et angulus BAC quoque rectus. |

4r Esto itaque, ut circumferentia AB minor sit quadrante. Utrumque deinde iuxta angulum ABC segmentorum ex parte A, C producatur in semicirculum, concurrente altero alteri in puncto D; iungeturque axis sphaerae BD; et ex puncto A super BD axi perpendicularis agatur AE; et esto, si id fieri poterit, BC segmentum quadrante minus. Ergo ex semicirculo BCD quadrans BCF dematur; atque per A, F signa scribatur magni circuli AGF peripheria.[4]) Et quia ex hypothesi angulus ABC rectus est, igitur F punctum

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13.
2) Vgl. Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, def. 5. 3) Ibid. I, 16.
4) Ibid. I, 20.

polus est magni circuli BAD.[1]) Igitur circumferentia AGF magni circuli quadrans est.

Rursus iungantur AC, AF, EC, EF rectae lineae; et quia per constructionem semicirculi BAD planum super plano semicirculi BCD erigitur, ergo per diffinitionem: „Si planum plano rectum est, etc." — ut in principio libri [XI] *elementorum* Euclidis[2]) — uterque duorum angulorum rectilineorum AEC, AEF rectus est. Et per propositionem septimam libri III eorundem *elementorum* EC recta linea minor est quam | EF 4v recta linea. Igitur per propositionem penultimam libri primi[3]) eorundem *elementorum* quadratum[4]) ipsius AF rectae lineae maius est quadrato rectae lineae AC. Et quia duae circumferentiae AGF et AC aequalium sunt circulorum ex hypothesi, et basis AF circumferentiae AGF, velut patuit, maior est base AC segmenti AC, igitur segmentum AGF maius AC segmento; at, velut patuit, AGF segmentum quadrans est; ergo AC segmentum quadrante minus erit. At iam pridem subiiciebatur, idem segmentum AC aequale esse quadranti, quod est impossibile.

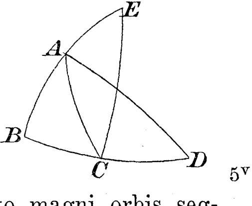
Pari denique argumentatione probabimus, BC segmentum[5]) non excedere quadrantem. Igitur BC segmentum quadrans est seu quadranti aequale. Et quia circulus segmenti AC, uti patet, per polos scriptus est circuli ABD[6]), ergo planum circuli AC ad planum BAD circuli erigitur[7]); ergo BAC angulus rectus est.

Igitur si sphaerici trianguli rectus unus datur angulus, et segmentum eidem angulo obiectum qua|drans, et alterum iuxta eundem rectum angulum 5r segmentum quadrante minus, erit et reliquum iuxta eundem rectum angulum segmentum quadranti aequale; quod demonstrandum erat.

Propositio tertia.

Si in triangulo rectum possidente angulum duorum laterum, quae rectum angulum continent, utrumque minus quadrante fuerit, erit uterque reliquorum angulorum acutus, et latus, quod sub recto tenditur angulo, etiam quadrante inferius.

Sit ergo triangulus ABC rectum habens angulum ABC et utrumque laterum, eundem quae comprehendunt angulum rectum, quadrante minus. Dico, quod uterque ex reliquis angulis ACB et BAC acutus est, et latus reliquum AC quadrante minus.



Ergo utraque latera AB et BC rectum angulum ABC continentia in partes A, C producantur, quousque eorum utrumque quadrans fiat. | Sintque quadrantes 5v isti BAE et BCD; et per A, D signa descriptum esto magni orbis segmentum AD.[8])

1) Vgl. Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13.
2) Euclidis *elementa* XI, def. 4.
3) Ibid. I, 47 (Der pythag. Lehrsatz).
4) Hs. hat *quadrantum*. 5) Hs. hat *quadrantem*.
6) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13. 7) Ibid. I, 15.
8) Ibid. I, 20.

Et quia quadrans BD ad rectos consistit angulos super BE quadrante, igitur D signum polus est segmenti BAE; et idcirco AD sectio quadrans est. Et quia per primum librum Theodosii *de sphaericis*[1]) angulus BAD rectus est, igitur BAC angulus recto minor est. Igitur per diffinitionem [VI] angulus BAC acutus.

Rursus per E, C signa orbis magni sectio EC scribatur.

Et quia BE quadrans super BD segmentum perpendicularis est, ergo E signum polus est segmenti BCD, et angulus BCE rectus. Ergo angulus ACB recto minor, et per diffinitionem [VI] acutus. Igitur uterque duorum angulorum BAC et BCA est acutus.

Praeterea in triangulo ACD angulus ADB acutus est; eius enim magnitudo per diffinitionem anguli sphaeralis [VIII] est AB sectio, quae 6r quadrante minor existit. Et angulus ACD obtusus est; | nam de duobus rectis reliquus ACB acutus est, velut ostensum fuit. Et quoniam demonstratum est[2]) in primo libro Menelai *de sphaericis triangulis*[3]), quod in triangulo omni maius latus sub maiori tenditur angulo, igitur segmentum AD maius est sectione AC. At AD segmentum per constructionem quadrans est; ergo AC sectio quadrante inferior est.

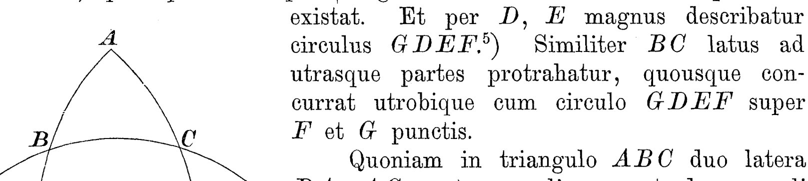
Igitur si in triangulo rectum possidente angulum duorum etc. ut supra; quod o. osten[dere].

Propositio quarta.

In triangulo isoscheli, cuius utrumque duorum aequalium laterum quadrante fuerit inferius, uterque angulorum, qui super reliquo consistunt latere, acutus est, et alter alteri aequalis.

Sit triangulus[4]) isoscheles ABC, cuius duo latera aequalia sunt BA, AC [et utrumque eorum quadrante inferius]. Dico, quod uterque duorum angulorum ABC et ACB sit acutus.

Igitur duo latera AB et AC in partes B et C protrahantur usque 6v ad D et E, quousque utrumque | segmentorum ABD et ACE quadrans existat. Et per D, E magnus describatur circulus $GDEF$.[5]) Similiter BC latus ad utrasque partes protrahatur, quousque concurrat utrobique cum circulo $GDEF$ super F et G punctis.



Quoniam in triangulo ABC duo latera BA, AC sunt aequalia, erunt duo anguli ABC et ACB aequales[6]); ergo et duo qui eis ad verticem sunt aequales anguli ECF et DBG.[7]) Et quoniam A signum polus est circuli FDG, erunt duo anguli BDG, CEF aequales; eorum enim uterque rectus est.[8]) Et quia

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15. 2) Hs hat *fuit* korr. in *est*.
3) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is = triangulis]. — Vgl. Menelai *sphaerica* I, 7. Ich zitiere die Halleyausgabe (Oxford 1758), deren Sätze der von Werner benutzten Menelaos-Übersetzung (durch Gerhard v. Cremona) entsprechen.
4) Hs. hat *angulus*. 5) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 20.
6) Menelai *sphaerica* I, 2. 7) Ibid. I, def. 4.
8) Theodosii *sphaerica*, ed Nizze I, 15.

utrumque segmentorum FBG et FDG semicirculus est[1]), igitur duo anguli BGD, CFE sunt aequales per primum librum Menelai.[2]) Ergo duo triangula CFE et BDG sunt aequiangula, et segmentum BD aequatur segmento CE; igitur et DG per XIV primi libri Menelai sectio aequalis erit EF sectioni. Et duorum segmentorum BD, CE utrumque per constructionem quadrante minus est. Simi|liter duorum segmentorum EF et DG utrumque quadrante minus est. Ergo per praecedentem propositionem bis assumptam uterque duorum angulorum ECF et DBG acutus est. Igitur qui his ad verticem sunt angulorum ABC, ACB uterque acutus. 7r

Ergo in triangulo isoscheli etc.; q. o. o.

Propositio quinta.

In triangulo isoscheli, cuius utrumque aequalium laterum quadrantem exsuperat, uterque duorum angulorum, qui super reliquo consistunt latere, obtusus existit, et alter alteri aequalis.

In triangulo igitur ABC duo latera AB et BC sint aequalia, et utrumque quadrante maius. Dico, quod uterque duorum angulorum ACB et BAC est recto maior.

Ergo AB et BC latera protrahantur in partes A, C, quousque concurrant super D. Et quia per | propositionem XV primi libri Theodosii *de sphaericis*[3]) utraque duarum sectionum BAD et DCB semicirculus est, et per hipothesim AB et BC segmenta aequalia, igitur duae sectiones reliquae AD et DC aequales sunt, et earum utraque quadrante minor. Ergo per praecedentem propositionem duorum angulorum DAC et DCA uterque recto minor[4]) est. Ergo duorum angulorum BAC et ACB uterque recto maior est. 7v

B
A
C
D

Igitur in triangulo isoscheli etc.; q. o. o.

Propositio sexta.

Si in trigono[5]) dato rectangulo duorum laterum, quibus [rectus] continetur angulus, unum utcumque fuerit, alterum quadrans erit, et reliquum latus recto subtensum angulo quadrans, atque datus triangulus habebit ad minimum duos angulos rectos.

Esto igitur triangulus ABC habens AB la|tus quadrante minus, AC vero quadranti aequale, et angulum BAC sub eisdem comprehensum lateribus 8r

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 11.

2) Es findet sich in Menelaos' *Sphärik* kein Satz, auf welchen hier hingewiesen werden kann. Dagegen wird daselbst von Satz I, 10 an öfters dieselbe Voraussetzung wie hier gemacht, und Campanus knüpft daran folgenden Kommentar: *Quia tunc dicuntur anguli, quos continent arcus circulorum magnorum in sphaera, aequales, cum anguli inclinationis eorum sunt aequales.* In den arabischen Menelaoshss. liegt die Voraussetzung in I, def. 6; Werner aber kannte sicher nur die lateinische Übersetzung durch Gerhard von Cremona, wo die Definitionen fehlen.

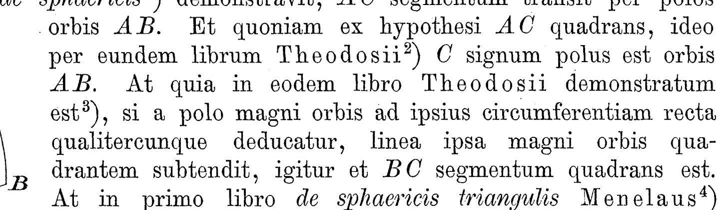
3) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 11.

4) Hs. hat *maior.*

5) Hs. hat *trigono* korr. aus *triangulo.*

rectum. Dico, quod segmentum BC quadrans quoque est, atque triangulus ABC ad minus duos rectos possidet angulos.

Et quia angulus BAC rectus, ergo per id, quod Theodosius in primo libro *de sphaericis*[1]) demonstravit, AC segmentum transit per polos orbis AB. Et quoniam ex hypothesi AC quadrans, ideo per eundem librum Theodosii[2]) C signum polus est orbis AB. At quia in eodem libro Theodosii demonstratum est[3]), si a polo magni orbis ad ipsius circumferentiam recta qualitercunque deducatur, linea ipsa magni orbis quadrantem subtendit, igitur et BC segmentum quadrans est. At in primo libro *de sphaericis triangulis* Menelaus[4]) ostendit, quod in trigono isoscheli duo anguli qui super basim ad invicem sunt aequales; ergo in triangulo ABC angulus ABC aequalis est angulo BAC. At angulus | BAC per hypothesim rectus est, ergo et angulus ABC est rectus. (8v)



Quod si AB segmentum quadrans quoque fuerit, et AB per diffinitionem [VIII] magnitudo est sphaerici anguli ACB, ergo et angulus ACB rectus erit; atque idcirco triangulus ABC tres habebit angulos rectos. Si autem AB sectio quadrante maior aut minor fuerit, angulus itaque BCA rectus non erit, sed vel recto minor vel maior; et ita datum triangulum ABC duos tantum rectos habebit angulos.

Igitur si in triangulo dato, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio septima.

Si in triangulo sphaerico duorum laterum, quibus rectus comprehenditur angulus, unum quadrante minus existat, alterum quadrante maius, erit angulus minori subtensus datorum laterum acutus, qui | vero maiori obtusus, et reliquum latus quoque quadrante maius. (9r)

Sit datum triangulum ABC habens ABC angulum rectum, et AB latus quadrante quidem minus, BC vero maius. Dico, quod angulus BCA sit acutus, et angulus BAC obtusus, et AC latus reliquum etiam quadrante maius.

Ergo duo latera AC et CB in partes A, B producantur, donec concurrant super D signo. Et quia in primo libro Theodosii[5]) demonstratum est, quod magni super sphaera circuli in duobus duntaxat signis et per aequalia se ad invicem secant, igitur utrumque duorum segmentorum CAD et DBC semicirculus est. Et quia per hipothesim BC sectio quadrante maior est, igitur et reliqua BD eadem est quadrante minor. At AB segmentum ex hypothesi quadrante superatur, et anguli circa signum | B recti sunt; ergo per propositionem tertiam uterque duorum angulorum BAD et ADB recto minor est, et segmentum (9v)

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13.
2) Ibid. I, 16 invers. 3) Ibid. I, 16.
4) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Menelai *sphaerica* I, 2.
5) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 11.

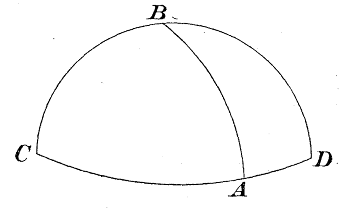
AD quadrante minus. At angulus ACB aequalis est angulo ADB; igitur angulus ACB acutus est; et quoniam BAD angulus est acutus, ergo de duobus rectis reliquus BAC angulus obtusus est. At quia AD sectio quadrante est inferior, igitur ex semicirculo DAC reliqua CA quadrantem excedit.

Igitur si in triangulo sphaerico duorum laterum, quibus rectus comprehenditur angulus, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio octava.

Si super triangulo sphaerico duorum laterum, quae rectum complectuntur angulum, unum quadrans existat, alterum quadrante superius, erit latus reliquum quadrans, et angulus dato subtensus quadrante re|ctus, reliquusque angulus obtusus. 10r

Esto triangulum sphaericum ABC habens angulum BAC rectum, et latus AB quadrantem, AC vero quadrante longius. Dico, quod reliquum latus BC quadrans sit, et reliquorum angulorum ACB quidem rectus, ABC vero obtusus.



Ergo AC et CB segmenta in partes A, B producantur, et concurrant in D.[1]) Et quia utraque sectionum CAD et DBC per primum librum Theodosii[2]) est semicirculus, et AC segmentum ex hypothesi quadrante maius, igitur DA semicirculi CAD reliqua sectio quadrante minor est. At ex hypothesi AB quadrans est, et angulus BAD rectus; ergo per propositionem sextam BD segmentum quadrans est; igitur ex semicirculo DBC reliquum segmentum CB quadrans.

At quia in triangulo ABD utrumque laterum AB, BD quadrans est, et idcirco triangulus ABD | isoscheles, igitur angulus ADB aequalis est angulo BAD.[3]) Angulus autem BAD rectus est; igitur angulus ADB rectus est, qui quoniam aequalis est angulo ACB, ideo angulus ACB rectus est. Et quia segmentum AD, velut ostensum fuit, minus existit quadrante, et ipsum magnitudo est anguli ABD [Def. VIII], igitur angulus ABD recto minor est Quare de duobus rectis reliquus ABC obtusus erit. 10v

Igitur si super triangulo sphaerico, et reliqua velut supra; q. o. o.

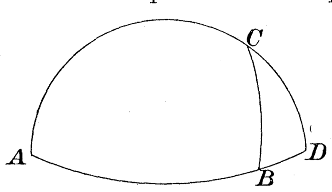
Propositio nona.

In dato triangulo sphaerico si duo latera inaequalia rectum complectantur angulum, ex quibus utrumque quadrantem excedat, erit reliquum latus quadrante brevius, et reliquorum uterque angulorum obtusus.

Triangulus itaque datus esto ABC habens | angulum BAC rectum, et utrumque duorum laterum AB, AC quadrante maius. Dico, quod latus reliquum BC quadrante minus est, et uterque duorum angulorum ABC et BCA obtusus. 11r

1) Hs. hat DE. 2) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 11.
3) Menelai *sphaerica* I, 2.

Igitur duo latera AB et AC in partes B, C producta concurrant in D. Et quoniam utrumque segmentorum ABD et ACD est semicirculus[1]), et duo utraque latera AB et AC sunt maiora quadrante, ideo utrumque duorum segmentorum BD et DC est quadrante inferius; et angulus BDC aequalis est angulo BAC, sed BAC angulus rectus est, ergo et suus aequalis BDC. Igitur per propositionem tertiam latus BC quadrante minus est; at quia per propositionem eandem uterque duorum angulorum BCD et CBD acutus est, ergo de duobus rectis reliqui ABC et ACB sunt obtusi.



Igitur in triangulo sphaerico si duo latera inaequalia rectum complectantur angulum, et reliqua, quae oportuit ostendere. |

11v

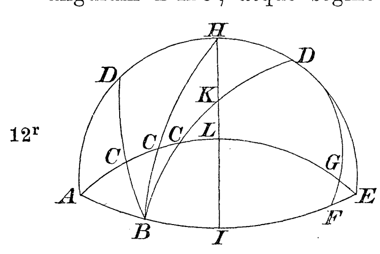
Propositio decima.

In triangulo sphaerico si duo latera inaequalia, quorum utrumque minus quadrante fuerit, acutum comprehendunt angulum, erit latus, quod acutum subtendit angulum, quadrante minus.

Esto triangulum ABC possidens utrumque duorum laterum, quae acutum contineant angulum BAC, quadrante minus. Dico, quod latus reliquum BC quadrante minus est.

Sit igitur BAD angulus rectus, claudens intra se partilem et acutum angulum BAC; atque segmenta tria AB, AC et AD in partes B, C et D producta concurrant super E signo. Etenim si duo segmenta velut AB et AD concursum suum habuerint super E puncto, segmentum vero AC in partem C productum in diversis congrediatur cum utroque reliquorum | segmentorum, velut cum sectione ABE super F signo et cum segmento ADE super G signo, consequens erit, ut duo magni orbes super sphaera sese per inaequalia secent, quod est penitus absentaneum atque illi, quod Theodosius *de sphaericis*[2]) in libro primo demonstravit, penitus contrarium. Ipsa igitur tria segmenta concurrunt super unico signo E; atque BC sectio in partem C producta concurrat cum segmento ADE super D signo.

12r



Et ex semicirculo ADE abscindatur quadrans AH. Igitur si D punctum ceciderit inter A, H signa, patet AD segmentum quadrante minus esse. At ex hypothesi AB segmentum quadrante quoque vincitur, et per constructionem angulus BAD rectus est; igitur per propositionem tertiam BD sectio quadrante minor existit; ergo multo magis ipsius pars, videlicet segmentum BC, quadrante vincitur.

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 11.
2) Ibid.

Idem[1]) eodem modo demonstrabimus, si D super H ceciderit; nam BH qua|drans erit per propositionem sextam; et quia BC tunc pars erit quadrantis, igitur BC erit quadrante minor. 12v

Postquam vero punctum D inter H et E signa contigerit, ergo ex semicirculo ABE scindatur quadrans AI; atque per signa H, I magni orbis segmentum HKI describatur[2]), secans BD segmentum super K signo. Et quoniam A polus est segmenti HKI, atque angulus HAI per hipothesim rectus, igitur HKI segmentum quadrans est [Def. VIII inv.], et angulus BIK rectus.[3]) Et quia in triangulo rectangulo BIK duorum circa rectum angulum laterum BI, IK utrumque, velut liquet, quadrante minus est, igitur per propositionem tertiam BK segmentum quadrante inferius existit; ipsius autem pars est BC; ergo BC sectio multo minor quadrante probabitur.

Communis autem sectio semicirculi ACE et HKI sit L signum. Et quia AL quadrans est, igitur iuxta praemissas hypotheses C punctum non erit idem cum L signo; alioquin AC quadrans esset, quod non subiectum fuit. Ergo C punctum neque cadet in|ferius L signo velut in quadrantem LE, quia sic AC segmentum longe quadrantem excederet, quod rursus non supponitur. Ergo C signum non cadet secus quam vel in primo aut in secundo situ; quare ad probandam hanc propositionem iam ostensa sufficiunt. 13r

Igitur in triangulo sphaerico si duo latera, quorum utrumque etc.; q. o. o.

Correlarium.[4])

Inde etiam manifestum est, angulum ABC esse quandoque acutum, velut quando D inter A, H signa constituitur, aliquando vero rectum, velut si D in H inciderit, aliquando obtusum, uti si D inter H, E signa deprehenditur.

In primo namque situ ipsius D correlarium patet per propositionem tertiam, in situ secundo ipsius D per propositionem sextam, in situ tertio per diffinitionem anguli obtusi; nam tunc anguli ABC magnitudo erit segmentum circuli quadrante maius.

Propositio XI.

Si in triangulo segmentum quadrante minus et | quadrans acutum comprehendunt angulum, erit reliquorum angulorum alter, qui ad brevius latus, obtusus, qui vero quadranti cohaeret, acutus, sectio et, quae sub acuto tenditur angulo, quadrante minor. 13v

Ergo in triangulo ABC angulus BAC sit acutus, et AB segmentum quadrante minus, et AC quadrans. Dico, quod angulus ABC sit obtusus, et ACB angulus acutus.

---

1) Hs. hat *Idem* korr. aus *Idem in.*

2) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 20. 3) Ibid. I, 15.

4) Am Rande schreibt 2. Hand: „Hinc etiam constat, quod in triangulo, cuius duo latera quadrantibus singula maiora includunt angulum acutum, reliquum latus sit quadrante minus, *unus angulus acutus,* tertius varius." Unter den kursiv gedruckten Worten schreibt 3. Hand: „Amplius".

Ergo latus AB in partem B protrahatur usque ad D, et sit ABD quadrans; et per C, D signa[1]) describatur orbis magni sectio DC.[2]) Et quia utrumque segmentorum AC et ABD est quadrans, igitur A signum polus est sectionis DC, et uterque angulorum ACD et ADC rectus. Et quia ex hypothesi angulus BAC acutus est, igitur per diffinitionem anguli conversam [VIII] sectio DC minor est quadrante, et BD segmentum quadrante inferius ex hypothesi, et BDC angulus rectus, velut ostensum fuit; ergo | per propositionem tertiam angulus CBD acutus est; ergo de duobus rectis reliquus ABC obtusus est. Et quia ACD angulus rectus est, igitur partilis angulus ACB erit acutus. Et BC segmentum quadrante minus est per eadem demonstrata.

14^r

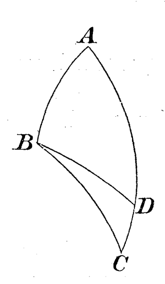
Igitur si in triangulo segmentum quadrante minus etc. ut supra; q. o. o.

Propositio XII.

Si trianguli duorum laterum, quae[3]) acutum continent angulum, alterum quadrante minus existat, alterum quadrante maius, erit angulorum reliquorum alter breviori cohaerens lateri obtusus, qui vero ad maius consistit latus acutus.

In triangulo igitur ABC angulus BAC sit acutus, et AB segmentum quadrante minus, et AC latus quadrantem exuperet. Dico, quod angulus ABC obtusus est, et angulus ACB acutus.

14^v



Ergo ex AC longiore latere | quadrans AD abscindatur, et protracto segmento BD[2]) erit per praecedentem propositionem partilis angulus ABD obtusus; ergo multo fortius maior angulus ABC obtusus est. Et per eandem propositionem ADB angulus est acutus, igitur de duobus rectis reliquus angulus BDC obtusus Et quia in triangulo obtusiangulo duorum laterum BD et DC, quae obtusum angulum BDC continent, utrumque quadrante minus est, BD quidem per secundam partem praecedentis propositionis, DC vero per constructionem seu per hypothesim, ergo per praecedentem propositionem angulus BCD acutus.

Igitur si trianguli duorum laterum, quae acutum comprehendunt angulum, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XIII.

Si in triangulo sphaerico quadrans et segmentum quadrante maius acutum comprehendant angulum, erit reliquorum angulorum unus obtusus, qui ad quadrantem consistit, alter | vero, qui ad longius latus, acutus, et reliquum latus quadrante minus.

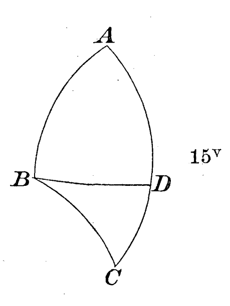
15^r

---

1) Hs. hat *signum*. 2) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 20.
3) Hs. hat *qui*.

In triangulo ABC quadrans AB et segmentum AC quadrante maius acutum complectantur angulum BAC. Dico, quod angulus ABC est obtusus, et angulus ACB acutus, latusque reliquum BC quadrante minus.

Ex AC segmento abscindatur quadrans AD, et producta sectione BD[1]) constituetur partilis trigonus[2]) BDC, rectum habens angulum BDC et duorum laterum BD, DC[3]), quae rectum complectuntur angulum BDC, utrumque minus quadrante. Anguli enim iuxta D signum recti sunt, quoniam A signum polus est segmenti BD.[4]) Et quia ex hypothesi angulus BAD acutus est, atque per diffinitionem anguli sphaerici [VIII] BD segmentum magnitudo est anguli BAD, igitur BD segmentum est quadrante inferius; liquet autem DC sectionem quadrante minorem esse per constructionem; ergo trigonus BCD | habet angulum BDC rectum et duorum circa eundem laterum quadrante minus utrumque. At — per tertiam propositionem — si in triangulo rectum possidente angulum duorum laterum, quae rectum continent angulum, utrumque minus existat quadrante, erit uterque reliquorum angulorum acutus, et segmentum sub recto tensum angulo quadrante inferius. Ergo angulus ACB acutus est, et latus BC quadrante minus. Patet autem angulum ABC esse obtusum.



15v

Igitur si in triangulo sphaerico quadrans et segmentum quadrante maius acutum comprehendant angulum, et reliqua ut supra; q. o. o.

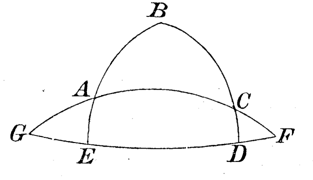
Propositio XIV.

Si in triangulo obtusiangulo laterum, quae obtusum comprehendunt angulum, quadrante minus utrumque extiterit, erit uterque reliquorum angulorum acutus, et latus reliquum genere ambiguum. |

16r

In triangulo igitur ABC obtusus sit angulus ABC, et laterum AB et BC, quae eum continent, utrumque sit quadrante minus. Dico, quod uterque duorum angulorum ACB et BAC acutus est.

Protrahantur ergo utrumque duorum laterum AB et BC in partes A, C, donec utrumque quadrans existat. Sintque duo quadrantes BCD et BAE; et AC latus in utrasque partes protrahatur; et per D, E signa orbis magni describatur segmentum FEG[1]), occurrens utrobique cum segmento AC in utrasque partes producto super F, G signis. Et quoniam in partili trigono CDF duorum laterum CD, DF[5]) rectum angulum CDF comprehendentium quadrante minus utrumque est — CD quidem ex hipotesi, DF vero quoniam DE segmentum per diffinitionem anguli sphaeralis [VIII] magnitudo est anguli ABC obtusi, et idcirco quadrante maius, et totum segmentum FEG semicirculus est per XV primi Theodosii[6]) —, igitur per praecedentem tertiam propo-



1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 20. 2) Hs. hat *trigonis*.
3) Hs. hat BDC. 4) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15.
5) Hs. hat CDF. 6) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 11.

16v sitionem an|gulus DCF acutus est, igitur et qui ad verticem consistit ACB[1]) angulus.[2]) Eodem quoque modo ostendemus, angulum EAG[3]) acutum esse, quare et qui ad verticem est BAC.

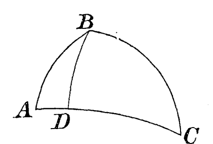
Igitur si in triangulo obtusiangulo etc. ut supra; quod decuit [!] ostendere.

Propositio XV.

In trigono[4]) obtusiangulo si duorum laterum, quae obtusum angulum comprehendunt, alterum quadrante minus extiterit, alterum vero quadrans, erit latus obtuso subtensum angulo maius quadrante, et uterque angulorum reliquorum acutus.

Sit ergo triangulum ABC habens angulum ABC obtusum, et AB latus quadrante minus, BC vero quadrantem. Dico, quod latus AC obtuso 17r angulo ABC subtensum | quadrante maius est, et uterque angulorum BAC et BCA recto minor[5]) est.

Ex obtuso angulo ABC rectus auferatur angulus CBD descripto segmento BD[6]). Et quia ex hipothesi sectio BC quadrans est, et per constructionem angulus CBD rectus, igitur per propositionem sextam segmentum CD quadrans est, et angulus BDC rectus, quare et reliquus ADB rectus. Et quia, ut probatum fuit, DC [quadrans est], sectio AC quadrantem excedit. Rursus, quia in triangulo ADB [angulus] ADB, ut ostensum fuit, rectus est, et utrumque duorum laterum AB, AD quadrante minus est — AB quidem ex hypothesi, AD vero per constructionem, quoniam CA si semicirculus esset, et duo segmenta AB et BC semicirculus atque unum segmentum essent, quod non suppositum fuit —, 17v ergo AD segmentum quadrante minus est. | At Menelaus in primo libro operis sui *de sphaericis triangulis*[7]) demonstravit: „Si trigonus unum continuerit angulum recto non minorem, at duorum laterum, quae unum ex reliquis continent angulis, quadrante minus utrumque, erit reliquum latus quadrante minus, et reliquorum uterque angulorum acutus.“ Igitur segmentum BD quadrante minus est, et angulus BAD acutus. Et quia BD definit magnitudinem anguli BCD [Def. VIII], et BD sectio quadrante minor est, igitur et angulus BCD recto minor est.



Ergo in triangulo obtusiangulo, et reliqua ut supra; q. o. o.

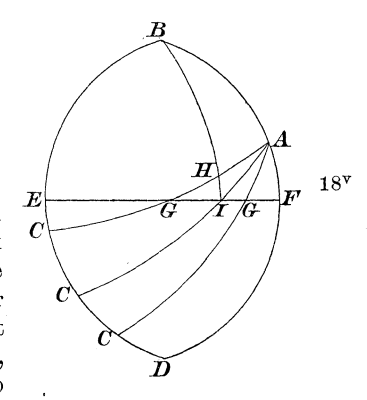
Propositio XVI.

Si trigonus datus obtusiangulus laterum, quae obtusum comprehendunt angulum, quadrante unum quidem minus habuerit, alterum vero maius, erit latus reliquum etiam quadrante 18r maius. Ex reliquis vero angulis | qui iuxta brevius datorum laterum consistit aliquando rectus aliquando obtusus, altero iuxta longius latus consistente semper acuto; quandoque vero utrisque angulis reliquis recto minoribus; nonnunquam autem is,

1) Hs. hat ABC. 2) Menelai *sphaerica* I, def. 4. 3) Hs. hat FAG.
4) Hs. hat *trigono* korr. aus *triangulo*. 5) Hs. hat *minor* korr. aus *minus*.
6) Hs. hat BB.
7) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is]. — Vgl. Menelai *sphaerica* I, 22.

qui iuxta longius constituitur latus, erit rectus, altero qui iuxta brevius existente obtuso.

Esto datum triangulum ABC angulum CBA possidens obtusum, ex his, quae obtusum comprehendunt angulum, lateribus AB et BC, AB quidem quadrante minus, BC vero maius. Dico, quod AC latus quadrantem excedit, angulo BAC nonnunquam recto constituto, quandoque obtuso, altero BCA existente acuto, aut uterque angulorum BAC et ACB acutus erit, aut angulus ACB rectus existit altero BAC obtuso, aut uterque angulorum BAC et ACB erit obtusus.



Duo ergo latera AB et BC in par|tes A et C protracta concurrant super D signo; et ex semicirculo BCD auferatur quadrans BE; et ex semicirculo BAD quadrans dematur BF; atque protractum segmentum EF secet AC super signo G. Et quoniam punctum B polus est sectionis EF, igitur uterque angulorum BEF, BFE rectus est.[1]) Subtrahatur quoque angulo obtuso ABC rectus CBH, protracto segmento BHI scindente EGF super signo I, quod cadet aut inter F et G signa, vel in signum G, vel inter E, G signa. 18ᵛ

Imprimis itaque signum I cadat inter F et G signa; et quadrans BI secet AC latus trianguli ABC super puncto H. Et quoniam in triangulo BCH angulus CBH rectus est, et BH latus quadrante minus, BC vero latus quadrante maius, ergo per propositionem septimam CH segmentum erit quadrante maius. Quare totum AC segmentum multo amplius superat quadrantem. |

At si FG quadrans extiterit, quare per propositionem sextam angulus FAG rectus est [, igitur de duobus rectis reliquus angulus BAC rectus est]; et quia FG constituto quadrante segmentum EG inferius est quadrante, EC autem ex hipothesi quadrante minus est, et angulus CEG rectus, igitur per tertiam propositionem angulus ECG acutus est. 19ʳ

Postquam autem segmentum FG quadrante[2]) fuerit inferius, erit per propositionem tertiam angulus FAG acutus, igitur de duobus rectis angulus reliquus BAC obtusus, et alter angulus BCA acutus per propositionem tertiam; nam utraque duarum sectionum CE, EG quadrante minor est, CE quidem per constructionem, EG vero quia eo maior sectio EI quadrans est, nam anguli recti IBC magnitudo est per diffinitionem [VIII].

At si FG sectio quadrantem exuperaverit, erit per propositionem septimam angulus FAG obtusus, ergo de duobus rectis reliquus BAC acu|tus; et alter angulus ACB acutus erit per propositionem tertiam, quoniam in triangulo partili CEG angulus CEG rectus est, et utrumque laterum CE et EG quadrante minus. 19ᵛ

Puncto deinde I cadente in G, erit EG quadrans; ergo per propositionem sextam CG quoque quadrans; ergo AC segmentum quadrante maius erit. Et quia angulus AFG rectus est, atque utrumque laterum AF et FG quadrante minus, igitur per propositionem tertiam angulus FAG acutus

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 15. 2) Hs. hat *quadrans.*

est, ergo de duobus rectis reliquus BAC obtusus, et per propositionem sextam angulus ACB rectus, velut ex schemate secundo[1]) liquet.

Demum esto, ut punctum I incidat super sectione EG velut in forma postrema.[1]) Et quia EG segmentum superat quadrantem, EC vero quadrante 20r minus est, erit per propositionem septimam sectio CG quadrante ma|ior; ergo multo magis AC segmentum quadrantem superat. Et per eandem propositionem ACB angulus obtusus, et quia utrumque duorum laterum AF et FG trianguli AFG quadrante inferius est, et angulus AFG rectus, erit per propositionem tertiam angulus $[F]AG$ acutus. Igitur de duobus rectis reliquus angulus BAC obtusus est.

Igitur si trigonus extiterit obtusiangulus, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Correlarium.

Hinc etiam patet, quod si FG quadrans extiterit, angulus BAC rectus est, et ACB acutus. At si FG sectio quadrante minor est, erit angulus BAC obtusus, et ACB acutus. Si vero FG quadrante maior fuerit, ergo uterque angulorum BAC et ACB acutus est. Ubi autem EG quadrans 20v est, ut | in specie secunda, erit angulus ACB rectus et angulus BAC obtusus. Demum si EG quadrantem vicerit, ergo uterque duorum angulorum BAC et ACB obtusus est.

Propositio XVII.

In triangulo obtusiangulo si duorum laterum, quae obtusum continent angulum, unum quadrans extiterit, alterum quadrante maius, erit latus reliquum quadrante maius, et uterque reliquorum angulorum obtusus.

Sit itaque triangulus sphaericus ABC obtusum habens angulum ABC, et latus AB quadrans, BC vero latus quadrante maius. Dico, quod latus AC quadrantem exuperat, et duorum angulorum BAC et BCA uterque obtusus est.

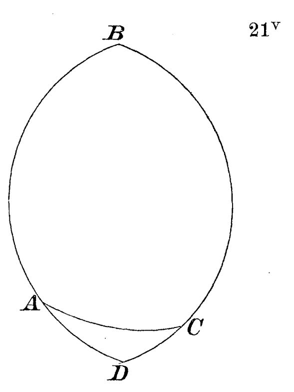
Ex BC quadrans auferatur BD, et 21r descripto segmento AD ipsum | est maius quadrante per diffinitionem anguli obtusi [VII]; nam ipsum est magnitudo anguli ABC [Def. VIII]; et segmentum CD quadrante minus per constructionem; atque angulus ADC rectus; ergo per propositionem septimam AC segmentum quadrantem exuperat, et ACB angulus obtusus est. At quia angulus BAD rectus existit, ergo angulus BAC quoque obtusus; nam ipse recto angulo BAD maior est.

Igitur in triangulo obtusiangulo si duorum laterum, quae obtusum continent angulum, et reliqua ut supra; q. o. o.

1) Die Worte „ex schemate secundo“ und „in forma postrema“ zeigen, daß im Originalmanuskript für jeden Fall des gegenwärtigen Satzes eine Figur dagewesen ist. Da indessen die ursprünglichen Figuren verloren gegangen, hat der Herausgeber der Übersichtlichkeit wegen diese Spezialisierung aufgegeben.

Propositio XVIII.

Si trigonus obtusiangulus duorum laterum, quibus angulus continetur obtusus, utrumque maius quadrante possideat, erit reliquorum angulorum uterque obtusus.[1] |



21ᵛ

Si[t] triangulus obtusiangulus ABC obtusum habens angulum ABC, et utrumque duorum laterum AB, BC quadrante superius. Dico, quod uterque angulorum ACB et BAC est obtusus.

Duo itaque latera AB et BC protrahantur in partes A, C, donec concurrant super D. Et quia utrumque segmentorum BAD et BCD semicirculus est, igitur et reliquorum segmentorum AD, DC[2]) utrumque quadrante inferius. Igitur per propositionem XIV ex duobus angulis CAD et DCA uterque recto minor est. Ergo de duobus rectis reliquorum angulorum BAC et ACB uterque recto maior obtususque erit.

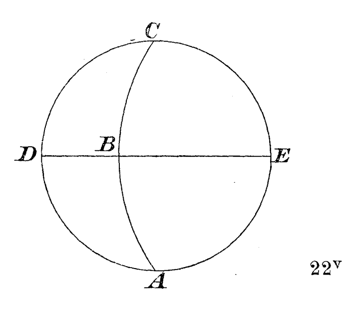
Igitur si trigonus duorum etc.; q. o. o.

Propositio XIX.

Duobus super sphaera magnis orbibus ad inaequales angulos sese ad invicem secan|tibus si a signo quopiam, terminante quadrantem ab alterutra sectionum inchoatum, perpendicularis [sectio] in utramlibet partem super alium circulum deducta [fuerit], in punctum medium inter duas communes sectiones duorum circulorum incidet.

22ʳ

Igitur[3]) duo super sphaera circuli magni ABC et ADC[4]) sese ad invicem ad inaequales angulos secent, et angulus BAD sit acutus, et reliquus BAE obtusus, et sint duo communium sectionum puncta A, C, et sit quadrans AB, et a puncto B circuli ABC in utramlibet partem, sive anguli acuti BAD sive obtusi BAE, perpendicularis sectio deducta super circulum ADC, velut in partem acuti anguli BAD descripta sit BD, et in partem obtusi anguli BAE deducta sit BE perpendicularis. Dico, quod D signum medium est inter duo communium sectionum signa A et C, et quod pari | modo E dividit semicirculum AEC in duo dimidia.



22ᵛ

Et quia in triangulo BAD latus AB quadrans est, et angulus ADB rectus per hipothesim, igitur per secundam propositionem angulus ABD

1) Am Rande schreibt 2. Hand: „Pendet haec propositio ex 14. huius", und ferner: „Adde insuper, quod latus tertium sit ambiguum."

2) Hs. hat AD, DC, DA. 3) Hand 2 korrigiert *Igitur* in *Sint*.

4) Hand 2 fügt *qui* hinzu.

rectus est, et segmentum AD etiam quadrans; et pari ratione AE segmentum quadrans.

Igitur duobus super sphaera magnis orbibus ad inequales angulos etc.; q. demon[strare] o.

Propositio XX.

Duobus super sphaera circulis magnis ad duos inaequales angulos sese ad invicem secantibus si a signo, terminante minus quadrante segmentum ab alterutra communium sectionum inceptum, perpendicularis sectio super alterum circulum deducta fuerit, ipsa cadit in partes acuti anguli. |

23r Sint duo magni orbes ABC et AED sese adinvicem secantes ad inaequales angulos, obtusum quidem BAE, BAK vero acutum; et sit AB segmentum quadrante minus. Dico, quod ex B signo super circulum AED perpendicularis sectio deducta cadit ad partem acuti anguli BAK et non in partem obtusi anguli BAD.

Si enim id possibile fuerit, cadat ergo super E signo, sitque segmentum AE quadrante minus. Et quia per hypothesim AB sectio quadrante minor est, et angulus BAE obtusus, erit per propositionem XIV angulus AEB acutus, quod non supponebatur.

Rursus sit AED quadrans. Dico, quod perpendicularis ex B deducta non cadit super D. Cadat ergo, si id possibile fuerit, et sit ABC quadrans. Atque segmento 23v descripto CD erit angulus ADC re|ctus, et idcirco angulus ADB recto minor; igitur BD sectio non erit perpendicularis super circulum AED.

Cadat nunc perpendicularis ex B deducta ultra D signum, velut in puncto G. Et quia CD segmentum magnitudo est anguli obtusi BAE [Def. VIII], igitur CD sectio quadrante maior est; ergo ex CD auferatur quadrans DF; et BG secet in primis FD. Descripto segmento itaque FG, erit angulus DGF rectus et maior angulo BGD; igitur BG sectio non est perpendicularis super AED segmento.

Praeterea BG secet nunc CF segmentum; descriptaque sectione FG manifestum erit, angulum BGD maiorem esse angulo FGD; est autem angulus FGD rectus; igitur angulus BGD recto maior[1]) est.

Igitur duobus super sphaera circulis, et reliqua ut supra; q. o. o. |

24r Propositio XXI.[2])

In triangulo rectum habente angulum si utrumque laterum, quae unum ex reliquis angulis continent, quadrante minus

1) Hs. hat *minor*. — Die Möglichkeit eines senkrechten Bogens BFG wird wissentlich oder unwissentlich nicht geprüft; die Möglichkeit eines senkrechten Halbkreises $KBFG$ wird beiseite geschoben. Entweder muß also der Beweis als falsch betrachtet werden oder aber der Satz als sinnlos.

2) Am Rande schreibt Hand 2: „Hactenus duo latera cum angulo comprehenso; sequitur nunc duo latera cum angulo opposito."

extiterit, erit et reliquum latus quadrante minus, et uterque reliquorum angulorum acutus.

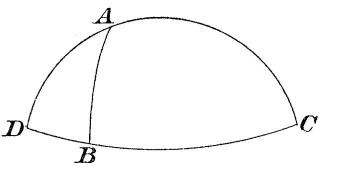
Esto triangulum ABC habens angulum ACB rectum, et duorum laterum AB et AC utrumque minus quadrante. Dico, quod reliquum latus BC quadrante vincitur, et quod uterque duorum BAC et ABC angulorum acutus est.

Quoniam Menelaus in *sphaericis triangulis*[1]) libro primo demonstravit, quod si in triangulo ex segmentis magnorum orbium concinnato unus fuerit angulus non minor recto, et utrumque duorum[2]) laterum, quae unum ex reliquis angulis com|prehendunt, quadrante minus, erit reliquum latus etiam quadrante minus, et uterque ex duobus reliquis angulis recto minor; sed quia per hypothesim in triangulo ABC ex segmentis magnorum orbium constructo angulus ACB rectus est, et utrumque duorum laterum AB et AC, quae comprehendunt angulum BAC, quadrante minus; igitur reliquum latus BC quadrante minus est, et uterque reliquorum angulorum BAC et ABC recto minor est; q. o. demon[strare]. 24v

Propositio XXII.

In triangulo rectangulo si duorum laterum, quae unum[3]) ex reliquis angulis comprehendunt, quadrante alterum quidem minus fuerit, alterum vero maius, erit reliquum latus quadrante maius, et angulus eodem subtensus latere obtusus, et reliquus[4]) angulus acutus.[5]) |

Sit ergo triangulum ABC rectum habens angulum ABC, et latus AB quadrante quidem minus, latus vero AC quadrante maius. Dico, quod reliquum BC latus sit quadrante maius, et angulus BAC obtusus, et ACB angulus acutus. 25r



Ergo duo latera BC et CA in partes A, B protrahantur, quousque concurrant super signo D. Et quia per hypothesim segmentum AC quadrante maius est, ergo de semicirculo reliquum segmentum AD quadrante minus erit. Et quoniam per hypothesim angulus ABC rectus est, igitur de duobus rectis reliquus ABD rectus est. Est autem AB sectio quadrante minor, igitur per propositionem XXI BD segmentum quadrante minus, et uterque duorum angulorum ADB et BAD acutus. Ergo BC segmentum quadrantem excedit; nam de semicirculo CBD reliquum BD quadrante minus est, ut ostensum fuit. Et angulus BAC obtusus est, quia de duobus rectis reliquus | BAD recto minor iam ostendebatur. Praeterea quoniam angulus ADB aequalis est angulo 25v

1) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Vgl. Menelai *sphaerica* I, 22.
2) Hs. hat *reliquorum*. 3) Hs. hat *nunc*. 4) Hs. hat *reliquis*.
5) Zweideutig abgefaßt; nur der eine Fall wird bewiesen; vgl. unten. Für den anderen Fall ist der Satz falsch.

ACB[1]), sed angulus ADB ostensus fuit acutus, ergo angulus ACB acutus est.

Igitur in triangulo rectangulo si duorum laterum, quae unum ex reliquis angulis comprehendunt, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XXIII.

Si triangulum rectum possideat angulum, fieri non poterit, ut duorum laterum, quae unum ex reliquis complectuntur angulis, unum quidem sit quadrans, alterum quadrante maius.

Sit ergo triangulus talis ABC habens angulum ABC rectum, et latus[2]) AB quadranti aequale, latus vero AC quadrante maius.

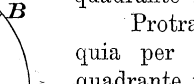
26r Ergo duo latera AC et BC producantur in partes A, B, usque quo concurrant | super D signo. Et quia per hipothesim ABC angulus rectus est et AB quadrans, ergo punctum A polus est semicirculi DBC.[3]) At quia cuncta segmenta, quae a polo super peripheriam magni orbis describuntur, quadrantes sunt, velut Theodosius *de sphaericis triangulis*[4]) in libro primo demonstravit[5]), ergo segmentum AC quadrans est. Sed prius erat quadrante maius, quod est impossibile.

Igitur si triangulus rectum possideat angulum, et reliqua ut supra; quod erat ostendendum.

Propositio XXIV.

Si in triangulo quopiam unus angulus fuerit acutus, et duorum laterum, quae unum ex reliquis continent angulis, quadrante minus utrumque, erit reliquorum angulorum unus aut 26v acutus, aut rectus vel | obtusus, et reliquum latus quadrante minus, praesertim angulus, cui ipsum subtenditur, obtusus non existat; cui si obtuso contigerit esse, varium[6]) latus reliquum invenietur.

Sit triangulus ABC habens acutum angulum ABC et utrumque duorum laterum AB et AC quadrante minus. Dico, quod angulo ACB contingit vel obtuso vel recto aut acuto esse, et latus BC reliquum etiam quadrante minus erit.



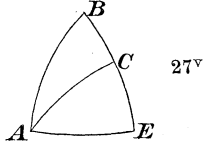
Protrahatur ergo latus BC in partem B usque in D. Et quia per hipothesim duorum laterum AC et AB utrumque quadrante minus est, igitur duo latera AC et AB pariter accepta semicirculo sunt minora. Et quoniam Menelaus *de sphaericis triangulis*[7]) in libro primo demonstravit[8]): „Si duo latera trianguli alicuius pariter accepta fuerint semicirculo minora, et reliquum latus productum

1) Menelai *sphaerica* I, def. 4. 2) Hs. hat *latus* korr. aus *rectus*.
3) Vgl. Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 16—17.
4) Hs. hat *sphaericisnis*, d. h. *sphaericis 3is*.
5) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 16. 6) Hs. hat *varie*.
7) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. 8) Menelai *sphaerica* I, 10.

faciet angu|lum exteriorem minori et opposito ad easdem partes maiorem", 27r igitur angulus ACB interior minor est angulo ABD exteriore. Atqui per hipothesim angulus ABC acutus est; igitur angulus ABD exterior recto maior est. Sed angulum minorem obtuso[1]) ABD contingit accipi vel obtusum aut rectum vel acutum, ergo angulus ACB erit vel obtusus aut rectus aut acutus.

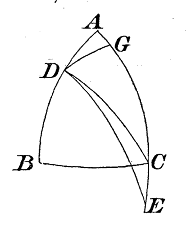
Quod si angulus ACB rectus extiterit, erit per propositionem XXI latus BC quadrante minus.

Si autem obtusus, protrahatur latus BC in partem C usque in E, et a signo A perpendicularis sectio describatur super segmentum BCE. Igitur per propositionem XX perpendicularis sectio AE cadit extra triangulum ABC et in partem acuti anguli ACE. Et quia in triangulo rectangulo ABE angulus AEB rectus est per constructionem, et per hipo|thesim angulus ABE 27v acutus — sed maiori angulo maius subtenditur latus[2]) —, igitur AB maius erit segmento AE. Sed AB quadrante minus est; ergo multo fortius AE quadrante minus est. Igitur per propositionem XXI BE segmentum quadrante inferius est; ergo BC ipsius pars multo magis exuperatur quadrante.



Postquam autem angulus ACB acutus fuerit, et angulus BAC aut rectus est: igitur per praecedentes hypotheses et per XXI propositionem[3]) BC quadrante vincitur; si angulus autem BAC acutus extiterit, ergo per propositionem X BC quadrante minus est.

Quod autem, angulo BAC obtuso posito reliquorumque ABC et ACB utroque acuto, latus BC obtuso subtensum angulo varium inveniatur, id est aut quadrans et quadrante vel maius aut minus, ita patebit: Sint duo quadrantes AB et AC acutum | comprehendentes angulum BAC, cui sub- 28r tendatur segmentum BC; et ex quadrante AB dematur ut libet BD sectio, descriptoque segmento DC igitur trianguli partilis BCD angulus CBD rectus, et utrumque duorum laterum BD et BC rectum angulum CBD comprehendentium quadrante minus est [Def. VIII]; ergo per propositionem tertiam segmentum CD est quadrante minus, et uterque duorum angulorum BCD et BDC recto minor; ergo iam patet, quod in triangulo ACD obtusum habente angulum ADC, [cuius] duorum reliquorum angulorum CAD et ACD uterque [recto] minor est, et utrumque duorum laterum AD et DC quadrante vincitur, erit latus AC[4]) obtuso subtensum angulo ADC quadrans.



Rursum ex D super AC segmentum perpendicularis DG sectio describatur; et protrahatur GC in partem C, ut sit tota GCE sectio quadrante minor, | descriptoque DE segmento erit ipsum quadrante minus per tertiam 28v primi huius.[5]) Ergo manifestum, quod in triangulo obtusum habente angulum ADE, [duos acutos reliquos angulos DAE et DEA,] et utrumque

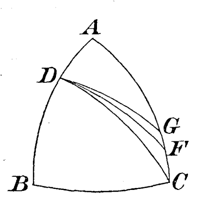
1) Am Rande hat Hand 2 geschrieben, aber wieder gestrichen: „Dubito an hoc argumentum sit sufficiens." 2) Menelai *sphaerica* I, 7.

3) Falscher Verweis. Richtig wäre: *per tertiam propositionem.*

4) Hs. hat AC korr. aus DC. 5) Hs. hat *huius* korr. aus *inferior.*

duorum laterum AD et DE quadrante [minus, erit latus AE obtuso subtensum angulo ADE quadrante] maius.

Ex angulo demum ADC obtuso subiiciamus sublatum esse rectum angulum ADG, et reliquum GDC segmento DF bifariam vel utcunque esse divisum; manifestum est iam, quod in triangulo obtusiangulo ADF duos acutos reliquos habente angulos FAD et DFA, et circa angulum obtusum utraque latera quadrante minora, erit latus reliquum AF obtuso subtensum angulo quadrante minus.



Ergo in triangulo obtusiangulo, habente utrumque laterum circa obtusum angulum quadrante minus, latus obtuso subtensum angulo variat. Nam aliquando quadrans est, aliquando quadrante maius, aliquando minus.

Igitur si in triangulo, et reliqua ut supra; quod demon[strare] o. |

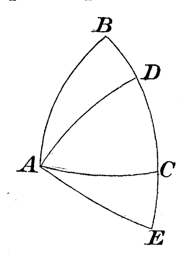
29r

Propositio XXV.

In triangulo unum possidente acutum angulum si duorum laterum quempiam ex reliquis continentium angulis unum quadrans fuerit, alterum quadrante minus, continget ut reliquum latus sit quadrans aliquando, nonnunquam quadrante minus, aliquando maius.[1])

Sit igitur triangulum isoschele ABC utrumque duorum laterum AB et BC possidens quadranti aequale, et angulum ABC acutum; patet igitur, quod in triangulo ABC latere AB posito quadrante, et AC minore quam sit quadrans, reliquum latus BC erit etiam quadrans. Quod autem AC sit quadrante minus, liquet ex eo, quoniam latus AC magnitudo est anguli ABC [Def. VIII], qui acutus supponebatur.

29v Auferatur ex quadrante BC sectio CD, et descripto segmento | AD ipsum quadrante minus est per tertiam propositionem[2]); et iterum constabit, quod in triangulo ABD unum acutum habente angulum ABD, et duorum laterum AB et AD unum ex reliquis angulis continentium unum quadranti aequale videlicet AB, alterum videlicet AD quadrante minus, et reliquum latus BD etiam quadrante superatur.



Protrahatur nunc quadrans BC in partem C usque in E, et sit CE sectio quadrante minor, et descripto segmento AE ipsum erit per eandem propositionem tertiam libri huius quadrante minus. Ergo in triangulo ABE acutum habente angulum ABE, et latus AB quadranti aequale, et latus AE quadrante minus, erit reliquum latus BE quadrante maius.

Igitur in triangulo unum possidente acutum angulum si duorum laterum, et reliqua ut supra; q. o. o. |

1) Zweideutig abgefaßt; nur der eine Fall wird bewiesen; vgl. unten; für den anderen Fall ist der Satz falsch, während das Richtige sich leicht durch I, 27 beweisen läßt.

2) Die Hs. hat nach *propositionem* die, wenn nicht etwa eine Lücke vorhanden ist, unverständlichen Worte: *circumferentiam sumpto.*

Correlarium.

30r

Inde nobis etiam declaratur, si reliquum latus etiam quadrante minus extiterit, velut BD in triangulo ABD, erit alter angulorum super eodem latere reliquo obtusus, velut est angulus ADB. Si autem reliquum latus quadrantem superaverit, ut BE latus trianguli ABE, erit alter angulus super eodem latere consistens acutus, velut est angulus AEB. Si reliquum latus quadrans fuerit, erit talis angulus rectus.

Propositio XXVI.

Si super triangulo unum habente acutum angulum duorum laterum, quae unum ex reliquis angulis comprehendunt, unum quidem quadrante fuerit maius, alterum eodem minus, accidet reliquum latus esse aliquando quadrantem, quandoque eo minus, nonnunquam maius.[1] |

30v

Sit triangulum ABC acutum habens angulum ABC, et latus AB quadrante maius, AC vero quadrante minus; et sit AC sectio ipsi BC segmento ad rectos angulos. Igitur per propositionem XXII BC segmentum quadrante maius existit.

Eodem autem segmento BC bifariam diviso super signo D, erit utraque sectionum BD et DC quadrante inferior, et per propositionem tertiam segmentum AD quadrante quoque superatur. Ergo in triangulo ABD habente angulum ABD acutum, et latus AB quadrante maius, et AD quadrante minus, erit reliquum latus BD quadrante quoque minus.

Rursus auferatur ex BC quadrans BE; descripto segmento AE erit per tertiam propositionem AE sectio quadrante minor. Igitur triangulum ABE habens angulum ABE acutum, et latus AB quadrante maius, et latus AE quadrante minus, possidet latus reliquum BE quadranti aequale.

Igitur si super triangulo unum habente acutum angulum, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare]. |

Correlarium.

31r

Manifestum hinc etiam erit, quod accidit alterum angulum super reliquo latere obtusum esse, sive reliquum latus quadrans extiterit seu quadrante maius aut quadrante minus, rectum autem tantum, quando reliquum latus quadrantem superaverit, et nonnunquam eundem angulum contingit acutum esse, velut patet producto BC segmento in partem C usque in F, et descripta[2]) sectione AF; angulus enim AFB acutus est per tertiam pro-

---

1) Zweideutig abgefaßt; nur der eine Fall wird bewiesen; vgl. unten; für den anderen Fall ist der Satz falsch. Die gegenwärtige zweideutige Abfassung hat die falsche Anwendung von I, 26 zum Beweis des falschen Satzes I, 28 verschuldet. 2) Hs. hat *descripta* korr. aus *descriptam*.

positionem, quoniam utrumque duorum segmentorum AC, CF, quae rectum continent angulum ACF, quadrante minus est.

Quando autem angulus alter super reliquo latere constitutus acutus extiterit, reliquum latus excedet utrumque datorum laterum, ut BF maius existit AB latere.

Propositio XXVII. |

31v In triangulo unum acutum possidente angulum si duorum laterum, unum ex reliquis angulis continentium, unum fuerit quadrans, alterum quadrante amplius, erit reliquum latus quadrante minus, et alter angulus super eodem latere reliquo obtusus, et reliquus acutus.[1])

Esto triangulus ABC acutum habens angulum ABC, et fuerit AC latus quadrans, AB vero latus quadrante maius. Dico, quod reliquum latus BC quadrante est minus; et angulus ACB obtusus erit, reliquus angulus BAC acutus.

Ergo duo latera AB et BC producantur in partes A et C, quousque concurrant super D; atque a signo A super segmentum BCD describatur perpendicularis sectio AE. Et quia angulus AEC rectus et AC segmentum quadrans est, [igitur per propositionem secundam et EC segmentum quadrans est;] ergo reliquum segmentum BC quadrante minus. Et quia angulus ACE acutus est; nam eius magnitudo, 32r videlicet segmentum AE, qua|drante vincitur [Def. VIII], quoniam AE segmentum minus est sectione AD, quae quadrante minor est — maiori enim angulo maius subtenditur latus[2]) —, acutus igitur est ACE angulus; ergo de duobus rectis reliquus ACB obtusus est. Et quoniam in triangulo ABC ACB angulus obtusus est, et latus AC quadrans, BC vero latus quadrante minus, erit per XV propositionem angulus BAC acutus.

Igitur in triangulo unum acutum, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Propositio XXVIII.

In triangulo unum acutum possidente angulum si duorum laterum, quae ex reliquis unum comprehendunt angulum, utrumque fuerit quadrante amplius, accidet reliquum latus variari, similiter et angulum alterum super eodem latere diversum fieri.[3]) |

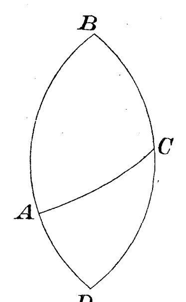
32v Sit ergo triangulus ABC habens angulum ABC acutum, et utrumque duorum laterum AB et AC quadrante maius. Dico, latus[4]) reliquum BC magnitudine variari, et id quandoque quadrantem esse, aliquando eo minus, nonnunquam maius. Simili modo dico et angulum ACB diversum reperiri,

---

1) Zweideutig abgefaßt; nur der eine Fall wird bewiesen; vgl. unten; der andere Fall existiert nicht. 2) Menelai *sphaerica* I, 7.

3) Dieser Satz ist falsch und läßt sich nicht durch irgendwelche Korrektur berichtigen. Einen direkten Gegenbeweis des gegenwärtigen falschen Satzes liefert I, 67. 4) Hs. hat *latus* korr. aus *datum*.

id est vel rectum vel acutum aut obtusum. Utraque igitur latera AB et BC producantur, usquequo concurrant super D. Et quoniam in triangulo ACD angulus ADC acutus est, et latus AD quadrante minus, AC vero latus quadrante amplius, erit per propositionem XXVI[1]) segmentum DC aut quadrans aut quadrante vel minus aut maius. Idem igitur accidet lateri BC. Et per correlarium eiusdem propositionis XXVI[1]) angulus ACD quandoque rectus est, quandoque acutus, aliquando obtusus. Similiter ergo variari accidet reliquo angulo ACB.



Igitur in triangulo unum acutum possidente angulum si duorum laterum, | quae unum ex reliquis complectuntur angulis, utrumque fuerit quadrante amplius, et reliqua ut supra; q. o. o.

33r

Propositio XXIX.

In triangulo sphaerico unum obtusum habente angulum si duorum laterum, unum ex reliquis continentium angulis, utrumque quadrante vincitur, erit reliquum latus quadrante quoque minus, et uterque reliquorum angulorum acutus.

Esto triangulus ABC habens angulum ABC obtusum, ac utrumque duorum laterum AC et CB quadrante inferius. Dico, quod reliquum latus AB sit quadrante minus, et uterque reliquorum angulorum BAC et ACB recto minor.

Quoniam in triangulo ABC angulus ABC non est minor recto, et | utrumque laterum AC et CB angulum ACB continentium quadrante minus, igitur, velut Menelaus in libro primo *de sphaericis triangulis*[2]) demonstravit, et reliquum latus AB quadrante minus est, et uterque reliquorum angulorum BAC et ACB acutus est. q. o. de[monstrare].

33v

Propositio XXX.

Si sphaericus triangulus unum possidet obtusum angulum, et duorum eius laterum, quae unum ex reliquis angulis comprehendunt, alterum quidem quadrans fuerit, alterum autem quadrante minus, erit latus reliquum quadrante minus, et reliquorum angulorum uterque acutus.[3])

---

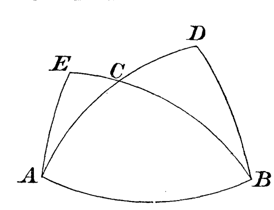
1) Das, was in diesem Satz bewiesen wurde, paßt nicht auf Dreieck ACD. Man hätte hier anwenden sollen einen in diesem Werke fehlenden, aber durch I, 29 (oder Menelaos I, 22) beweisbaren Satz: Wenn $\angle B < 90^\circ$, $\smile AC > 90^\circ$, $\smile AB < 90^\circ$, so ist $\smile BC > 90^\circ$, $\angle C < 90^\circ$, $\angle A > 90^\circ$. — Die falsche Anwendung von I, 26 bewirkt, daß der gegenwärtige Satz des weiteren falsch wird. Daß I, 26 falsch angewendet wurde, kommt daher, daß dieser Satz unklar (zweideutig) abgefaßt ist; vgl. S. 21, Note 1 oben.

2) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Vgl. Menelai *sphaerica* I, 22.

3) Zweideutig abgefaßt; nur der eine Fall wird bewiesen; vgl. unten. Der andere Fall existiert nicht.

Esto triangulus ABC habens angulum ACB obtusum, et latus AB quadrantem, AC[1]) vero quadrante minus. Dico, quod latus reliquum BC[2]) 34ʳ sit quadrante inferius, et reliquorum | angulorum ABC et BAC uterque acutus.

Igitur ex signo A super segmentum BC describatur perpendicularis AE. Et quoniam angulus ACE acutus est, et AC segmentum quadrante minus, ergo perpendicularis AE cadit extra triangulum ABC. Et quoniam in triangulo ABE quadrans AB est, et AEB angulus rectus per constructionem, igitur per propositionem secundam primi BCE circumferentia orbis magni quadrans est, ergo BC latus quadrante minus erit. Et quia in triangulo ACE angulus AEC rectus est, et angulus ACE acutus, et sub maiore angulo latus maius subtenditur[3]), ergo latus AC maius est latere AE; sed latus AC quadrante minus est per hipothesim; igitur multo fortius AE latus quadrante superatur; at AE magnitudo est anguli ABC [Def. VIII]; ergo angulus ABC acutus est. Pari modo demonstrabimus, angulum BAC esse acutum. Producatur itaque 34ᵛ latus | AC in partem C usque in D; et super A polo iuxta intervallum AB quadrantis describatur BD sectio, secans ACD segmentum super D signo, ⟨et a signo B sectionis BC quadrante minoris deducta⟩.[4]) Et quoniam in triangulo BCD angulus BDC rectus est, BCD autem angulus recto minor, et maiori angulo maius subtenditur latus[5]), igitur BC segmentum exuperat[6]) BD sectionem; at BC segmentum per hipothesim quadrante minus est; igitur BD sectio quadrante multo fortius inferior erit. Est autem BD sectio per diffinitionem anguli [VIII] magnitudo anguli BAC; ergo angulus BAC[7]) recto minor est.



Ergo si sphaericus triangulus, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Propositio XXXI.

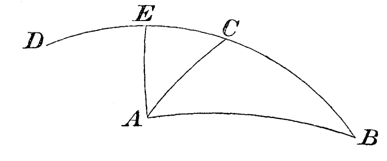
35ʳ Si triangulus obtusiangulus duorum laterum, | unum ex reliquis angulis comprehendentium, possidet alterum quadrante maius, alterum quadrante minus, erit[8]) reliquum latus varium, aut enim quadrans, aut quadrante inferius, aut quadrante maius, et angulus alter super eodem reliquo latere acutus.[9])

Sit triangulus ABC habens angulum ACB obtusum, et AC latus quadrante minus, latus vero AB quadrante maius. Dico, quod reliquum latus BC variabitur, aut enim quadrans est, aut quadrante minus, aut quadrante maius, et quod angulus ABC sit acutus.

---

1) Hs. hat BC. 2) Hs. hat AC. 3) Menelai *sphaerica* I, 7.
4) Die Worte in ⟨ ⟩ bilden vielleicht einen vom Autor wieder verlassenen Anfang und wären somit zu streichen. 5) Menelai *sphaerica* I, 7.
6) Hs. hat *exuperat* korr. aus *exsuperat*.
7) Die Worte *ergo angulus BAC* bis. 8) Hs. hat *et*.
9) Zweideutig abgefaßt; nur der eine Fall wird unten behandelt; für den anderen ist der Satz falsch.

Producatur ergo latus BC in partem[1]) C usque in D. A signo igitur A super BCD segmentum describatur sectio perpendicularis AE. Et quoniam in triangulo ACE angulus AEC per constructionem rectus est, et | ACE 35v acutus; et quia sub maiori angulo maius subtenditur latus[2]), igitur segmentum AC excedit sectionem AE. Sed AC segmentum quadrante minus est, igitur multo fortius AE sectio. At quoniam in triangulo ABE[3]) latus AB per hipothesim quadrantem superat, AE vero latus quadrante vincitur, et angulus AEB per constructionem rectus, ergo per propositionem XXII latus BE quadrante maius est, et angulus ABE acutus.



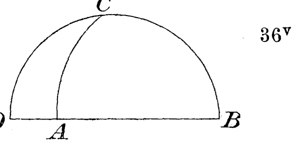
Intelligamus BE segmentum, bifariam secari super C signo — id enim contigere potest —; erit utraque sectionum BC, CE quadrante minor; nam segmentum BE semicirculo inferius est. Erit itaque per tertiam propositionem angulus ACE acutus, et de duobus rectis reliquus ACB obtusus. Et sive BC sectionem quadrantem posuerimus sive quadrante maiorem, semper per eandem tertiam pro|positionem probabimus 36r angulum ACB esse obtusum, AC latere minore manente quam sit quadrans.

Igitur si triangulus obtusiangulus, et reliqua ut supra; quod fuit ostendendum.

Propositio XXXII.

In triangulo obtusiangulo si duorum laterum, quae unum ex reliquis complectuntur angulis, alterum quadrans fuerit, alterum quadrante longius, erit latus reliquum specie varium, et reliquorum duorum angulorum uterque ambiguus.[4])

Esto triangulus ABC possidens angulum ACB obtusum, et AC latus quadranti aequale, AB autem latus quadrante maius. Dico, quod BC reliquum latus specie ambiguum est; existat et reliquorum angulorum BAC et ABC uterque | 36v anceps genere.



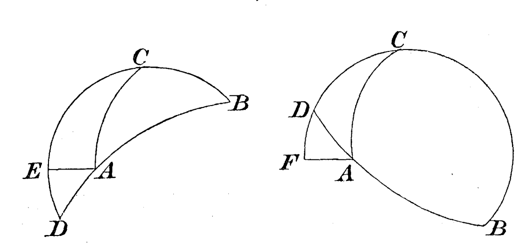
Duo itaque latera AB, BC in partes A, C producantur ad concursum in signo D ⟨latus reliquum est⟩.[5]) Quod si CD segmentum quadrans fuerit, ergo C signum polus erit semicirculi BAD[6]); quare segmentum BC quadrans est, et uterque duorum angulorum BAC et ABC rectus.[7])

Rursus segmentum CD sit quadrante longius, et ex eo auferatur quadrans CE, et descripta magni orbis peripheria AE erit angulus CAE[8])

---

1) Hs. hat *partes*. 2) Menelai *sphaerica* I, 7.
3) Nur wenn Winkel $B < 90^{\circ}$ ist, existiert Dreieck ABE; der Beweis ist also nur in diesem Fall gültig. 4) Zweideutig abgefaßt.
5) Die Worte in ⟨ ⟩ geben an sich keine Bedeutung und sind offenbar entbehrlich. Ob sie durch Mißverständnis hierher gekommen sind, oder ob etwas herausgefallen ist, läßt sich kaum entscheiden.
6) Vgl. Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 16—17. 7) Ibid. I, 15.
8) Hs. hat BAE.

rectus; quare partilis angulus[1]) BAC recto minor. Est autem AE peripheria quadrante minor, quia AD segmentum per hipothesim quadrante minus est, et AC quadrans[2]) ⟨erit AE circumferentia quadrante minor⟩.[3]) Est autem DE quadrante minor; ergo per propositionem tertiam primi huius angulus ADE[4]) acutus est; quare et suus | aequalis ABC.



Praeterea, posito segmento CD minore quam sit quadrans, et sit CDF quadrans, descriptaque AF circumferentia, et quia C signum polus est circumferentiae AF, igitur angulus CAF rectus est; quare partilis angulus CAD recto minor; ergo de duobus rectis angulis reliquus angulus BAC obtusus. Et quoniam in partili triangulo [AFD] angulus AFD rectus est, et singula latera quadrante minora, igitur per tertiam primi angulus ADF acutus est; ergo et reliquus ADC seu suus aequalis ABC obtusus.

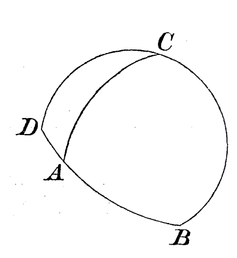
In triangulo igitur obtusiangulo si duorum laterum, quae unum ex reliquis complectuntur angulis etc. ut supra; q. o. o.

Correlarium.

Hinc patet, quando BC quadrans fuerit, duorum angulorum BAC et ABC utrumque rectum esse. Si vero BC latus quadrante minus extiterit, 37ᵛ utrumque duorum angulorum BAC et ABC acutum esse. Si | autem BC quadrante maius existat, erit eorundem angulorum uterque obtusus.

Propositio XXXIII.

In triangulo obtusiangulo si duorum laterum, ex reliquis unum continentium angulis, utrumque quadrante maius existat, erit latus reliquum specie varium, et anguli reliqui genere diversificantur.



Sit ergo triangulus ABC obtusum habens angulum ACB, et utrumque laterum AB et AC quadrante maius. Dico, quod latus reliquum variatur; nam ipsum aliquando quadrans est, aliquando quadrante minus, nonnunquam quadrante maius, et similiter reliqui anguli diversificantur.

Ergo duo latera AB et BC protrahantur in partes A, C, usquequo concurrant super D signo. 38 Et quia in trian|gulo ACD angulus ACD acutus, et duorum laterum unum ex reliquis angulis continentium alterum AD

1) Hs. hat *angulis*.

2) Die sonderbare Art des Beweises an dieser Stelle läßt uns vielleicht hier eine Lücke vermuten.

3) Die Worte in ⟨ ⟩, welche eine logische Dittographie bilden, sind zu streichen, wenn nicht etwa eine Lücke vorhanden ist.

4) Hs. hat ADB.

quadrante minus est, alterum AC quadrante maius, igitur per XXVI continget, ut latus DC reliquum sit aliquando quadrans, et quadrante quandoque minus, et quandoque maius. Idem quoque accidere lateri BC necesse est; et per correlarium eiusdem propositionis XXVI liquet, angulum ADC diversificari, igitur et suum aequalem ABC. Et pro varia habitudine angulorum ABC et ACB accidet et reliquum angulum BAC varium esse.[1])

Igitur in triangulo obtusiangulo, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Propositio XXXIV.[2])

Si triangulus unum latus habuerit quadrante minus, duorumque angulorum super eodem latere consistentium alterum rectum alterum acutum, erit reliquorum laterum | quadrante (38v) minus utrumque, et reliquus angulus acutus.

Sit triangulus ABC latus habens BC quadrante minus, et angulum ABC rectum, ACB vero angulum acutum. Dico, quod utrumque reliquorum laterum AB et AC quadrante minus est, et angulus BAC acutus.

Quod si fuerit possibile, sit AC latus quadrans. Ergo per propositionem secundam angulus ACB rectus erit, quod non supponitur.

Rursus latus AC, si possibile fuerit, sit quadrante maius. Igitur per propositionem XXII angulus ACB erit obtusus; at iam supponebatur acutus; igitur latus AC quadrante minus est.

Et quia sub maiore angulo latus subtenditur maius[3]), ergo AB latus acuto angulo ACB subtensum minus erit latere AC; at AC latus, ut ostensum fuit, quadrante minus; | ergo multo fortius AB latus quadrante (39r) inferius erit.

Et quia utrumque laterum AB et BC rectum angulum ABC continentium quadrante vincitur, ergo et reliquus angulus BAC per propositionem tertiam acutus est.

Igitur si triangulus unum latus habuerit quadrante minus, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Propositio XXXV.

Si triangulus unum latus habuerit quadrante minus, duorumque angulorum super eodem consistentium latere alterum rectum alterum obtusum, erit utrumque reliquorum laterum quadrante maius, et reliquus angulus acutus.

Sit triangulus ABC latus habens BC quadrante minus, et angulum ABC rectum, et ACB obtusum. Dico, quod utrumque duorum laterum reliquorum AB et AC qua|drantem excedit, et angulus BAC acutus est. (39v)

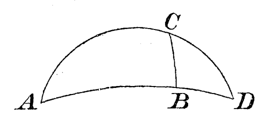
---

1) Woran der Verfasser hier gedacht hat, ist unsicher. In den vorangehenden Sätzen oder in den älteren dem Verfasser bekannten Schriften findet man keinen Beleg zur Stütze seiner Schlußfolgerung.

2) Am Rande schreibt Hand 2: „Duo anguli cum latere adiacente."

3) Menelai *sphaerica* I, 7.

Producantur itaque duo latera AB et AC in partes B, C, quousque concurrant super signo D. Et quia in triangulo BCD latus BC quadrante minus est, et angulus CBD rectus, angulus vero BCD acutus — nam et reliquus ACB obtusus subiicitur —, ergo per praecedentem propositionem utrumque duorum laterum reliquorum BD et DC quadrante superatur, et angulus BDC acutus est. Ergo [de] duobus semicirculis ABD et ACD reliquorum segmentorum AB et AC utrumque quadrante maius est. Est autem angulus BAC aequalis angulo BDC, qui, ut probatum fuit, acutus est. Ergo et suus aequalis BAC acutus erit.

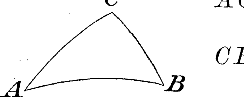


Igitur si triangulus unum latus habuerit, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Propositio XXXVI. |

40r Si triangulus unum latus habuerit quadrante minus, et utrumque angulorum super eodem latere consistentium acutum, erit utrumque reliquorum laterum quadrante minus, et angulus reliquus vel acutus vel rectus aut obtusus.

Sit triangulus ABC latus AB habens quadrante minus et duorum angulorum ABC et BAC [utrumque] acutum. Dico, quod utrumque duorum laterum AC et BC quadrante minus est, et angulus ACB aut rectus aut acutus vel obtusus.

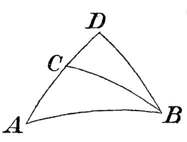


Si autem non, erit alterum duorum laterum AC et CB vel quadrans aut quadrante maius.

Sit ergo AC quadrans, si possibile id fuerit. Et quia in triangulo ABC quadrans AC et segmentum AB quadrante minus acutum comprehendunt angulum BAC, igitur per propositionem XI angulus ABC obtusus est, quod non supponitur.

40v Rursus AC sit quadrante longius. Ergo per propositio|nem XII angulus ABC obtusus erit, quod est contra hypothesim; subiectum enim fuit angulum ABC esse acutum.

Pari quoque ratione si subiecerimus latus BC aut quadrantem aut quadrante maius, inferemus [?] per easdem[1]) propositiones XI et XII, angulum BAC esse obtusum, qui supponebatur acutus. Ergo utrumque laterum AC, CB quadrante brevius erit.



Et si BC sectio super AC segmentum fuerit perpendicularis, ergo angulus ACB rectus est. Si autem non, ergo ducatur perpendicularis sectio BD super segmentum AC. Quod si segmentum BD ceciderit intra triangulum ABC, igitur per propositionem XX angulus BCA erit acutus. Quod si perpendicularis sectio BD ceciderit extra triangulum ABC, igitur et AB segmentum quadrante 41r minus est et recto | angulo ADB subtenditur; ergo multo fortius segmentum BD acuto angulo CAB subtensum quadrante minus erit[2]); igitur

1) Hs. hat *eosdem*. 2) Menelai *sphaerica* I, 7.

per eandem propositionem XX angulus BCD acutus erit, ergo et reliquus BCA obtusus.

Igitur si triangulus unum latus habens quadrante minus, et reliqua ut supra; q. o. de[monstrare].

Propositio XXXVII.

Si super idem dati trianguli latus, quod quadrante minus est, duo consistant obtusi anguli, erit utrumque reliquorum laterum quadrante maius, et reliquo angulo contingit esse vario [!].

Sit triangulus ABC habens BC latus quadrante minus, et utrumque duorum angulorum ABC et ACB obtusum. Dico, quod duorum laterum AB et AC utrumque qua|drantem superat, atque[1]) angulus BAC reliquus aliquando rectus est, quandoque acutus, nonnunquam obtusus. 41v

⟨Sit ergo triangulus ABC possidens BC latus quadrante minus, et utrumque duorum angulorum ABC et ACB recto maiorem. Dico, quod utrumque duorum laterum AB et AC quadrantem exuperat.⟩[2])

Producantur ergo duo latera AB et AC in partes B, C, quousque concurrant super D signo. Et quoniam per hypothesim uterque duorum angulorum ABC et ACB obtusus est, igitur de duobus rectis[3]) [reliquorum] uterque duorum angulorum BCD et CBD acutus est. Et quia per hipothesim BC segmentum quadrante minus est, ergo per praecedentem propositionem utrumque duorum segmentorum BD et CD quadrante est inferius; igitur de duobus semicirculis reliquorum segmentorum AB et AC utrumque quadrante maius est. Et quia per eandem propositionem XXXVI contingit angulum BDC va|rium esse, et angulus BAC aequalis est angulo BDC[4]), ergo et angulus BAC variabitur. 42r

Igitur si super idem dati trianguli latus, quod quadrante minus est, duo consistant obtusi anguli, et reliqua ut supra; q. o. o.

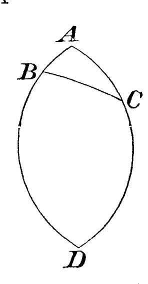
Propositio XXXVIII.

Si triangulus datum unum latus habuerit quadrante minus, et duorum angulorum super eodem latere consistentium alterum quidem obtusum, alterum vero acutum, erit duorum reliquorum laterum incerti generis utrumque, et similiter reliquus angulus generis dubii.[5])

Sit triangulus ABC datum latus BC quadrante minus habens, et angulum ABC obtusum, angulum vero BCA acutum. Dico, quod utrique reliquorum laterum AB et AC contingit sub varia magnitudine reperiri, | nam aliquando quadrantem, aliquando quadrante minus, nonnunquam qua- 42v

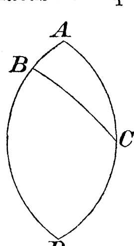
1) Hs. hat *etque*.
2) Das Stück in ⟨ ⟩ ist offenbar eine ganz überflüssige Wiederholung des Vorhergehenden. 3) Hs. hat *reliquis*. 4) Menelai *sphaerica* I, def. 4.
5) Der letzte Teil des Satzes ist falsch; vgl. unten.

drante maius. Pari ratione contingit angulo BAC dubium esse; ipse namque potest esse vel rectus vel obtusus aut acutus.



Producantur itaque duo latera AB et AC in partes B, C, quousque concurrant super D signo; et ponamus AC latus quadrante inferius; erit per propositionem XXIX reliquum latus AB etiam quadrante minus, et angulus BAC acutus. Ergo iam datus obiter erit triangulus BCD, ex hypothesi latus BC quadrante minus habens, et super eodem[1]) latere BC consistentibus duobus angulis, BCD quidem obtuso CBD vero acuto, et utrumque laterum BD et CD quadrante maius. Rursus per propositionem XVI in BCD triangulo contingit, ut angulus BDC sit aliquando acutus vel obtusus aut rectus[2]), quare eadem etiam diversitas aequali angulo BAC accidet.

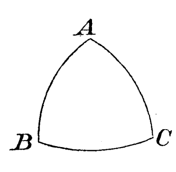
43r Quod si posuerimus AC latus | quadrantem, erit per propositionem XXX latus AB quadrante minus et angulus BAC acutus.[3]) Igitur[4]) in triangulo ABC obtusus angulus ABC comprehenditur duobus lateribus utrisque quadrante minoribus [, et reliquum latus AC quadrans est]. At in triangulo BCD obtusus angulus BCD continebitur latere BC quadrante minore et quadrante CD, et reliquum latus BD quadrantem excedit.



Igitur si triangulus datum unum latus habuerit quadrante inferius, et duorum angulorum super dato latere consistentium alterum quidem obtusum, alterum vero acutum, erit, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XXXIX.

Si triangulus datum latus habuerit quadranti aequale, et super eodem latere duorum consistentium angulorum unum 43v quidem rectum, alterum vero acutum, erit latus recto sub|tensum angulo etiam quadrans, et reliquus angulus rectus, et latus reliquum acuto subtensum angulo quadrante minus.



Esto triangulus ABC latus habens AC quadranti aequale, et angulum ACB rectum, BAC vero acutum. Dico, quod latus AB quadrans sit, et BC latus quadrante minus, et angulus ABC quoque rectus.

Et quia AC quadrans est atque ad angulos rectos segmento BC, igitur signum A polus est segmenti BC.[5]) A polo autem ad circumferentiam circuli venientia magnorum orbium

1) Hs. hat *eadem*.

2) Falsche Anwendung vom Satz 16, wo eben bewiesen wird, daß in dem gegenwärtigen Dreieck BCD der Winkel D nur dann $\geq 90^\circ$ sein kann, wenn Winkel $B > 90^\circ$ ist. Winkel BAC muß also $< 90^\circ$ sein. — Einen direkten Gegenbeweis des gegenwärtigen falschen Teiles des Satzes 38 liefert, was die Möglichkeit eines restierenden rechten Winkels betrifft, Satz 47.

3) Also ist Winkel A immer $< 90^\circ$ und somit der letzte Teil des Satzes falsch.

4) Das folgende Stück ist recht ungeschickt abgefaßt, weil der Verfasser von den stumpfen Winkeln ABC und BCD statt von der Seite BC herausgeht.

5) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13 & 16 inv.

segmenta cuncta sunt quadrantes[1]); igitur AB segmentum quadrans est. Et quia [per] diffinitionem [VIII] BC sectio magnitudo est anguli BAC, et BAC angulus per hypothesim acutus est, ergo segmentum BC quadrante minus est. Et quia A polus est segmenti BC, ergo et angulus ABC rectus est.[2])

Igitur si triangulus datum | latus habuerit quadranti aequale, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare]. 44

Propositio XL.

Si triangulus datum habuerit latus aequale quadranti, et duorum angulorum super eodem latere consistentium[3]) alterum quidem rectum, alterum vero recto maiorem, erit et reliquorum laterum alterum recto subtensum angulo quadrans, alterum vero, quod obtuso subtenditur angulo, quadrante maius, et reliquus angulus rectus.

Esto triangulus ABC latus habens AC quadranti aequale, et angulum ACB rectum, BAC vero angulum recto maiorem. Dico, quod latus AB quadrans est, BC latus quadrante maius, et reliquus angulus ABC | quoque rectus. 44ᵛ

Est etenim signum A polus segmenti BC[4]); igitur et AB quadrans est[5]) et ABC angulus rectus.[6]) Et quia BC segmentum magnitudo est anguli BAC [Def. VIII], at per hipothesim angulus BAC obtusus est, igitur BC latus quadrantem excedit.

Ergo si triangulus, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XLI.

Si triangulus datum habuerit latus aequale quadranti, et duorum angulorum super eodem latere consistentium utrumque recto minorem, erit utrumque reliquorum laterum quadrante minus, et reliquus angulus obtusus.

Sit triangulus ABC latus habens AC quadrantem, et utrumque duorum angulorum BAC et BCA recto minorem. Dico, quod utrumque duorum laterum AB et BC quadrante | minus est, et angulus ABC ab eisdem comprehensus obtusus. 45ʳ

Ipsi itaque quadranti AC ad rectos angulos sit CD segmentum, quod extra triangulum ABC necessario cadit; nam per constructionem angulus ACD rectus est, ACB vero angulus per hipothesim recto minor. Protrahatur ergo latus AB in partem B, quousque concurrat cum CD segmento super signo D. Manifestum igitur est, AB latus quadrante minus

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 16. 2) Ibid. I, 15.
3) Nach *consistentium* schrieb 1. Hand die Worte: *utrumque recto minorum, id est,* die die 2. Hand, weil sie falsch sind, dann durch Einklammern wieder annullierte. 4) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13 & 16 inv.
5) Ibid. I, 16. 6) Ibid. I, 15.

esse, quia A polus est segmenti CD[1]), et ABD sectio quadrans.[2]) Et quoniam CD sectio est magnitudo acuti anguli BAC [Def. VIII], igitur CD segmentum quadrante minus est. Liquet autem BD sectionem esse quadrante[3]) minorem; et angulus BDC rectus est; igitur per propositionem tertiam segmentum BC quadrante minus est, et angulus CBD acutus; ergo de duobus rectis reliquus ABC angulus obtusus est.

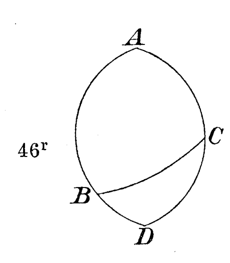
Igitur si triangulus datum habuerit latus aequale quadranti, et reliqua ut supra; q. de[monstrare] o. |

45v

Propositio XLII.

Si triangulus datum habuerit latus aequale quadranti, et duorum angulorum super dato latere utrumque recto maiorem, erit utrumque reliquorum laterum quadrante maius, et angulus reliquus recto maior.

Sit in triangulo ABC latus BC quadrans, et duorum angulorum ABC et ACB uterque obtusus. Dico, quod duorum laterum AB et AC utrumque sit quadrante maius, et angulus BAC obtusus.



Producantur itaque duo latera AB et AC in partes B, C, quousque concurrant super D. Et quoniam in triangulo BDC latus BC quadrans est, et duorum angulorum BCD et CBD uterque acutus, igitur per propositionem quadragesimam primam utrumque duorum segmentorum BD et CD quadrante minus est, et angulus BDC obtu|sus. Ergo de duobus semicirculis ABD et ACD reliqua segmenta AB et AC utraque sunt quadrante maiora. Et quia angulus BAC aequalis est angulo BDC[4]), qui obtusus iam ostendebatur, ergo et angulus BAC obtusus est.

46r

Igitur si triangulus datum habuerit latus, et reliqua ut supra, quod erat demon[strandum].[5])

Propositio XLIII.

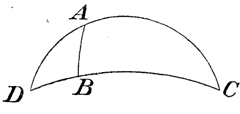
Si triangulus datum latus habuerit quadrante maius, et duorum angulorum super eodem latere consistentium unum quidem rectum, alterum vero acutum, erit latus sub recto subtensum angulo quadrante maius, et reliquum latus, quod sub acuto tenditur angulo, quadrante minus, et reliquus angulus obtusus.

Sit triangulus ABC latus BC habens quadrante[6]) maius, et angulum ABC rectum, | ACB vero angulum acutum. Dico, quod latus AC quadrante maius est, et latus AB quadrante minus, et angulus BAC obtusus.

46v

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13 & 16 inv. 2) Ibid. I, 16.
3) Hs. hat *quadrante* korr. aus *quadrantem.* 4) Menelai *sphaerica* I, def. 4.
5) Am Rande fügt Hand 2 hinzu: „Deest propositio seu casus, quando latus est quadrans, et unus adiacentium angulorum minor, alter maior recto. Est autem alterum latus maius quadrante, tertium minus, et angulus tertius acutus.“
6) Hs. hat *quadrantem.*

Protrahantur ergo duo latera AC et BC in partes A, B, donec concurrant super signo D. Et quia in triangulo ABD angulus ABD rectus est, et ADB angulus acutus, et BD latus quadrante minus, ergo per propositionem XXXIV utrumque duorum segmentorum AB et AD quadrante minus est, et angulus BAD acutus. Igitur segmentum AC quadrantem excedit, et angulus BAC obtusus est.



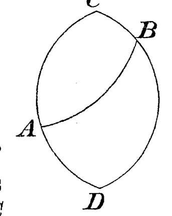
Ergo si triangulus datum habuerit latus quadrante maius, et reliqua ut supra; quod demonstrasse oportuit.

Propositio XLIV.

Si triangulus datum latus habuerit quadrante maius, et duorum angulorum super eodem latere consystentium [!] alterum | rectum alterum obtusum, erit latus recto subtensum angulo quadrante minus, et reliquum latus, quod obtuso subtenditur angulo, quadrante maius, et angulus reliquus obtusus.

47r

Sit itaque triangulus ABC datum habens latus AC quadrante maius, et angulum BAC rectum, angulum vero ACB obtusum. Dico, quod latus AB quadrantem superat, latus vero BC quadrante inferius est, et angulus ABC recto maior.



Protrahantur itaque BC et AC latera in partes A, B, quousque concurrant[1]) super D signo. Triangulus itaque ABD latus habet[2]) AD quadrante minus, et super eo angulum quidem BAD rectum, angulum vero ADB obtusum. Igitur per propositionem XXXV utrumque segmentorum AB et BD quadrantem superat, et angulus | ABD acutus est. Ergo de semicirculo DBC reliquum segmentum BC quadrante minus est, et de duobus rectis reliquus angulus ABC obtusus.

47v

Igitur si triangulus datum latus habuerit quadrante maius, et duorum angulorum super eodem latere consistentium alterum rectum, alterum obtusum, erit latus recto subtensum angulo quadrante inferius, et latus, quod obtuso subtenditur angulo, quadrante superius, et angulus reliquus obtusus; quod erat demonstrandum.

Propositio XLV.

Si in triangulo latus aliquod quadrantem superat, et angulorum super eodem latere consistentium uterque recto minor existat, erit duorum laterum reliquorum utrumque genere anceps, et reliquus angulus obtusus genere.[3])

Sit triangulus ABC latus AC quadrante maius habens, et utrumque duorum | angulorum BAC et ACB recto minorem. Dico, quod utrumque

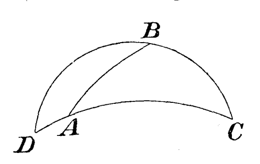
48r

---

1) Hs. hat *concurrat.* 2) Hs. hat *habens.*

3) *Obtusus genere:* so die Handschrift. Der nachfolgende Beweis zeigt, daß *obtusus* mit *varius, dubius, anceps* oder *incertus* zu ersetzen ist. Dieser letzte Teil des Satzes ist aber falsch (vgl. unten), und der restierende Winkel ist wirklich stumpf.

duorum laterum AB et BC contingit esse magnitudine dubium, ita ut quandoque sit quadrans, et quadrante nonnunquam maius, aliquando minus. Et similiter angulus ABC rectus est aliquando vel acutus aut obtusus.



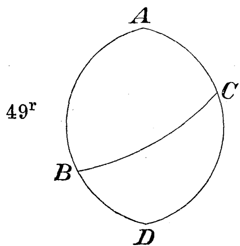
Protrahantur ergo duo latera AC et BC in partes A, B, quousque concurrant super D signo. Et quia BAC angulus per hipothesim acutus est, igitur de duobus rectis reliquus BAD obtusus. Est autem ADB angulus acutus, quoniam aequalis acuto — per hypothesim — angulo ACB[1]), et segmentum AD quadrante minus. Ergo per propositionem XXXVIII utrumque duorum segmentorum AB, BD magnitudinis existit dubiae, quare et BC segmentum existit incertae magnitudinis. Et quoniam per eandem propositionem XXXVIII angulus ABD dubiae quantitatis existit[2]), ergo de 48v duobus rectis reliquus angulus ABC incertae magni|tudinis erit.

Igitur si in triangulo latus aliquod quadrantem superat, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XLVI.

Si in triangulo quopiam latus unum quadrante maius existat, et duorum angulorum super eodem latere consistentium obtusus uterque, erit reliquorum laterum incerti generis utrumque, et angulus ab eisdem lateribus comprehensus genere dubius.

Sit[3]) triangulus ABC habens latus BC quadrante maius, et utrumque duorum angulorum ABC et ACB recto maiorem. Dico, quod utrumque duorum laterum AB et AC sit magnitudine dubium; et quod similiter angulus BAC magnitudinis existat incertae.



Protrahantur ergo duo latera AB et AC in partes B, C, quousque concurrant super D signo. Ergo in 49r trian|gulo BCD latus BC ex hipothesi quadrantem excedit, et uterque duorum angulorum BCD et CBD super eodem latere BC consistentium acutus est. Ergo per propositionem XLV utrumque duorum segmentorum BD et CD magnitudine incertum est, atque angulus BDC dubius[4]); quare de duobus semicirculis ABD et ACD reliqua segmenta AB et AC magnitudine dubia sunt; et quia angulus BAC aequalis est angulo BDC[5]) — est autem BDC angulus dubius, ut ostensum fuit —, ergo et angulus BAC magnitudinis erit incertae.

Igitur si in triangulo quopiam, et reliqua ut supra; q. o. o.[6])

---

1) Menelai *sphaerica* I, def. 4.

2) Da der betreffende Teil vom Satze 38 falsch ist (vgl. oben S. 30), so wird auch dieser letzte Teil vom Satze 45 falsch. Winkel ABD ist spitz, der Supplementwinkel ABC also stumpf. — Einen Gegenbeweis des gegenwärtigen falschen Teiles leistet, was die Möglichkeit eines restierenden rechten Winkels betrifft, Satz 50. 3) Hs. hat *Si*.

4) Da der letzte Teil des hier benutzten Satzes I, 45 falsch ist, so ist auch der letzte Teil der gegenwärtigen Schlußfolgerung falsch.

5) Menelai *sphaerica* I, def. 4.

6) Am Rande fügt Hand 2 hinzu: „Adde propositionem seu casum: si latus quadrante maius, et angulorum adhaerentium unus acutus alter obtusus, erit alterum latus minus quadrante, tertium maius, et angulus varius."

Propositio XLVII.

Si in triangulo duorum angulorum alter rectus alter acutus fuerit, et latus recto subtensum angulo quadrante minus, | erit utrumque reliquorum laterum quadrante minus, et reliquus angulus acutus. 49v

Sit triangulus ABC habens angulum ABC rectum quidem, et ACB acutum, et latus AC recto angulo ABC subtensum quadrante minus. Dico, quod utrumque duorum segmentorum AB et BC quadrante inferius est, et reliquus angulus BAC acutus.

Patet autem AB segmentum quadrante minus esse; ipsum namque minus est segmento AC, quod per hipothesim quadrante minus existit; nam maiori angulo latus maius subtenditur.[1])

At si BC latus quadrans fuerit, si sit possibile, erit signum C polus segmenti[2]) AB; quare AC quadrans erit, quod non subiicitur.

Si autem BC segmentum quadrantem excedat, erit per propositionem XLIII segmentum AC quadrante maius, quod est contra hipothesim; latus enim AC | quadrante minus supponebatur; ergo et BC latus quadrante est inferius. 50r

Igitur si in triangulo duorum angulorum alter rectus alter acutus fuerit, et latus recto subtensum angulo quadrante minus, erit reliquorum laterum quadrante inferius utrumque, et reliquus angulus acutus[3]); q. erat demon[strandum].

Aliter.

Et quoniam segmentum AB inferius est segmento AC — etenim sub maiore angulo latus maius subtenditur[4]) — et angulus ABC rectus, ergo per propositionem XXI reliquum latus BC quadrante minus est, et reliquus angulus BAC acutus.

Ergo si in triangulo duorum angulorum, et reliqua ut supra; q. e. osten[dendum].

Propositio XLVIII. |

Si in triangulo quopiam duorum angulorum alter rectus alter acutus existat, et latus angulo subtensum acuto minus quadrante, erit reliquorum laterum genere dubium utrumque, et reliquus angulus genere incertus. 50v

Sit[5]) triangulus ABC habens angulum ABC rectum, et ACB angulum acutum, et latus AB acuto angulo ACB subtensum quadrante minus. Dico, quod reliquorum laterum BC et AC utrumque incertum est magnitudine, et similiter BAC angulus magnitudine dubius.

Supposito enim latere BC quadrante minore, erit per propositionem tertiam et AC latus quadrante inferius, atque angulus BAC acutus.

1) Menelai *sphaerica* I, 7. 2) Hs. hat *segmente.*
3) Daß der Winkel spitz ist, wird im nachfolgenden aliter-Beweis bewiesen.
4) Menelai *sphaerica* I, 7. 5) Hs. hat *Si.*

Rursus si BC segmentum aequale quadranti subiiciatur, erit et AC 51r quadrans, atque | angulus BAC rectus. Nam C signum tunc est polus segmenti AB.[1])

At si BC latus quadrantem excesserit, ergo per propositionem septimam AC latus quadrante superius erit, et angulus BAC obtusus.

Igitur si in triangulo quopiam duorum angulorum, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XLIX.

Fieri non potest, ut triangulus aliquis, duorum angulorum alterum rectum alterum acutum habens, possideat latus acuto subtensum angulo quadranti aequale.

Si enim id possibile fuerit, sit triangulus ABC habens angulum ABC rectum, ACB vero angulum acutum, et 51v latus AB acuto subtensum angulo ACB | quadranti aequale.

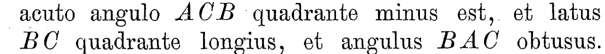
At quia quadrans AB ad rectos angulos est BC segmento, igitur signum A polus est segmenti BC, et angulus ACB rectus erit. Nam, ut Theodosius demonstravit, omnis maximus circulus veniens per polum alterius maximi circuli, ad ipsum erit rectus.[2]) At angulus ACB subiiciebatur recto[3]) minor.

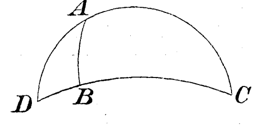
Non igitur fieri potest, ut triangulus aliquis, et reliqua ut supra; q. e. d.

Propositio L.

In triangulo quopiam duorum angulorum alterum rectum habente, alterum acutum, et latus recto subtensum angulo quadrante maius, erit latus acuto subtensum angulo quadrante inferius, et reliquum latus quadrante superius, et reliquus angulus obtusus. |

52r Sit triangulus ABC angulum ABC rectum habens, et angulum ACB acutum, et latus AC quadrante maius. Dico, quod latus AB subtensum acuto angulo ACB quadrante minus est, et latus BC quadrante longius, et angulus BAC obtusus.





Protrahantur itaque duo latera BC et CA in partes A, B, quousque concurrant super D. Et quoniam segmentum AC per hipothesim quadrantem superat, igitur de semicirculo CAD reliqua sectio AD quadrante inferior est; et quia angulus ABD rectus est, et ADB acutus — nam suus aequalis ACB per hipothesim acutus —, ergo per propositionem XLVII utrumque duorum segmentorum AB et BD quadrante vincitur. Ergo de semicirculo DBC reliqua sectio BC quadrante maior 52v est. At per eandem | propositionem BAD angulus acutus est; ergo de duobus rectis reliquus BAC obtusus.

Igitur in triangulo quopiam duorum angulorum alterum rectum habente, et reliqua ut supra; q. e. o.

---

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13 & 16 inv.
2) Ibid. I, 15. 3) Hs. hat *recto acuto.*

Propositio LI.

Fieri non potest, ut in triangulo, duorum angulorum possidente alterum rectum alterum acutum, latus acuto subtensum angulo sit quadrante superius.

Id si possibile fuerit, sit ergo triangulus ABC habens angulum BAC rectum, et angulum ACB acutum, et latus AB quadrante maius.

Auferatur ergo ex AB segmento quadrans AD; et describatur | segmentum DC. Et quoniam AB segmentum ad rectos existit angulos AC segmento, igitur signum D polus est sectionis AC[1]), et angulus ACD rectus.[2]) Ergo per diffinitionem anguli obtusi [VIII] angulus ACB recto maior est, quod non supponebatur.

53r

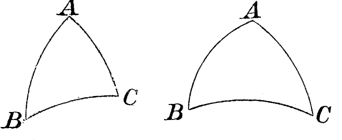
Non igitur possibile est, ut triangulus ABC habeat angulum BAC rectum, et ACB acutum, et latus AB, quod sub angulo ACB subtenditur, quadrante maius; quod demonstrasse oportuit.

Propositio LII.

In triangulo duos acutos habente angulos, et eorum alteri subtensum latus quadrante minus, erit utrumque reliquorum laterum quadrante minus, si reliquus angulus aut rectus aut acutus fuerit. Nam si reliquus angulus obtusus sit, utrumque reliquorum laterum variabitur. |

Sit triangulus ABC habens duos acutos angulos ABC et ACB, et latus AB quadrante minus acuto angulo ACB subtensum. Dico, quod utrumque reliquorum laterum AC et BC quadrante sit inferius, si reliquus angulus BAC aut rectus aut acutus existat.

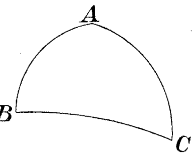
53v

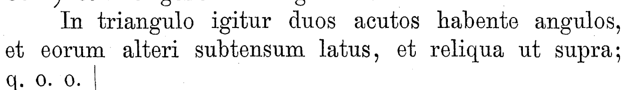


Sit igitur inprimis acutus. Ergo per propositionem XXXVI utrumque duorum laterum AC et BC quadrante superatur.

Sit rursus BAC angulus rectus. Igitur per XXXIV propositionem utraque latera AC et BC quadrante sunt minora.

Praeterea subiiciatur[3]) angulus BAC obtusus. Ergo [per XXXVIII propositionem] utrumque duorum laterum CB[4]) et AC genere ambiguum erit.





In triangulo igitur duos acutos habente angulos, et eorum alteri subtensum latus, et reliqua ut supra; q. o. o. |

Correlarium.

54r

Inde manifestum erit, angulum BAC varium esse genere, quandoque enim rectus est, aliquando recto minor, nonnunquam maior.

---

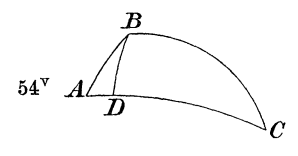
1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13 & 16 inv.
2) Ibid. I, 15. 3) Hs. hat *subiiciantur*. 4) Hs. hat AB.

Propositio LIII.

In triangulo duos habente acutos angulos, et latus eorum alteri subtensum quadranti aequale, erit reliquus angulus obtusus, eique subtensum latus quadrante maius, et reliquum latus quadrante inferius.

Sit ergo triangulus ABC habens duos angulos acutos BAC et ACB, et angulo BAC subtensum latus BC quadranti aequale. Dico, quod reliquus angulus ABC obtusus est, eique subtensum latus AC quadrante maius, et reliquum latus AB quadrante minus.

54v



Ex signo | B super[1]) AC segmentum sectio perpendicularis describatur BD. Et quia uterque angulorum BAC et ACB recto minor est, igitur D signum cadit inter A, C signa. Et quia per constructionem angulus BDC rectus, et per hipothesim BC sectio quadrans [, et sectio BD quadrante vincitur], ergo per secundam propositionem DC segmentum quadrans est aequale, et angulus CBD rectus. Et quia angulus ABC recto CBD maior est, igitur per diffinitionem [VII] angulus ABC obtusus est. Et quia DC quadrans est, igitur ADC segmentum quadrantem excedit. Ergo reliqua sectio AD quadrante inferior est. Segmentum autem BD quadrante minus est, quoniam ipsum est magnitudo acuti anguli BCD [Def. VIII], et angulus ADB rectus per constructionem. Ergo per propositionem tertiam primi segmentum AB quadrante minus est.

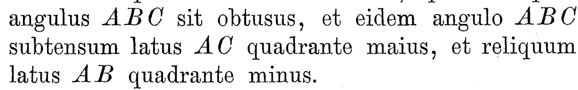
Igitur in triangulo duos acutos habente angulos, et reliqua ut supra; quod demon[strare] o. |

55r

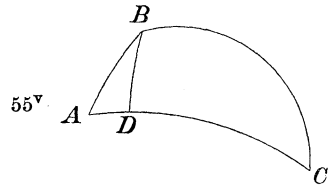
Propositio LIV.

In triangulo duos acutos angulos habente, alterique eorundem latus subtensum quadrante maius, erit reliquus angulus obtusus, eique subtensum latus quadrante maius, et reliquum latus alteri acutorum angulorum subtensum quadrante minus.

Sit triangulus ABC duos acutos angulos habens BAC et ACB, et latus BC acuto angulo BAC subtensum quadrante maius. Dico, quod reliquus angulus ABC sit obtusus, et eidem angulo ABC subtensum latus AC quadrante maius, et reliquum latus AB quadrante minus.



55v



Ex signo B perpendicularis maximi circuli sectio BD super segmentum AC descri|batur. Et quia per hipothesim duorum angulorum BAC et ACB[2]) uterque recto minor est, igitur signum D cadit inter A, C signa. Et quia in partili triangulo BCD angulus BDC rectus est, et angulus BCD acutus, atque segmentum BC per hipothesim quadrante maius, igitur per propositionem L primi erit angulus CBD obtusus; ergo multo magis angulus ABC obtusus

1) Hs. hat *superat*. 2) Hs. hat ACD.

est. Et per eandem DC segmentum quadrante maius est; ergo multo fortius ADC sectio quadrantem superat.

Per eandem quoque propositionem BD sectio perpendicularis quadrante inferior est. Est autem et AD sectio quadrante minor, et angulus ADB rectus per constructionem; ergo per propositionem tertiam primi AB segmentum quadrante minus est.

Igitur in triangulo duos acutos angulos habente, et reliqua ut supra; q. o. d.

Propositio LV. |

56r

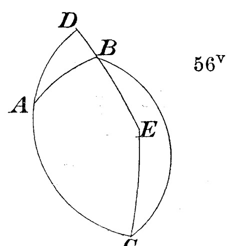
Fieri non potest, ut triangulus duos obtusos possideat angulos et latus uni eorum subtensum quadrante minus.[1])

Id si possibile fuerit, ergo sit triangulum duos angulos obtusos habens BAC et ACB, et latus AB obtuso angulo ACB subtensum quadrante minus.

Igitur super AC segmentum ex B signo sectio perpendicularis describatur BD. Et quoniam angulus BAC obtusus est et AB segmentum quadrante minus, igitur per propositionem XX perpendicularis sectio BD cadit extra triangulum BAC. Et quia in triangulo ABD angulus ADB rectus est et BAD acutus, et maiori angulo maius subtenditur latus[2]), ergo segmentum AB maius est sectione BD.

Est autem AB quadrante minus per hipothesim; multo igitur minor quadrante erit BD sectio. Ipsa ergo producatur in partem B, | et sit totum segmentum DBE quadrans; ergo signum E polus est segmenti DAC, et descripto EC segmento erit angulus ACE rectus, ergo angulus ACB recto minor[3]); at recto maior supponebatur.

56v



Non ergo fieri potest, ut triangulus duos habeat obtusos angulos et latus eorum alteri subtensum quadrante minus; quod demonstrasse oportuit.

Propositio LVI.

In triangulo duos obtusos angulos habente, eorumque alteri subtensum latus aequale quadranti, erit reliquus angulus obtusus, eique subtensum latus quadrante maius, et reliquum latus alteri obtuso angulo subtensum quadrante maius.

57r

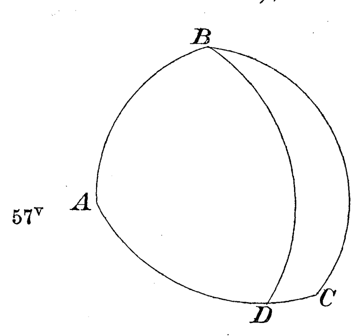
Sit triangulus ABC habens duos [obtusos] angu|los BAC et ACB, et AB latus quadranti aequale. Dico, quod reliquus angulus ABC sit obtusus, eique subtensum latus AC quadrante maius, et reliquum latus BC quadrante maius.

Igitur a signo B super AC segmentum describatur perpendicularis sectio BD. Et quia angulus BAC obtusus est, igitur perpendicularis sectio

1) Dieser Satz ist falsch; vgl. unten. 2) Menelai *sphaerica* I, 7.
3) Hier ist eine falsche Voraussetzung unterschoben; denn BE braucht nicht (s. Fig. 2) außerhalb des Dreiecks ABC zu fallen. Also ist der Beweis falsch.

BD potest cadere in partes obtusi BCA anguli, et ipsa perpendicularis BD cadit intra triangulum ABC.

Si autem non, cadat ergo extra. Et quia in triangulo BCD angulus CBD acutus est[1]), et BDC rectus, et BD latus quadrante maius — magnitudo enim est obtusi anguli BAD —, igitur per XLIII propositionem angulus BCD obtusus est; quare et reliquus angulus ACB acutus; at prius supponebatur obtusus, ergo perpendicularis sectio BD cadit intra triangulum ABC.



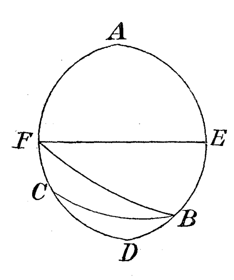
Erit igitur angulus ABC obtusus, et eidem subtensum latus AC qua|drante maius. Nam 57v per propositionem secundam primi angulus ABD rectus est, et AD segmentum quadrans. Et quia in triangulo BCD angulus BDC rectus est, et CBD acutus, et BD latus quadrante maius, velut ostensum est, igitur per propositionem XLIII BC latus quadrante maius est.

Ergo in triangulo duos obtusos angulos habente, eorumque alteri latus subtensum aequale quadranti, erit reliquus angulus etiam obtusus, eique latus subtensum quadrante maius, et[2]) latus reliquum quadrante maius; q. o. o.

Propositio LVII.

In triangulo duos obtusos angulos habente, et latus eorum uni subtensum quadrante maius, erit utrumque reliquorum laterum genere ambiguum, et reliquus angulus genere incertus.

58r Sit itaque triangulus ABC habens duos | obtusos angulos BAC et ACB, et latus AB obtuso angulo ACB subtensum quadrante maius. Dico, quod reliquorum laterum AC et BC utrumque specie sit incertum [, et reliquus angulus ABC ambiguus].



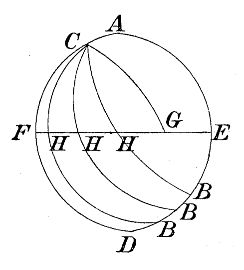
Producantur igitur duo latera AB et AC in partes B, C, quousque concurrant super signo D. Quod si utrumque segmentorum BD et DC quadrante minus extiterit, fiet in triangulo BDC per propositionem XIV uterque duorum angulorum CBD et BCD acutus, et BC segmentum ambiguum genere, et angulus ABC obtusus.

Auferatur itaque ex AB segmento quadrans AE, et ex AC sectione quadrans AF, et descripto segmento EF ipsum erit magnitudo obtusi anguli BAC [Def. VIII], et idcirco quadrante maius. Et describatur segmentum BF. Quod si idem fuerit cum BC segmento, erit per propositionem XLIII angulus EBF 58v obtusus, et BF latus seu BC quadrante maius, et AC seu AF qua|drans.

---

1) Winkel ABD ist nämlich recht (vgl. Satz 2, welcher unten zitiert wird).
2) Hs. undeutlich.

Rursus ex EF segmento auferatur quadrans FG. Et quia FG sectio ipsi AC segmento ad rectos est angulos, erit G signum polus sectionis AC.[1]) Praeterea BC segmentum secet iam FG quadrantem super H signo, et descripto quadrante GC erit igitur angulus ACG rectus; ergo et angulus ACB obtusus. Quod si EGH sectio quadrans fuerit, erit [per propositionem sextam] angulus ABC rectus.[2]) Sin autem EGH sectio quadrante minor fuerit, angulus ABC acutus [erit per propositionem tertiam]. Quod si EGH segmentum quadrantem excedat, ergo angulus ABC obtusus existet per propositionem septimam primi. Segmentum autem BC non veniet per signum G, quia tunc angulus ACB rectus esset, quod non supponitur; neque BC latus secabit EG circumferentiam, alioquin angulus ACB acutus esset, quod etiam subiectum non est.



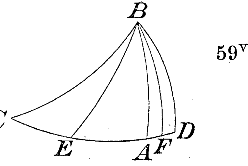
Igitur in triangulo duos obtusos angulos habente, et reliqua ut supra; q. e. o.[3])

Propositio LVIII.[4]) |

Si in triangulo quodlibet trium laterum quadrante minus existit, erunt in eodem triangulo duo ad minimum anguli acuti, et reliquus erit specie dubius. 59r

Si[5]) ergo, ut in triangulo ABC, duo segmenta AB et AC utraque quadrante minora rectum comprehendant angulum BAC, erit per tertiam propositionem BC latus quadrante inferius, et uterque duorum angulorum ABC et ACB acutus. Liquet ergo, quod triangulus rectangulus quodlibet laterum quadrante minus habens possidet duos angulos acutos.

Rursus ex AC latere segmentum auferatur AE, et descripto BE segmento erit per eandem tertiam propositionem libri primi BE segmentum quadrante minus, et angulus AEB acutus; igitur de duobus rectis reliquus BEC obtusus; ergo per propositionem XIV uterque duorum angulorum EBC et ECB acutus est. Patet igitur | iam, quod in triangulo BEC quodlibet latus quadrante minus habente duorum angulorum, quibus BC latus adiacet, uterque recto minor est, et BEC angulus obtusus. 59v



Praeterea latus AC in partem A producatur usque in D. Sitque CAD segmentum aequale ipsi BC segmento, describatur [que] BD segmentum. [Ergo] erit per propositionem quartam[6]) uterque

---

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13 & 16 inv.

2) Hs. hat *rectus* korr. aus *obtusus.* — Vgl. Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13 & 16.

3) Am Rande fügt Hand 2 hinzu: „Desunt propositiones in tribus [?] casibus, quando sunt duo anguli, acutus et obtusus, cum latere uni eorum opposito, licet ex praecedentibus colligi possint. Nam ⟨quaesita omnia varia enim essent⟩ Vide propos. 68." — Die Worte in ⟨ ⟩ sind wieder annulliert worden.

4) Am Rande fügt Hand 2 hinzu: „Tria latera".

5) Hs. hat *Sit.* 6) Hs. hat *tertiam quartam.*

duorum angulorum BDC et CBD acutus. Et quia in triangulo partili et rectangulo BAD angulus BAD rectus est, et eum continentia latera AD et AB quadrante minora, igitur [per] propositionem tertiam primi BD segmentum quadrante minus est. Perspicuum igitur est, quod in triangulo BCD quodlibet laterum quadrante minus habente tres interiores anguli sunt acuti.

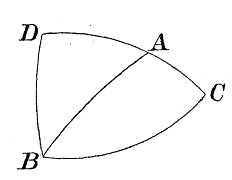
Item[1]) quoque probabimus, quod in triangulo non isoscheli et quodlibet laterum quadrante minus habente contingit, tres angulos interiores acutos 60r esse. Ex AD igitur segmen|to auferatur AF, et descripta BF sectione erit per tertiam propositionem primi in triangulo rectangulo BAF BF segmentum quadrante minus, et angulus AFB acutus. Et quia angulus CBD acutus est, ut probatum fuit, multo igitur magis angulus partilis FBC acutus est. Igitur in triangulo BFC non isoscheli et unumquodque laterum quadrante minus habente omnes tres anguli interiores acuti sunt.

Igitur si in triangulo quodlibet trium laterum quadrante minus existat, erunt in eodem triangulo duo ad minimum acuti anguli, et reliquus genere anceps.[2])

Propositio LIX.

In triangulo duorum laterum utrumque quadrante minus habente et quadrantem tertium, erit angulus obtusus, cui quadrans subtenditur, et reliqui acuti. |

60v Esto triangulus ABC possidens utrumque duorum [laterum] AB et AC quadrante minus et tertium latus BC quadranti aequale. Dico, quod angulus BAC obtusus est, et reliqui acuti.



Latus AC igitur ad partem[3]) A producatur usque in D; et sit CAD quadrans; et descripto segmento BD erit ergo signum C polus segmenti BD.[4]) Igitur angulus BDC rectus est; et quia in triangulo rectangulo ABD utrumque laterum AB et AD quadrante inferius existit, ergo per propositionem XXI libri primi latus BD quadrante vincitur, et angulus BAD acutus est; quare de duobus rectis reliquus BAC recto maior est et obtusus. Et quia segmentum BD quadrante superatur, ut ostensum fuit, et est per diffinitionem [VIII] magnitudo anguli ACB, igitur angulus ACB acutus est. Rursus quia signum C polus est BD segmenti, ergo angulus CBD rectus est; quare partilis angulus ABC acutus est.

Igitur in triangulo duorum laterum, et sequentia ut supra; q. e. o. |

61r

Propositio LX.

In triangulo utrumque duorum laterum quadrante minus habente, et reliquum quadrante maius, erit angulus obtusus, cui latus maximum subtenditur, et reliquorum uterque angulorum acutus.

---

1) Hs. hat *Idem*.

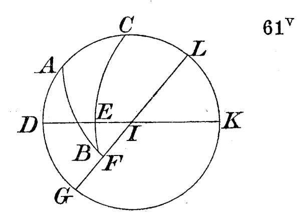
2) Dieser Beweis befriedigt nicht, indem offenbar nur die Möglichkeit, nicht aber die Notwendigkeit zweier spitzen Winkel bewiesen wird. 3) Hs. hat *partes*.

4) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 16 inv. oder Menelai *sphaerica* I, 2 & 10.

Triangulus igitur ABC utrumque laterum AB et AC quadrante minus habeat, et BC latus quadrante maius. Dico, quod angulus BAC obtusus est, et uterque reliquorum angulorum ABC et ACB acutus.

Igitur per XXV tertii[1]) *elementorum*[2]) sectionis AC circulus describatur ACD; et ex BC segmento auferatur quadrans CE; et super C polo describatur DEK semicirculus, secans orbem ACD super D et K signis. Rursus AB segmentum in partem B producatur usque in F, sitque ABF quadrans. | Et iterum super polo A iuxta intervallum ABF quadrantis describatur semicirculus GFL, secans DEK semicirculum super signo I et orbem ACD in signis G et L. B itaque signum non est in GL circumferentia; nam sic AB quadrans esset, quod non supponitur. Nec cadit B signum in DK circumferentiam, quia sic BC quadrans esset, quod adversatur hypothesi; nam BC per subiectionem quadrante maius est. Non cadit[3]) B quoque signum intra sphaericam superficiem AKD; nam sic BC latus esset quadrante inferius, quod non fuit suppositum. Neque intra triangulum IGK; ita namque AB segmentum excederet quadrantem, quod non est subiectum. Ergo B signum cadit intra triangulum DIG. Et quoniam DE circumferentia quadrante est minor magnitudoque anguli ACB [Def. VIII], ergo angulus ACB acutus est. Pari modo probabimus angulum ABC acutum. Et quia FL circumferentia quadrantem exuperat — est quoque magnitudo | anguli BAC —, igitur angulus BAC obtusus existit.

61ᵛ



62ʳ

Igitur in triangulo utrumque duorum laterum quadrante minus habente, et reliquum quadrante maius, et sequentia ut supra; q. e. d.

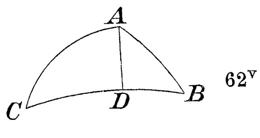
Propositio LXI.

In triangulo, cuius latus unum quadrans existit, alterum quadrante minus, tertium quadrante maius, erit angulus, cui maximum subtenditur latus, obtusus, [et] reliquorum uterque angulorum acutus.

Sit triangulus ABC habens AB latus quadrante minus, BC latus quadrante maius, et latus AC quadranti aequale. Dico, quod angulus BAC obtusus est, et reliquorum uterque angulorum acutus.

Ex BC igitur latere quadrans CD auferatur; et super C polo posito describatur AD segmentum. Erit ergo | angulus partilis CAD rectus[4]); igitur et totus BAC recto maior et obtusus est. Est autem AD segmentum quadrante minus; nam quadrans esse non potest; ita enim A polus esset segmenti BDC[5]), et AB quoque quadrans[6]), quod adversatur hypothesi. Neque AD sectio quadrantem superat; ita enim per propositionem septimam primi AB latus quadrante maius esset, quod

62ᵛ



1) Hs. hat *tertii quarti*. 2) D. h. Euclidis *elementa* III, 25.
3) Hs. hat *cadat*. 4) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15.
5) Ibid. I, 15, 13 & 16 inv. 6) Ibid. I, 16.

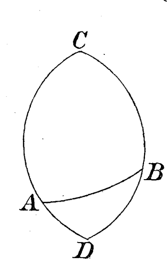
non subiciebatur. Ergo AD circumferentia quadrante superatur; et quia in triangulo BAD unumquodque laterum quadrante vincitur, et angulus ADB per constructionem rectus, ergo per propositionem LVIII angulus ABD acutus est. Et quia AD segmentum quadrante minus magnitudo est anguli ACD [Def. VIII], igitur et angulus ACB acutus est.

Ergo in triangulo, cuius latus unum quadrans existit, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio LXII.

63r In triangulo, qui duo latera qua|drante utraque possidet maiora, et reliquum quadrante minus, erunt anguli cuncti specie varii.

Sit triangulus ABC possidens utrumque duorum laterum AC et CB quadrante maius, et reliquum AB quadrante minus. Dico, quod in triangulo cuncti sunt anguli genere varii.

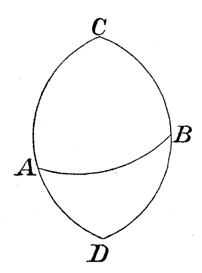


Igitur duo latera AC et CB in partes A, B producantur, et concurrant super D signo. Et quia in triangulo ABD unumquodque laterum quadrante minus est, ergo [per propositionem LVIII] triangulus ABD duos habet acutos angulos, et reliquum genere varium. Igitur in triangulo ABC erunt cuncti anguli genere varii. Nam unus angulus trianguli ABD varius est genere. Quod si BAD rectus fuerit, erit in triangulo ABC angulus BAC rectus, et angulus ACB acutus, angulus vero ABC obtusus. Rursus si angulus BAD obtusus est, ergo in triangulo 63v ABC angulorum duorum BAC et ACB uterque acutus, | et reliquus obtusus. Si autem in triangulo ABD cuncti anguli fuerint acuti, ergo in triangulo ABC uterque duorum angulorum BAC et ABC obtusus est, et reliquus ACB acutus.

Igitur in triangulo ABC, qui duo latera possidet utraque quadrante maiora AC et BC, omnes anguli genere varii sunt; q. o. o.

Propositio LXIII.

In triangulo possidente duo latera utraque quadrante maiora, et reliquum latus aequale quadranti, omnes anguli sunt obtusi.



Sit triangulus ABC habens utrumque duorum laterum AC et CB quadrante maius, et AB latus aequale quadranti. Dico, quod omnes anguli trianguli ABC sunt obtusi.

Latera igitur AC et BC in partes A, B producantur usque ad D. Et quoniam in triangulo ABD quadrans est AB, et reliquorum laterum AD et DB utrumque minus quadrante, igitur per propositionem LIX primi angulus ADB obtusus est; ergo et suus aequalis ACB recto maior. Et quoniam per eandem propositionem uterque 64r duorum angulorum BAD et ABD acutus | est, ergo de duobus rectis reliquorum angulorum BAC et ABC obtusus est uterque.

Igitur in triangulo possidente, et reliqua ut supra; q. o. de[monstrare].

Propositio LXIV.

In triangulo trium aequalium laterum, quorum singula quadrante sunt minora, omnes anguli aequales et acuti sunt.

Sit ergo triangulus ABC aequalia continens latera atque eorum unumquodque quadrante minus. Dico, quod cuncti anguli in triangulo ABC acuti sunt et aequales.

Quoniam duo latera AB et AC sunt aequalia, igitur per quartam propositionem huius primi duo anguli ABC et ACB sunt acuti, et uterque utrique aequalis. Et per eandem angulus BAC est acutus et aequalis utrique duorum angulorum ABC et ACB.

Igitur in triangulo trium aequalium laterum, quorum singula quadrante sunt minora, et reliqua ut supra; q. e. demon[strandum]. |

Propositio LXV.

64v

In triangulo trium aequalium laterum, quorum quodlibet quadrans est, omnes anguli recti sunt.

Sit ergo triangulus ABC, et eius quodlibet laterum quadrans. Dico, quod quilibet trium angulorum A, B, C rectus est.

Nam A polus est lateris BC, et B polus lateris AC, et C polus lateris AB.[1])

Igitur in triangulo trium aequalium laterum, quorum quodlibet quadrans est, omnes anguli recti sunt; q. o. o.

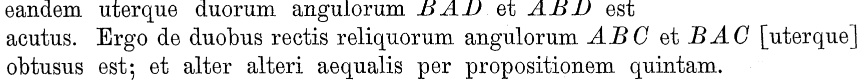
Propositio LXVI.

In triangulo trium aequalium laterum, quorum singula quadrantem excedunt, cuncti anguli sunt obtusi et aequales.

Sit ergo triangulus ABC trium aequalium la|terum [atque eorum unumquodque quadrante maius]. Dico, quod ipsius[2]) angulorum quilibet obtusus est, et omnes ad invicem aequales.

65r

Duo igitur latera AC et CB in partes A, B producantur, quousque concurrant super D. Et quoniam in triangulo ABD duo latera AD et BD utraque quadrante sunt minora, et latus AB quadrante maius, igitur per propositionem LX huius primi angulus ADB obtusus est. Ergo et suus aequalis ACB obtusus.[3]) Rursus per eandem uterque duorum angulorum BAD et ABD est acutus. Ergo de duobus rectis reliquorum angulorum ABC et BAC [uterque] obtusus est; et alter alteri aequalis per propositionem quintam.



Igitur in triangulo trium aequalium laterum, quorum quodlibet quadrante maius est, cuncti anguli sunt obtusi et aequales; quod oportuit demonstrare.

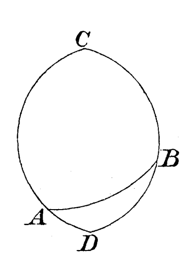
---

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 16 inv. oder Menelai *sphaerica* I, 2 & 10.
2) Hs. hat *omnes ipsius*.
3) Menelai *sphaerica* I, def. 4.

Propositio LXVII.

In triangulo trium inaequalium laterum, quorum unumquodque quadrante superius existat, anguli sunt omnes obtusi. |

65v Sit ergo triangulum ABC unumquodque laterum quadrante maius habens. Dico, quod ipsius trianguli[1]) ABC omnes anguli sunt obtusi.



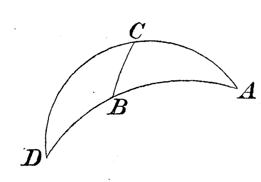
Duo igitur latera AC et BC in partes A, B producantur ad concursum signi D. Et quia in triangulo ABD duo latera AD et BD utraque quadrante minora sunt, et AB latus quadrantem excedit, igitur per propositionem LX primi angulus ADB obtusus est [; ergo et suus aequalis ACB obtusus est]. Et per eandem propositionem uterque angulorum ABD et BAD acutus. Igitur de duobus rectis reliquorum angulorum ABC et BAC uterque obtusus est.

Igitur in triangulo trium inaequalium laterum, quorum unumquodque quadrante superius existat, anguli sunt omnes obtusi; quod oportuit demonstrare.

Propositio LXVIII.

In triangulo, si unus angulus acutus fuerit, et alter obtusus, 66r atque latus | acutum angulum subtendens quadrante minus, erit utrumque ex reliquis lateribus genere ambiguum, et angulus reliquus dubius genere.

In triangulo ABC angulus BAC sit acutus, et angulus ACB obtusus, atque latus BC quadrante minus. Dico, quod duo latera AB, AC sunt genere dubia, et quod angulus ABC genere varius existat.



Duo igitur latera AB, AC protrahantur in concursum super signo D. Et quoniam in triangulo BCD uterque duorum angulorum BCD et CDB acutus est, et BC latus quadrante minus, igitur per propositionem LII utrumque duorum segmentorum BD, DC genere ambiguum est. Igitur reliqua duo segmenta AB et AC genere varia sunt. Et per eandem propositionem CBD angulus genere varius existit; ergo et reliquus 66v angulus ABC specie | varius est.

In triangulo igitur, si unus angulus acutus fuerit, et alter obtusus, atque latus acutum angulum subtendens quadrante minus, erit utrumque ex reliquis lateribus genere ambiguum, et angulus reliquus dubius genere; quod oportuit ostendere.

Finis primi libri. |

1) Hs. hat *anguli*.

IOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS DE TRIANGULIS SPHAERICIS. 67r

LIBER SECUNDUS.

Diffinitio I. Linea recta in dato puncto rectam lineam contingere dicitur, quae cum altera in dato puncto planum comprehendat angulum.

Diffinitio II. Sinus rectus datae sectionis est ipsius geminatae semibasis.

At semibasi et sinu recto vocabulis indifferenter posterius utar, eo quod significatu parum distent.

Diffinitio III. Sinus eversus dati segmenti est particula dimetientis circumferentia eiusdem segmenti | et recto sinu comprehensa. 67v

Hunc sinum eversum alii sagittam, alii cuspidem vocant.

[Diffinitio] IV. Dati segmenti orbis magni completionem seu complementum dico quodcunque reliquum erit dato segmento ex quadrante sublato.

[Diffinitio] V. Ratio quaevis ex aliis quotlibet componitur.

Id ex eo liquidum est, quoniam inter duas magnitudines datam ad se invicem rationem habentes quotvis eiusdem generis accipi possunt: velut A, E magnitudines datam ad se invicem habeant rationem, et inter eas quotlibet eiusdem generis magnitudines assumantur, quae sunt B, C, D. Dico, rationem A ad E compositam esse ex quatuor rationibus: A ad B et B ad C et C ad D atque D ad E. Et si inter A et E magnitudines aliae utcunque magnitudines quatuor sumerentur eiusdem generis, iam ratio A ad E ex quinque aliis esse concinnata diceretur. Atque in hunc modum ratio A ad E ex quotvis aliis construi potest. |

Diffinitio VI. Aequalibus rationibus rationes concinnantur aequales. 68r

[Diffinitio] VII. Contingit inaequalibus rationibus aequales saepius construere rationes.

Quod ita patet: Sint A et C magnitudines aequales. Sint item B et D magnitudines aequales. Igitur per VII, V[1]) utraque magnitudinum A et C ad utramque duarum B et D eandem possidet rationem. Igitur sicut A ad B, ita est C ad D. Rursus inter A et B intercipiatur E magnitudo, et inter C, D magnitudines cadat F magnitudo maior E magnitudine. Et quoniam F est maior E magnitudine, igitur per decimam quinti *elementorum* Euclidis A ad E maiorem habet rationem quam ad F. Sed ex hypothesi

1) D. h. Euclidis *elementa* V, 7.

C est aequalis A; igitur C ad E maiorem habet rationem quam C ad F. 68v Deinde per eandem E ad B minorem | possidet rationem quam F ad B. Est autem ipsi D aequalis B; igitur E ad D minorem continet rationem quam F ad D. Ergo duae rationes A ad E et E[1]) ad B duabus rationibus C ad F et F ad D sunt inaequales. Et quia ostensum fuit, A ad B rationem esse sicut C ad D, et A ad B ratio componitur ex A ad E et E ad B rationibus, inaequalibus C ad F et F ad D rationibus, quibus C ad D concinnatur ratio, igitur contingit inaequalibus rationibus aequales saepius componere rationes.

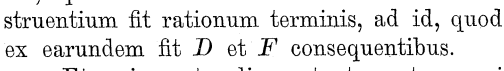
Diffinitio VIII. Si aequales rationes inaequalibus construantur duabus rationibus, si prima componentium priorum rationum maior fuerit prima posteriorum construentium, erit reliqua priorum minor reliqua posteriorum. Et si minor fuerit prima priorum prima[2]) posteriorum, erit 69r reliqua priorum maior reliqua po|steriorum. Et si prima concinnantium rationum prioris rationis constructae fuerit aequalis primae construentium posteriorem constructam, erit reliqua priorum construentium aequalis reliquae posteriorum construentium.

Ut in praemisso schemate si A ad E ratio fuerit maior C ad F ratione, erit E ad B ratio minor F ad D ratione. Et si A ad E ratio fuerit minor C ad F ratione, igitur ratio E ad B erit maior ratione F ad D, per communem sententiam: „Si aequalibus inaequalia demas, erit reliquum maioris ablatae minus reliquo minoris ablatae“, et e contra. Igitur diffinitio est manifesta.

Propositio prima.

Si rationem quampiam aliae duae construant rationes, fuerintque rationum termini componentium vel lineae rectae vel 69v numeri, | erit eadem ratio aequalis ei, quam id habet, quod ex antecedentibus fit construentium terminis, ad id, quod ex earundem componentium rationum fit consequentibus.

Sit data ratio magnitudinis A ad B magnitudinem, quam biduae [!][3]) aliae rationes C ad D et E ad F componant. Dico, rationem A ad B esse aequalem rationi, quam habet id, quod ex C et E antecedentibus construentium fit rationum terminis, ad id, quod ex earundem fit D et F consequentibus.



Et quia rectae lineae tantum et numeri alterutrim ducuntur, igitur propositum in lineis rectis et numeris demonstrari conveniet.

Si[n]t ergo primum ut C ad D ita GH et HK rectae lineae in directum atque in unam rectam lineam compositae super H puncto. Et per undecimam primi *elementorum* Euclidis in signo seu puncto H ad rectos angulos excitetur HL quanta-70r libet recta linea; | atque ipsi ad directum adiiciatur HM; et sit LH ad HM sicut E ad F; et compleantur rectangula GL, LK et KM. Sumpto

1) Hs. hat A. 2) Hs. hat *ad primam* statt *prima*.
3) Werner benützt öfters *biduae* statt *duae*; vgl. S. 52.

igitur LK rectangulo inter GL et KM rectangula medio, igitur per diffinitionem quintam[1]) huius ratio rectanguli GL ad rectangulum KM construitur ex duabus rationibus, rectanguli GL ad rectangulum LK et LK rectanguli ad rectangulum KM.

Et quoniam duo rectangula GL, LK eiusdem sunt altitudinis, igitur per primam sexti *elementorum* Euclidis ratio rectanguli GL ad LK rectangulum est sicut GH basis ad basim HK. At ex hipothesi ratio ipsius GH ad HK est velut C ad D. Igitur ratio GL rectanguli ad rectangulum LK per 11 eorundem *elementorum* quinti est sicut C ad D. Rursus per easdem et eodem modo demonstrabimus, rationem rectanguli LK ad KM rectangulum esse sicut E ad F. Igitur ratio rectanguli GL ad KM | rectangulum ex duabus quoque componitur rationibus, C ad D et E ad F. At eaedem per hypothesim pangunt rationem A ad B. Et quoniam per sextam[2]) diffinitionem aequalibus rationibus aequales concinnantur rationes, igitur ratio rectanguli GL ad KM rectangulum aequalis est A ad B rationi. 70ᵛ

Igitur si rationem quampiam aliae duae construant rationes, fuerintque componentium termini rationum vel rectae lineae vel numeri, erit eadem ratio aequalis ei, quam id habet, quod[3]) ex antecedentibus construentium fit rationum terminis, ad id, quod ex earundem fit rationum componentium consequentibus; quod demonstrare oportuit.

Idem in numeris ita erit liquidum: Sitque rursus ratio data A ad B composita ex duabus rationibus, numeri C ad D numerum, et E numeri ad F numerum. Et [ex] C numero antecedente in E numerum antecedentem producatur G; acto item D con|sequente numero in F consequentem creetur H. Dico, datam rationem A ad B esse sicut G ad H. 71ʳ

Igitur ex ducto[4]) D in E prodeat K numerus; ergo per XVII septimi *elementorum:* „Si numerus duos multiplicans fecerit aliquos, geniti ex eis eandem habebunt rationem quam multiplicati", G numeri ad numerum K ratio erit sicut C ad D. Rursus per eandem ratio K ad H erit sicut E numeri ad F numerum.

Estoque inter G et H numeros medius K; igitur per diffinitionem quintam[5]) huius ratio G ad H componitur ex duabus rationibus, G ad K et K ad H. Et quoniam, velut ostensum fuit, ratio G ad K est sicut C ad D, et ratio K ad H est sicut E ad F, igitur ratio G ad H construitur ex duabus rationibus, C ad D et E ad F. At ex eisdem per hipothesim concinnatur ratio A ad B. Et quia per diffinitionem sextam[6]) huius aequa|libus rationibus rationes concinnantur aequales, igitur ratio A ad B est sicut ratio G ad H. 71ᵛ

Ergo si rationem quampiam aliae duae construant rationes, et reliqua ut supra; q. d. o.

Propositio secunda.

Si ratio quaepiam componitur ex duabus rationibus, erit utra componentium aequalis ei, quam id habet, quod ex consequente alterius componentium termino fit in antecedentem com-

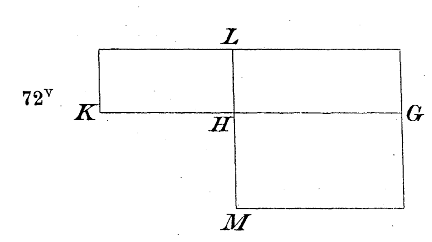
1) Hs. hat *quintam septimam.* 2) Hs. hat *sextam octavam.*
3) Hs. hat *ad id quod* statt *quod.* 4) Hs. hat *ductum.*
5) Hs. hat *quintam septimam.* 6) Hs. hat *sextam octavam.*

positae, ad id, quod ex antecedente eiusdem construentis reliquae fit in consequentem constructae.

Sit ergo, ut A ad B ratio ex duabus aliis concinnetur, C ad D et E ad F. Dico, quod productum ex D in A ad productum ex C in B rationem habet quam E ad F; et quod fit sub F et A ad id, quod sub B et E continetur, rationem habet quam C ad D.

72r Sint igitur in primis trium ra|tionum A ad B, C ad D et E ad F termini lineae rectae. Summaturque GH recta linea aequalis ipsi C rectae lineae, et HK recta linea aequalis ipsi D; sintque GH, HK rectae lineae sibi invicem in directum compositae. Atque super H puncto recta linea HL aequalis ipsi A per undecimam primi *elementorum* Euclidis ad rectos angulos excitetur, quae in partem H agatur usque in M; sitque HM aequalis [ipsi] B; et compleantur tria parallelogramata GL, LK et GM.

Et quoniam HK aequalis est ipsi D, et HL aequalis est ipsi A ex hipothesi, igitur quod fit ex A in D rectangulum aequum est rectangulo LK. Rursus quia GH recta linea aequalis est ipsi C, et HM aequalis ipsi B, igitur quod fit ex C in B rectangulum aequale est rectangulo GM. Et eodem modo patet, GL rectangulum aequale esse ei, quod fit ex C in A. Et per primam sexti [*elementorum*], quia duo rectangula LG, GM | 72v altitudinis eiusdem sunt, igitur ratio rectanguli LG ad rectangulum GM est sicut basis LH ad basim HM. At ex hipothesi LH est aequalis ipsi A, et HM aequalis ipsi B; igitur ratio rectanguli LG ad rectangulum GM



est sicut A ad B. Et quia per diffinitionem sextam[1]) huius aequalibus rationibus rationes concinnantur aequales, ergo ratio rectanguli LG ad GM rectangulum construitur quoque ex ratione C ad D, et ex ratione E ad F. Et quoniam ratio GL rectanguli ad rectangulum GM componitur etiam per quintam[2]) diffinitionem huius ex ratione GL rectanguli ad rectangulum LK, et ex ratione LK rectanguli ad GM rectangulum, et ratio rectanguli GL ad LK rectangulum est sicut GH ad HK — est autem GH aequalis ipsi C et HK aequalis ipsi D —, igitur ratio rectanguli GL ad LK rectangulum est sicut C ad D. Et quia patuit, LG esse ad GM sicut A ad B,

73r igitur per communem senten|tiam: „Si aequalibus auferantur aequalia, reliqua sunt aequalia“[3]), ratio rectanguli LK ad rectangulum GM est sicut ratio E ad F. Et prius ostensum fuit LK esse id, quod sub A et D continetur, et GM id, quod sub C, B comprehenditur.

Igitur, si ratio quaepiam ex duabus componitur rationibus, erit utra componentium ei aequalis[4]), quam id habet, quod ex consequente alterius componentium rationum fit termino in antecedentem concinnatae rationis, ad id, quod ex antecedente reliquae construentis in consequentem constructae producitur; quod demonstrare oportuit.

---

1) Hs. hat *sextam octavam*. 2) Hs. hat *quintam septimam*.
3) Der Beweis ist zwar richtig, die Anwendung von Euklids κοιναὶ ἔννοιαι 3 als von Division gültig ist dagegen nicht zulässig. 4) Hs. hat *aequalibus*.

Eodem modo ostendemus, quod continetur sub A, F ad id, quod sub E, B comprehenditur, rationem habere quam C ad D.

Trium propositarum rationum fines [!] in numeris iam subiiciantur, et sit data ratio, quam numerus A possidet ad B numerum, concinnata ex ratione C numeri ad numerum D, et ex ratione numeri E ad F numerum; et sub A, D numeris | fiat G numerus, et ex B in C producatur H. Dico, G ad H rationem esse sicut E ad F. 73v

Agatur ergo A numerus in numerum C, et fiat K. Et quoniam numerus C multiplicans A et B numeros fecit K et H, igitur per XVII septimi *elementorum* Euclidis K numerus ad numerum H rationem habet quam A ad B. Igitur per sextam[1] diffinitionem: „Aequalibus rationibus rationes concinnantur aequales“, ratio numeri K ad H numerum etiam componitur ex duabus rationibus, C ad D et E ad F. At quia numerus A multiplicans C et D numeros fecit K et G, igitur per eandem propositionem ratio numeri K ad G numerum est sicut C ad D. Et quia fuit quoque ostensum, rationem K ad H esse sicut A ad B — ex eisdem enim componitur —[2]), ergo per communem sententiam: „Si aequalibus auferantur aequalia [etc.]“[3]), et reliqua ratio G numeri ad numerum H esse sicut E numeri ad numerum F. At G producitur ex A, D numeris, et H creatur ex | B, C numeris. 74r

Igitur si ratio quaepiam ex duabus componitur rationibus, erit utra componentium ei aequalis; reliqua ut supra; q. d. o.

Similiter quoque ostendemus, rationem eius, quod A et F numeris continetur, ad numerum, qui sub E, B comprehenditur numeris, esse sicut rationem numeri C ad D numerum.

Propositio tertia.

Duae sectiones orbis eiusdem eundem sinum habent, si pariter assumptae semicirculum constituant.

Sit circulus ABC et eius centrum D, atque in eo sumptae duae sectiones AB et BC sint aequales semicirculo. Dico, eisdem sectionibus eundem sinum subtendi.

Et quia per hipothesim ABC circumferentia semi|circulus est, igitur acta basis AC est dimetiens orbis ABC; et per XII primi *elementorum* Euclidis ex B puncto in AC dimetientem perpendicularis agatur BE; et producta BE in partem E incidat circumferentiae super F puncto; ducanturque BA, AF rectae lineae. 74v

Et quia BEF basis per tertiam tertii *elementorum* Euclidis bifariam secatur super E puncto, et per quartam primi [eorundum *elementorum*] basis BA est aequalis AF basi, igitur per XXVIII tertii

1) Hs. hat *sextam octavam*.

2) An dieser Stelle, wie es scheint, eine Lücke mit Angabe der Proportion $\frac{K}{H} = \frac{K}{G} \cdot \frac{G}{H}$.

3) Wieder einmal wird hier Euklids κοιναὶ ἔννοιαι 3 auf Division verwendet; vgl. oben.

eorundem *elementorum* BA sectio aequalis est AF sectioni. Et quoniam BE, ut ostendebatur, est dimidium basis BF, et BAF sectio dupla est sectionis BA, igitur per diffinitionem secundam[1]) BE recta linea sinus est sectionis BA. Et quoniam utraque duarum sectionum ABC et AFC est semicirculus, igitur per communem sententiam: „Si ab aequalibus auferas 75r aequalia, reliqua sunt aequalia“[2]), biduae [!] sectiones BC et CF | sunt aequales. Igitur per eandem diffinitionem BE recta linea est sinus quoque sectionis BC. At prius ostensa fuit, BE rectam lineam[3]) esse sinus etiam sectionis AB, et duae sectiones AB, BC semicirculum constituunt.

Igitur duae sectiones eiusdem orbis, si pariter assumptae semicirculum constituant, eundem habent sinum; q. o. de[monstrare].

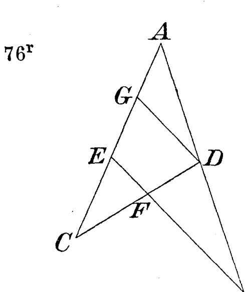
Correlarium.

Hinc etiam manifestum est, sinum maximum aequalem esse circuli semidiametro et totius circumferentiae circuli quadrantem subtendere. Quoniam perpendicularium omnium, quas ex susceptis in circumferentia punctis deduci ad dimetientem contingit, maxima est, quae in centrum cadit circuli, et eadem per diffinitionem[4]) aequalis est semidiametro eiusdem circuli; et per 75v secundam diffinitionem semi|diameter sinus est quadrantis totius circumferentiae.

Propositio quarta.

Duabus rectis lineis in aliquo puncto se ad invicem tangentibus, et a reliquis earum terminis aliae biduae [!] rectae lineae fuerint actae, priores rectas duas lineas et se ad invicem secantes, erit ratio unius tangentium ad superiorem eius particulam composita ex duabus aliis rationibus, ex ratione videlicet totius conterminae rectae lineae ad superiorem eius portionem, et ex ratione inferioris particulae alterius tangenti lineae rectae alteri conterminae ad totam ipsam conterminam.

76r



Sint duae rectae lineae AB et AC se ad invicem tangentes in puncto A iuxta diffi|nitionem primam; et a reliquis earum terminis B et C actae fuerint aliae duae rectae lineae BE et CD, quae se vicissim secent super F signo, et duas tangentes rectas lineas super D et E punctis, ipsam quidem AB super D et AC super E. Dico, rationem rectae lineae BA ad eius superiorem particulam AD ex duabus[5]) aliis concinnari rationibus, ex ratione BE ad EF, et ex ratione FC[6]) ad CD.[7])

Igitur per XXXI primi *elementorum* Euclidis ipsi BE rectae lineae agatur parallela DG, secans rectam lineam AC in puncto G. Et quia recta linea DG parallela est ipsi BF rectae lineae, igitur per XXIX

1) Hs. hat *secundam* korr. aus *sextam*.
2) Euclidis *elementa, κοιναὶ ἔννοιαι* 3.
3) Hs. hat *recta linea*.
4) Euclidis *elementa* I, def. 15—17.
5) Hs. hat *duobus*.
6) Hs. hat FC korr. aus BE.
7) Hs. hat CD korr. aus EF.

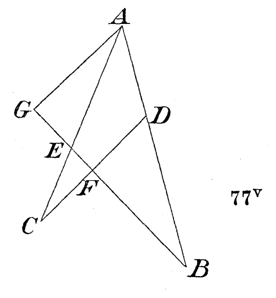
eiusdem duo anguli AEB et AGD sunt aequales, et per eandem duo anguli ADG et ABE sunt aequales; communis autem est angulus BAE; igitur duo triangula ABE et ADG sunt aequiangula; ergo per quartam sexti eorundem *elementorum* ratio ipsius BA ad AD est sicut BE ad GD. At sumpta inter BE et DG rectas lineas | media EF, igitur per V diffinitionem huius ratio BA ad AD pangitur ex duabus rationibus, BE ad EF et EF ad DG. Ratio autem EF ad DG per eandem quartam sexti *elementorum* est sicut FC ad CD; igitur ratio ipsius BA ad AD concinnatur ex ratione BE ad EF, et ex ratione FC ad CD. 76v

Igitur duabus rectis lineis in aliquo puncto se ad invicem tangentibus, et a reliquis earum terminis aliae duae rectae lineae fuerint actae, priores rectas duas lineas et se ad invicem secantes, erit ratio unius tangentium ad superiorem eius particulam composita ex duabus aliis rationibus, ex ratione videlicet totius conterminae rectae lineae ad superiorem eius portionem, et ex ratione inferioris sectionis alterius conterminae tangenti alteri ad totam ipsam confinem; q. o. o.

Propositio V.

Si duae rectae lineae in puncto aliquo se vicissim tangant, et ab earum reliquis | terminis biduae [!] rectae lineae illas et se[1]) ad invicem secantes ductae fuerint, erit ratio inferioris sectionis unius contingentium ad ipsius superiorem sectionem constructa ex duabus aliis, ex ratione videlicet infernae sectionis conterminae ipsius rectae lineae ad sectionem supernam, et ex ratione inferioris particulae alterius tangentis ad totam ipsam tangentem. 77r

Igitur iuxta diffinitionem primam huius duae rectae lineae AB et CA se tangant super A puncto, et a reliquis earum finibus B, C rectae lineae BE et CD ductae se vicissim secent super F et tangentes rectas lineas in D, E punctis, AB quidem in D et AC super E puncto. Dico, rationem BD[2]) ad DA componi ex ratione BF ad FE, et ex ratione EC ad CA.



Igitur per XXXI primi *elementorum* Euclidis ipsi CD [parallela] sit acta GA, et BE in partem E producta con|currat ipsi AG in puncto G. Et quia in triangulo ABG recta linea FD parallela est lateri AG, secans duo reliqua latera AB, BG, igitur per secundam sexti eorundem ratio ipsius BD ad DA est sicut BF ad FG. Et quoniam ipsi CD [parallela] acta est AG, igitur per XXIX primi eorundem *elementorum* duo anguli coalterni CAG et ACF sunt aequales; item per eandem duo anguli AGF et CFG sunt aequales; et per XV primi eorundem anguli duo CEF et AEG, quia sunt ad verticem, aequales probantur. Ergo per quartam sexti eorundem ratio EF ad EG est sicut CE ad EA. Et quia per XVIII quinti: „Si divisae magnitudines 77v

1) Hs. hat *si*. 2) Hs. hat D statt BD.

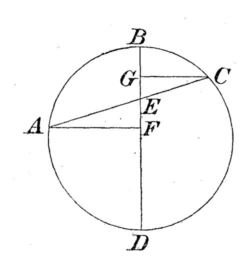
proportionales fuerint, compositae quoque proportionales erunt", igitur ratio EF ad FG est sicut ratio EC ad CA. At prius ostensum fuit, rationem ipsius BD ad DA esse sicut BF ad FG; accepta autem inter BF et 78r FG rectas lineas media EF, igitur per diffi|nitionem quintam huius ratio BF ad FG construitur ex ratione BF ad FE et EF ad FG. Igitur per XI quinti *elementorum:* „Quae eisdem sunt eaedem rationes, et ad invicem sunt eaedem", ratio ipsius BD ad DA composita [est] ex ratione BF ad FE, et ex ratione ipsius EF ad FG. Haec autem demonstrata fuit esse aequalis rationi EC ad CA; igitur ratio BD ad DA componitur ex ratione BF ad FE et EC ad CA.

Ergo si duae rectae lineae in puncto aliquo se vicissim tangant, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio VI.

Si in circulo duae sectiones ad punctum unum utrisque commune sibi invicem fuerint additae, compositae iam sectioni subtensam basim diameter ad illud commune punctum educta duobus sinibus duarum partilium sectionum proportionaliter secabit. |

78v In circulo ABC duae sectiones AB et BC sint compositae in B puncto, et subtensam basim AC secet diameter DB in puncto E, et protractis ab A et C punctis ad BD dimetientem perpendicularibus AF et CG, quarum [?] per tertiam tertii *elementorum* constat et per diffinitionem secundam huius esse AF[1]) quidem sinum sectionis AB, CG autem sinum sectionis BC. Dico igitur, rationem AE ad EC esse sicut est sinus AF ad sinum CG.



Quoniam autem anguli apud F et G puncta recti sunt, atque eam ob rem aequales, et duo anguli AEF et CEG, quia ad verticem sunt, etiam aequales[2]), igitur per communem sententiam: „Si ab aequalibus aequalia demantur [etc.]"[3]), anguli duo EAF et ECG erunt etiam aequales. Tres enim anguli trianguli AEF sunt aequales tribus angulis trianguli ECG; utrique enim per XXXII primi *elementorum* 79r Euclidis sunt duobus rectis | aequales. Ergo duo triangula AEF et CEG sunt aequiangula. Igitur per quartam sexti eorundem ratio ipsius AE ad EC est sicut ratio sinus AF sectionis AB ad sinum CG sectionis BC.

Igitur si in circulo duae sectiones ad punctum unum utrisque commune sibi ad invicem fuerint additae, subtensam compositae sectioni basim semidiameter ad commune illud punctum educta duarum partilium sectionum duobus sinibus proportionaliter secabit.

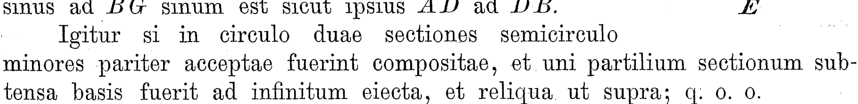
Propositio VII.

Si[4]) in circulo duae sectiones semicirculo minores pariter acceptae fuerint compositae, et uni partilium sectionum subtensa

1) Hs. hat *sinus AF* statt AF. 2) Euclidis *elementa* I, 15.
3) Ibid. κοιναὶ ἔννοιαι 3. 4) Hs. hat *Sint.*

basis fuerit ad infinitum eiecta, et per reliquum finem alterius sectionis dimetiens circuli ad easdem partes protractus concurrat eiectae basi, erit ratio sinus compositae sectionis | [79v] ad sinum partilis unius sectionis sicut ratio eiectae basis alterius sectionis usque in concursum dimetientis in easdem partes producti ad exteriorem sui portionem, inter eundem concursum et circumferentiam iacentem.

In circulo ABC duae sectiones AB et BC pariter compositae in puncto B sint minores semicirculo. Et subtensa basis AB eiiciatur in partem[1]) B ad infinitum, et diameter EC in easdem partes educta occurrat basi AB in puncto D. Et per XII primi *elementorum* in CE dimetientem deductis perpendicularibus AF et BG, erit per tertiam tertii eorundem et per diffinitionem secundam huius AF sinus sectionis ABC et BG sinus sectionis BC. Dico, rationem AF [sinus] sectionis ABC ad BG sinum sectionis BC esse sicut [rationem] AD rectae lineae ad DB rectam lineam.



Et quia anguli apud | [80r] F et G puncta sunt recti, et duobus triangulis BDG et[2]) ADF communis est angulus ADF, igitur per XXXII primi *elementorum* duo trianguli ADF et BDG sunt aequianguli; ergo per quartam sexti *elementorum* Euclidis ratio AF sinus ad BG sinum est sicut ipsius AD ad DB.

Igitur si in circulo duae sectiones semicirculo minores pariter acceptae fuerint compositae, et uni partilium sectionum subtensa basis fuerit ad infinitum eiecta, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio VIII.

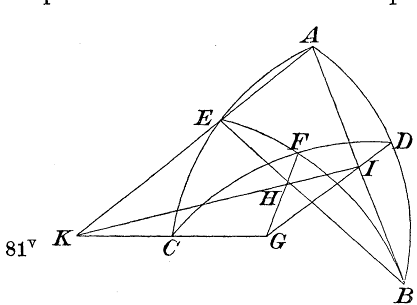
Si in sphaerica superficie magnorum circulorum duae sectiones singulae semicirculum non exuperantes ad unum congrediantur punctum, et a reliquis earum finibus duae sectiones aliae singulae semicirculo minores educantur, | [80v] quae se ad invicem et congressas[3]) secent, erit ratio sinus infernae portionis unius congredientis ad sinum superae particulae concinnata ex duabus[4]) aliis, ex ratione sinus inferae particulae unius secantis et conterminae sectionis ad sinum supernae suae portionis, et ex ratione sinus inferae portionis alterius sectionis congressae ad sinum eiusdem congressae.

Duo magnorum orbium segmenta BA et AC iuxta X[5]) diffinitionem primi congrediantur in puncto A; et a reliquis eorum finibus B et C educantur aliae magnorum sectiones BE et CD, se ad invicem secantes super puncto F, congressa vero segmenta BA et AC super punctis D et E, segmentum quidem BA in D, segmentum autem AC in E; et nulla sectionum semicirculo maior | [81r] sit. Dico, rationem sinus BD sectionis ad sinum seg-

1) Hs. hat *partes*. 2) Hs. hat *ad*. 3) Hs. hat *congressus*.
4) Hs. hat *duobus*. 5) Hs. hat *XIV*.

menti DA constructam esse ex duabus aliis, ex ratione sinus sectionis BF ad sinum sectionis FE, et ex ratione sinus segmenti EC ad sinum segmenti CA.

Ductis AB, BE et AE basibus, suscipiaturque sphaerae centrum G[1]), a quo ductis semidiametris GC, GD[2]) et GF, et semidiameter GD secabit basim AB in puncto I, et semidiameter GF secabit basim BE super H puncto. Deinde GC et AE in partes C, E protractae concurrant in puncto K. Et connexis I, H, K erunt tria puncta I, H, K in una recta linea; ipsa enim sunt in communi sectione duorum planorum circuli DFC et trianguli ABE, quae quidem sectio per tertiam undecimi *elementorum* Euclidis linea est recta.



At quia duae rectae lineae BA, AK, ad punctum A se adinvicem contingentes, alias duas a suis | reliquis finibus B et K eductas se et vicissim secantes suscipiunt, quae sunt BE et KI, igitur per quintam huius ratio BI ad IA constructa est ex ratione BH ad HE et ex ratione EK ad KA. At quia per sextam[3]) huius ratio BI ad IA est sicut ratio sinus sectionis BD ad sinum sectionis DA; et per eandem ratio BH ad HE est sicut ratio sinus segmenti BF ad sinum segmenti FE, igitur ratio sinus segmenti BD ad sinum segmenti DA composita ex ratione sinus segmenti BF ad sinum segmenti FE, et ex ratione EK ad KA. Sed ratio EK[4]) ad KA aequalis est per septimam huius rationi sinus EC sectionis ad sinum segmenti CA. Igitur ratio sinus segmenti BD ad sinum segmenti DA concinnatur ex ratione sinus sectionis BF ad sinum segmenti FE, et ex ratione sinus segmenti EC ad sinum[5]) | segmenti CA.

81ᵛ 82ʳ

Ergo si in sphaerica superficie magnorum circulorum duae sectiones, et reliqua ut supra; q. de[monstrare] o.

Propositio IX.

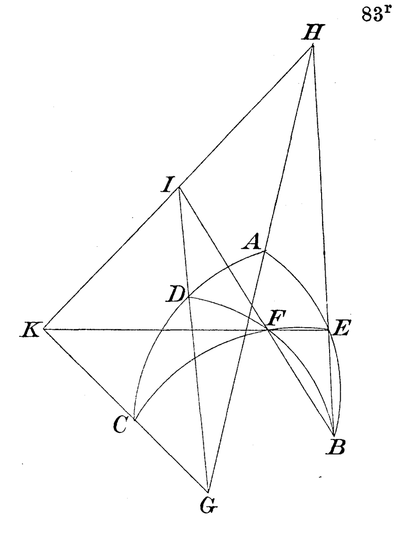
Si duo magnorum circulorum segmenta in sphaerica superficie ad punctum unum congrediantur, et a reliquis eorum finibus duae magnorum sectiones orbium fuerint deductae, quae se adinvicem et congressas secent sectiones, nullumque ex his segmentis semicirculum exuperat, erit ratio sinus unius congredientis segmenti ad sinum superae particulae suae constructa ex duabus[6]) [aliis], ex ratione sinus conterminae sectionis ad sinum superae portionis suae, et ex ratione sinus inferae particulae alterius secantis segmenti ad sinum eiusdem segmenti secantis. |

82ᵛ In proposita sphaera ABC duo magnorum orbium segmenta BA et AC iuxta diffinitionem X[7]) primi congrediantur in puncto A; et ab eorum

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 2. 2) Hs. hat CD.
3) Hs. hat *sextam* korr. aus *septimam.* 4) Hs. hat FK.
5) Hs. hat *signum.* 6) Hs. hat *duobus.* 7) Hs. hat XIV.

reliquis finibus B et C aliae duae magnorum orbium sectiones BD et CE deductae se vicissim secent in puncto F, at congressas sectiones BA et AC in punctis D et E, AB quidem in puncto E, AC vero in puncto D; horumque segmentorum existat nullum semicirculo maius. Dico, rationem sinus segmenti BA ad sinum superae eius particulae AE ex aliis construi duabus, ex ratione sinus segmenti BD ad sinum suae portionis superae DF, et ex ratione sinus particulae FC ad semibasim seu sinum totius segmenti CE.

Igitur per primum librum Theodosii *de sphaericis triangulis* [1]) ipsius sphaerae ABC centrum suscipiatur, sitque id punctum G; et agantur bases EB, BF et FE; | ducantur quoque semidiametri AG et GD et GC. Eiiciantur deinde GA semidiameter et BE basis in partes A et E, donec concurrant in puncto H; similiter quoque basis BF et semidiameter GD in partes D et F eiiciantur, quoad concurrant in puncto I. Et productis GC et HI ad partes C et I, donec concurrant in puncto K, et connexis F, K punctis, erunt duae rectae lineae EF et FK in directum compositae et una linea recta; utraque enim est in communi sectione duorum planorum trianguli BHI et orbis EFC; haec autem sectio per III undecimi *elementorum* Euclidis linea recta est. 83r



Et quoniam recta linea BH contingit rectam lineam HK in puncto H, atque ab earum finibus B et K duae deducuntur rectae lineae BI et KE, se ad invicem secantes in puncto F | et contingentes lineas in E et I punctis, igitur per quartam huius ratio BH rectae lineae ad HE particulam concinnatur ex duabus [2]) aliis, ex ratione rectae lineae BI ad suam portionem IF, et ex ratione FK particulae ad totam rectam lineam KE. At per septimam huius ratio BH rectae lineae ad HE particulam est sicut ratio sinus sectionis BA ad sinum sectionis AE; et per eandem ratio rectae lineae BI ad eius particulam IF est sicut sinus sectionis BD ad sinum sectionis DF; rursus per eandem et ex rationis eiusdem permutatione ratio rectae lineae FK ad rectam lineam KE est sicut ratio sinus segmenti FC ad sinum CE segmenti. Igitur ratio rectae lineae BH ad suam [3]) particulam HE construitur per diffinitionem sextam [4]) huius ex ratione sinus sectionis BD ad sinum sectionis DF, et ex ratione sinus segmenti FC ad sinum CE segmenti. Et quia iam ostensum fuit, rationem | rectae lineae BH ad particulam HE esse aequalem rationi sinus sectionis BA ad sinum sectionis AE, igitur per eandem diffinitionem: „Rationibus aequalibus rationes construuntur aequales,“ ratio sinus sectionis BA ad sinum sectionis AE componitur ex 83v 84r

1) Hs. hat *de Sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Vgl. Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 2. 2) Hs. hat *duobus*. 3) Hs. hat *sui*. 4) Hs. hat *octavam*.

ratione sinus sectionis BD ad sinum sectionis DF[1]), et ex ratione sinus sectionis FC ad sinum CE segmenti.

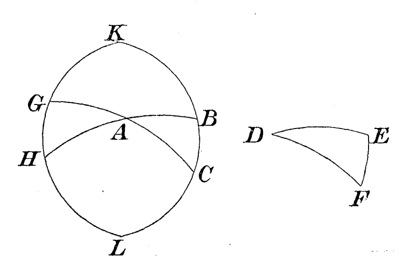
Igitur si duo magnorum segmenta orbium in sphaerica superficie ad unum congrediantur punctum, et reliqua ut supra; q. d. o.

Propositio X.

Datis duobus triangulis sphaericis, qui ex magnorum segmentis constant orbium, fueritque angulus unius aequalis angulo 84ᵛ uni alterius trianguli, alterque angulus trianguli unius | aequalis alteri angulo trianguli alterius, aut cum eodem constituens duos angulos duobus aequales rectis, erunt trianguli unius sinus duorum laterum, quorum neutrum comparatis adiacet angulis, proportionales sinibus duorum alterius trianguli laterum, quorum similiter subiectis neutrum adiaceat angulis.

Hanc Menelaus iuxta codicem, qui in fuit potestate mea[2]), demonstravit in propositione secunda libri tertii.

Sint igitur duo triangula sphaerica ex magnorum segmentis orbium constructa ABC et DEF, et angulus EDF sit aequalis angulo BAC, et angulus EFD aequalis angulo BCA, aut cum eo constituens duos angulos duobus aequales rectis. Dico, rationem sinus lateris AB ad sinum lateris BC esse sicut rationem sinus lateris DE ad sinum lateris EF.



[In primis constituat angulus BCA cum angulo EFD duos angulos duobus aequales rectis.] Ergo segmentum AC | 85ʳ in partem A producatur usque in G, et sit AG sectio aequalis lateri DF; et super AG ad punctum G iuxta doctrinam primam primi libri Menelai *de sphaericis triangulis*[3]) constituatur angulus AGH aequalis angulo EFD; et producta BA et GH segmenta concurrant in H puncto.

Et quoniam angulus GAH est ad verticem anguli BAC, igitur angulus GAH est aequalis angulo BAC[4]); at ex hipothesi angulus EDF angulo BAC est aequalis; ergo per communem sententiam: „Quae uni sunt aequalia, sibi invicem sunt aequalia"[5]), angulus EDF est angulo GAH aequalis, et per constructionem et hypothesim angulus AGH est aequalis angulo DFE, et latus AG trianguli AGH aequale lateri DF trianguli DEF. Et quoniam per XIV primi Menelai: „Si anguli duo unius trianguli sphaerici fuerint

1) Hs. hat BF.

2) Vielleicht der in der Vatikanischen Bibliothek sich befindliche Cod. Palat. lat 1351, membr., ca. 1300—25; vgl. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften XIV, S. 145—146. Nur diesem Codex und Cod. Marc. Venet. Cl XI. 90 entsprechen nämlich die von Werner angegebenen Satznummern im Menelaostexte, und letzterer Codex trägt keine Spur von Benutzung um das Jahr 1500.

3) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Vgl. Menelai *sphaerica* I, 1.

4) Menelai *sphaerica* I def. 4. 5) Euclidis *elementa, κοιναὶ ἔννοιαι* 1.

aequales duobus angulis alterius trianguli, duoque latera aequis adiacentia angulis aequalia, erunt duo reliqua unius latera aequalia duobus lateribus | reliquis alterius trianguli, quodque suo compari, et reliquus unius angulus 85v reliquo angulo alterius trianguli", igitur latus DE[1]) est aequale lateri AH, et GH latus aequale lateri EF. Producantur iam BC et GH segmenta, quousque concurrant in puncto K. Et sunt duo anguli AGH et ACB duobus aequales rectis; et quia duo anguli HGA et AGK duobus quoque rectis sunt aequales, ipsi sunt aequales duobus angulis HGA et ACB, et utrobique dempto communi angulo HGA remanent duo anguli AGK et ACB aequales per communem sententiam: „Si aequalibus auferuntur aequalia, reliqua sunt aequalia."[2]) Et quoniam duo anguli CGK et KCG supra CG basim in triangulo CGK sunt aequales, igitur per tertiam propositionem primi libri Menelai duo latera CK, KG sunt aequalia. Rursus quoniam duo magnorum segmenta orbium in sphaerica superficie congrediuntur in signo K, quae sunt CK et KH, et ab | eorum reliquis ducuntur finibus C 86r et H duae aliae magnorum sectiones orbium CG et HB, quae se vicissim secantes in puncto A dispescant duo segmenta CK et KH in punctis B et G, igitur per octavam huius ratio sinus segmenti HG ad sinum sectionis GK pangitur ex ratione sinus segmenti HA ad sinum AB segmenti, et ex ratione sinus BC sectionis ad sinum sectionis CK. At quia, velut ostensum fuit, CK segmentum aequale est segmento KG, igitur per communem sententiam: „Aequalia segmenta sinus habent aequales", sinus segmenti CK est aequalis sinui segmenti KG; ergo ratio sinus HG[3]) sectionis ad sinum GK segmenti concinnatur ex ratione [sinus segmenti HA ad sinum segmenti AB, et ex ratione] sinus segmenti BC ad sinum segmenti GK. Et quoniam, ut patuit, duae rationes HA sinus ad AB sinum et ipsius BC sinus ad GK sinum sunt aequales rationi sinus segmenti HG ad sinum segmenti GK, igitur per communem sententiam: „Si ab aequalibus | eadem dematur 86v ratio, reliquae rationes erunt aequales", ratio sinus sectionis HG ad sinum sectionis BC erit sicut ratio sinus sectionis HA ad sinum sectionis AB. Vicissim igitur ratio sinus sectionis AB ad sinum sectionis BC est sicut ratio sinus AH sectionis ad sinum segmenti HG. At AH segmentum ipsi DE segmento aequatur, et HG ipsi EF est aequale; igitur ratio sinus AB ad sinum BC est sicut ratio[4]) sinus DE ad sinum EF.

Ergo datis duobus in sphaerica superficie triangulis[5]), quae ex magnorum segmentis constant orbium, et reliqua ut supra.

Sit nunc angulus ACB aequalis angulo DFE. Igitur per communem sententiam[6]): „Quae sunt eidem aequalia, sibi sunt adinvicem aequalia"[7]), angulus AGH est aequalis angulo ACB. Producantur ergo HK et KC segmenta in partes H et C, donec concurrant in puncto L; et quia angulus HGC exterior est aequalis angulo GCK interiori et opposito, igitur | per 87r decimam primi Menelai duo segmenta CK et KG semicirculo sunt aequales. Et quia per aequalia[8]) duo orbes magni KBL et LGK a se invicem secantur,

1) Hs. hat DF. 2) Euclidis *elementa*, *κοιναὶ ἔννοιαι* 3. 3) Hs. hat HC.
4) Die Worte *sicut ratio* am Rande hinzugefügt. 5) Hs. hat *triangulus*.
6) Hs. hat *scientiam*. Die Verkürzungen *sciā̄m* und *snā̄m* sind aber leicht zu verwechseln. 7) Euclidis *elementa*, *κοιναὶ ἔννοιαι* 1.
8) Hs. hat *per I* [!] statt *per aequalia*.

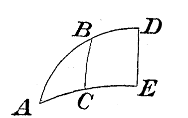
ergo per XV primi Theodosii[1]) de *sphaericis triangulis*[2]) KBL est quoque semicirculus, et communi segmento KC dempto relinquuntur GK et CL segmenta aequalia. Igitur ex communi sententia: „Aequalium sectionum aequales sunt sinus“, sinus CL sectionis idem est qui GK segmenti; et per tertiam propositionem huius duorum segmentorum LC et CK idem sinus est. Igitur sinus segmenti CK rursus aequalis est sinui segmenti KG. Rursus eodem modo demonstrabimus ut prius, rationem sinus segmenti AB ad sinum segmenti BC esse sicut rationem AH sinus ad sinum HG; igitur sicut rationem sinus segmenti DE ad sinum segmenti EF.

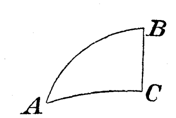
Ergo datis duobus triangulis sphaericis, quae de magnorum segmentis 87ᵛ orbium construuntur, angulusque unius trianguli fuerit aequalis | uni angulo alterius trianguli, alterque angulus eiusdem trianguli aequalis alteri angulo alterius trianguli, aut cum eodem duos constituens angulos aequales duobus rectis, erunt duo sinus duorum unius trianguli laterum, quorum neutrum comparatis adiacet angulis, proportionales duobus sinibus duorum alterius trianguli laterum, quorum neutrum quoque subiectis simul adiaceat angulis; q. d. o.

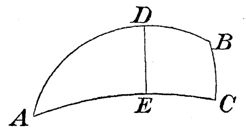
Propositio XI.

Si aliquis triangulus ex magnorum[3]) circulorum segmentis in sphaera concinnatus unum rectum contineat angulum, erit ratio sinus lateris, quod recto opponitur angulo, ad sinum[4]) unius segmentorum rectum angulum continentium, sicut ratio sinus maximi ad sinum anguli, cui idem circa eundem rectum angulum segmentum obiicitur. |

88ʳ Sit datus trigonus sphaericus ABC habens angulum ACB rectum. Dico, rationem sinus lateris AB ad sinum lateris BC esse sicut rationem totius sinus ad sinum anguli BAC, et sinum lateris eiusdem BA ad sinum lateris AC esse sicut sinum totum ad sinum anguli ABC.







AB latus aut erit quadrante minus aut maius aut quadrans. Sit in primis quadrante minus; et AB, AC[5]) latera producantur in partes B, C, donec utrumque sit quadrans, et sint producta ABD et ACE. Descripto magni orbis segmento DE ipsum est per diffinitionem octavam[6]) primi magnitudo anguli BAC; et quoniam utraque sectionum AD et AE est circuli quadrans magni, igitur punctum A polus est sectionis ED, et ABD et AEC [!] orbes circulum ED per primum librum Theodosii[7]) ad rectos

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 12. Diese Stelle zeigt, daß Werner die von Campanus kommentierte längere Theodosios-Übersetzung benutzte, die in Venedig 1518 zweimal und ferner im Jahre 1529 von Johs. Vögelin in Wien herausgegeben wurde. 2) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. 3) Hs. hat *magnis.* 4) Hs. hat *sinum* korr. aus *sinus.* 5) Es wird also $AC < 90^{0}$ vorausgesetzt. 6) Hs. hat *octavi.* 7) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 16 inv. & 15.

dispescunt angulos; igitur uterque duorum angulorum AED et ADE | rectus est. Et quia duobus triangulis DEA et ABC communis est angulus 88v BAC, et angulus ACB est aequalis angulo AED — uterque enim est rectus —, igitur per X huius ratio sinus AB lateris ad sinum lateris BC est sicut ratio sinus lateris AD ad sinum lateris DE. Est autem sinus AD segmenti totus per correlarium tertium huius, et sinus DE sectionis [sinus] magnitudinis anguli BAC, velut ostensum fuit; ergo ratio sinus lateris AB ad sinum lateris BC est sicut ratio totius sinus ad sinum magnitudinis anguli BAC.

Eodem modo ostendemus, rationem sinus lateris AB ad sinum lateris AC esse sicut sinum maximum ad sinum anguli ABC.

Igitur si aliquis triangulus ex magnorum[1]) orbium segmentis in sphaera concinnatus, et reliqua ut supra.

Iam AB et AC sectiones sint quadrantes. Erit quod proponitur ex se manifestum. Nam AB sectioni, quia qua|drans est, totus sinus subtenditur. 89r Et quia segmentum AC perpendiculariter seu ad angulos rectos secat BC sectionem, igitur A polus est orbis BC[2]), et AC sectio quoque circuli magni quadrans; igitur per 8 diffinitionem primi BC sectio magnitudo est anguli BAC. Ergo ratio sinus AB lateris ad sinum lateris BC est sicut ratio maximi sinus ad sinum anguli BAC.

Sit iam AB latus magni orbis quadrante maius. Et quia BCA angulus rectus est, igitur AC quadrantem exuperat.[3]) Secetur ex AB segmentum AD quadrans existens; item ex AC latere quadrans abscindatur AE, et descripta sectione DE magni orbis erunt anguli apud D et E signa recti.[4]) Et quoniam duobus triangulis ABC et ADE communis est angulus BAC, et angulus AED est aequalis angulo ACB — uterque enim rectus —, igitur per X huius ratio semibasis AD ad sinum DE | sectionis 89v est sicut[5]) ratio sinus lateris AB ad sinum lateris BC. Et quoniam sinus AD sectionis per correlarium tertium maximus est, et per diffinitionem 8 [primi] DE magnitudo est anguli DAE, igitur ratio sinus AB lateris est ad sinum lateris BC sicut ratio maximi sinus ad sinum anguli DAE.

Igitur si aliquis triangulus ex magnorum orbium segmentis in sphaera concinnatus, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Aliter ut Geber Arabs.[6])

Et AB latus quadrante sit inferius, quare et AC latus quadrante erit multo minus; maiori enim angulo latus maius opponitur per VII primi Menelai in *sphaericis triangulis*.[7]) Nam angulus ACB rectus est, et CBA acutus; ergo AC latus minus est AB latere. Et quia AB latus ex hipothesi quadrante inferius est, igitur multo magis sectio AC quadrante | minor est. Producantur duo latera AB et AC in partes B et C, donec 90r

1) Hs. hat *magnis*. 2) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13 & 16 inv.
3) Dies ist nicht notwendig, wenigstens nur, wenn $\angle A < 90^\circ$; vgl. oben I, 22 & 50. 4) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15 & 16 inv.
5) *sicut* am Rande hinzugefügt.
6) Vgl. Gebri filii Affla Hispalensis, *De astronomia IX*, Norimbergae 1534, I, 12—13.
7) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Es wird also vorausgesetzt, daß $\angle C < 90^\circ$ ist, was nicht notwendig ist.

utrumque in quadrantem crescat, ita ut ABD et ACE segmentorum utrumque quadrans existat. Et producto segmento DE magni orbis ipsum est magnitudo anguli BAC per diffinitionem 8 primi. Suscipiaturque centrum sphaerae, et sit G; et scribantur semidiametri tres GD, GE et GA. Protrahantur iterum DI sinus DE segmenti, et sinus BH segmenti BC, et BF semibasis dupli sectionis AB.

Et quia duo anguli AFB et AGD sunt aequales — uterque enim rectus —, et duae rectae BF et DG in eodem sunt plano orbis ABD, igitur per XXVIII primi *elementorum* Euclidis duae rectae lineae BF et GD sunt adinvicem parallelae. Et quoniam DI et BH rectae lineae plano AEG sunt ad rectos angulos, igitur ipsae per sextam undecimi eorundem *elementorum* sunt parallelae. Et con- 90v nexis | F, H punctis, et quoniam duae rectae lineae FB, BH sese invicem tangentes in eodem non sunt plano [lineis DG, DI], igitur per decimam undecimi eorundem angulus FBH aequalis est angulo GDI; et angulus FHB aequalis est angulo GID; uterque enim rectus est per diffinitionem secundam libri XI *elementorum* Euclidis[1]): „Recta linea ad planum recta est etc." Igitur duo triangula GDI et FBH sunt aequiangula; ergo per quartam sexti eorundem *elementorum* ratio FB ad BH est sicut ratio ipsius GD ad DI. Et quia BF sinus est segmenti AB, et BH sinus est sectionis BC, et GD sinus maximus, DI autem sinus DE segmenti diffinientis magnitudinem anguli DAE [, igitur ratio sinus lateris AB ad sinum lateris BC est sicut ratio totius sinus ad sinum anguli BAC].

Igitur si aliquis triangulus ex magnorum segmentis orbium in sphaera concinnatus unum rectum possideat angulum, et reliqua ut supra; q. o. o. |

91 Idem quoque eodem ostendemus modo, si latus obversum angulo recto quadrantem excesserit.

Nam figura resumpta eadem ponendum est in triangulo ADE latus AD maius quadrante magni circuli. Et quia angulus AED ex hipothesi rectus est, igitur et latus AE quadrante quoque superius est.[2]) Ex duobus ergo lateribus AD, AE resecentur duo quadrantes AB et AC; et descripto segmento BC magni orbis ipsum est aequale magnitudini anguli BAC. Deinde simili modo propositionem concludemus.

Aliter ut Georgius Purbachius.

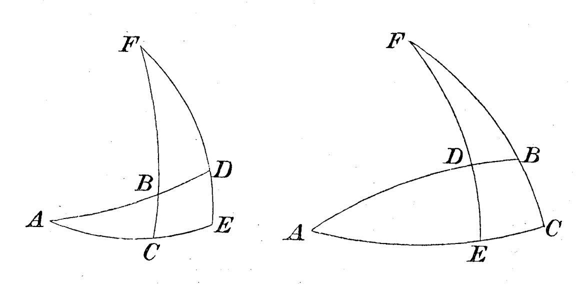
Sequens Georgii Purbachii demonstratio subiicit unumquodque trium laterum dati trigoni minus esse quadrante magni orbis.[3])

1) Nach Zamberti Euclidis *elementa* XI, def. 2; in Heibergs Ausgabe XI, def. 3. 2) Dies ist nur notwendig, wenn $\angle A < 90^\circ$ ist; vgl. oben.

3) Vgl. Ioannes Regiomontanus, *In Ptolemaei magnam compositionem, quam Almagestum vocant, libri tredecim,* Noribergae 1550, I, 18. Von diesem Werke, sog. *Epitome Almagesti,* sind die Bücher I—VI von Georg von Peurbach verfaßt; siehe die Vorrede des Regiomontanus an Kardinal Bessarion.

Sit igitur propositus triangulus ABC habens ACB rectum[1]), | et sit 91v quodlibet trium laterum AB, BC et CA quadrante inferius. Dico, rationem semibasis segmenti AB ad sinum BC segmenti esse sicut rationem maximi sinus ad semibasim anguli BAC.

Eiiciantur ergo latera AB et AC in partes B et C, AB quidem usque in D, AC vero usque in E; et utrumque productorum segmentorum ABD et ACE sit quadrans circuli magni; et magni orbis sectione DE descripta ipsa erit magnitudo anguli BAC per diffinitionem VIII primi huius. Eiiciantur quoque DE et BC segmenta ad partes B, D, quousque concurrant in puncto F.



Et quoniam duae sectiones CF et FE secant orbem ACE per hipothesim ad rectos angulos, igitur utrumque segmentorum CF et FE per primum librum Theodosii in *sphaericis triangulis*[2]) transit per polum orbis ACE. Igitur F punctus circuli ACE polus est; et utraque sectionum CF et FE quadrans est magni orbis.[3]) Et duo magnorum orbium segmenta AE et | EF ad punctum E congrediantur; 92r atque ab eorum finibus A et F aliae duae sectiones deductae AD[4]) et FC secant se ad invicem in puncto B, et congredientes sectiones AE et FE in D et C punctis. Igitur per IX huius ratio sinus segmenti FE ad sinum segmenti ED pangitur ex duabus[5]) aliis, ex ratione sinus FC sectionis ad sinum segmenti CB, et ex ratione [sinus BA sectionis ad sinum segmenti AD. Ergo etiam ratio] semibasis FE ad sinum ED construitur ex ratione sinus BA ad sinum AD sectionis, et ex ratione sinus FC sectionis ad sinum BC segmenti; construentes enim rationes perturbatae eandem compingunt per aequam proportionem seu per XXIIII quinti *elementorum* Euclidis.[6]) Et quoniam sinus CF segmenti aequalis est semibasi sectionis AD — horum namque segmentorum utrumque quadrans magni orbis subiicitur —, igitur per quintam[7]) diffinitionem huius ratio sinus sectionis BA ad semibasim BC construitur ex eisdem rationibus, quibus ratio | FE sinus constat ad sinum 92v ED sectionis. At quia per sextam[8]) diffinitionem aequalibus rationibus rationes panguntur aequales, ergo ratio semibasis segmenti AB ad semibasim BC sectionis aequalis est rationi sinus segmenti FE ad sinum ED segmenti. Sinus autem sectionis FE per correlarium tertium est maximus; et DE sectio magnitudo est, ut patuit, anguli BAC. Igitur ratio semibasis segmenti AB ad sinum segmenti BC est ut ratio semibasis maximae ad sinum anguli BAC.

1) Nach *rectum* hat die Hs. die Worte: *cui oppositum sit latus,* welche zu streichen sind.
2) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Vgl. Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13.
3) Ibid. I, 16 inv. 4) Hs. hat AB. 5) Hs. hat *duobus.* 6) Falscher Verweis.
7) Hs. hat *quintam* korr. aus *septimam.* 8) Hs. hat *sextam octavam.*

Igitur si triangulus[1]) aliquis ex magnorum segmentis orbium in sphaera concinnatus, et reliqua ut supra; quod rursus osten[dere] opor[tuit].

Verum AB latere quadrantem exuperante propositionem ita demonstrabimus, quasi praecedentis vestigia demonstrationis ingredientes modica contingente variatione.

Esto nunc latus AB recto subtensum angulo quadrante longius; atque ex eo resecetur AD quadrans; et sectio magni circuli, quae sit DE, ad 93r AC segmentum ad rectos | angulos describatur; ac iterum productis BC et DE segmentis in partes B, D, quoadusque in puncto F concurrant. Et quoniam per IX ratio semibasis segmenti FC ad sinum sectionis CB constructa est ex duabus[2]) aliis, ex ratione sinus segmenti FE ad semibasim sectionis ED, et ex ratione sinus DA sectionis ad semibasim segmenti AB. Sumpta autem inter FC et CB sinus media ED semibasi, igitur per diffinitionem quintam huius ratio sinus segmenti FC ad semibasim sectionis CB pangitur ex ratione sinus sectionis FC ad semibasim segmenti ED, et ex ratione semibasis ED sectionis ad sinum segmenti CB. At quia duo segmenta FC et FE sunt aequalia — utrumque enim est quadrans circuli —, igitur per communem sententiam aut per XXIX tertii *elementorum* Euclidis eisdem segmentis FC et FE aequales sunt semibases. Et quoniam per VII quinti eorundem *elementorum:* „Aequales magnitudines ad eandem | 93v unam habent rationem", igitur ratio sinus segmenti FC ad semibasim sectionis ED est ut ratio sinus FE sectionis ad semibasim ED segmenti. Igitur per VIII diffinitionem huius[3]) reliqua ratio sinus ED segmenti ad semibasim sectionis CB est ut reliqua ratio semibasis DA segmenti ad semibasim segmenti AB. At quia per XVI quinti eorundem *elementorum:* „Si magnitudines quatuor fuerint proportionales, vicissim quoque proportionales erunt", igitur semibasis AB segmenti ad sinum BC sectionis est ut sinus segmenti AD ad semibasim sectionis DE. Est autem ex hypothesi sinus AD sectionis maximus, et per diffinitionem VIII primi ED sectio magnitudo anguli BAC.

Igitur si triangulum aliquod in sphaera ex magnorum segmentis concinnatum[4]) orbium rectum unum contineat angulum, erit ratio semibasis lateris, quod recto subtenditur angulo, ad sinum alterius laterum, quae 94r rectum complectuntur angulum, velut ratio maximae se|mibasis ad sinum anguli, cui latus idem circa rectum angulum subtenditur; quod fuit demonstrandum.

Propositio XII.

In triangulo sphaerico rectum unum habente angulum, cuius unumquodque trium laterum extiterit quadrante minus, erit ratio sinuum subtendentium duo latera, quae unum acutum comprehendunt angulum, maioris inquam sinus ad minorem, velut ratio sinus complementi reliqui lateris ad sinum completionis eiusdem acuti anguli.

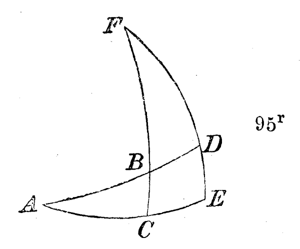
Sit triangulus sphaericus ABC angulum ACB rectum habens, et unumquodque trium laterum AB, BC et CA quadrante minus. Igitur per 94v III propositionem primi uterque reliquorum angulorum ABC et $B|AC$

1) Hs. hat *triangulis.* 2) Hs. hat *duobus.* 3) Falscher Verweis.
4) Hs. hat *concinnetur.*

acutus est. Producantur duo latera AB et AC in partes B et C, donec utrumque quadrans fiat, et sint duo quadrantes ABD et ACE; describaturque ED sectio magni orbis; et producatur CB in partem B, donec ipsi ED segmento in eandem partem eiecto ocurrat [!] in puncto F. Et quoniam anguli circa C et E puncta recti sunt, igitur utrumque segmentorum CBF et FDE orbis magni quadrans est.[1]) Dico, quod ratio semibasis segmenti AB ad sinum AC sectionis est ut sinus sectionis BF ad semibasim FD segmenti.

Et quia duo anguli ABC et DBF sunt ad verticem, igitur alter alteri est aequalis. At per XI ratio sinus AB segmenti ad sinum AC sectionis est sicut [ratio] maximi sinus ad sinum anguli ABC seu sui aequalis DBF; et per eandem ratio semibasis segmenti BF ad semibasim FD sectionis est etiam ut ratio maximi sinus ad sinum anguli ABC. Igitur per XI quinti *elementorum* Euclidis: „Rationes, | quae eidem sunt eaedem, et adinvicem sunt eaedem", ratio semibasis BA segmenti ad sinum segmenti AC est sicut ratio sinus sectionis BF ad semibasim FD segmenti.

95r



Ergo in triangulo sphaerico rectum unum habente angulum, cuius unumquodque trium laterum extiterit quadrante minus, erit ratio sinuum duo subtendentium latera, quae unum acutum comprehendunt angulum, maioris inquam sinus ad minorem, velut ratio sinus complementi reliqui lateris ad semibasim completionis eiusdem anguli acuti; quod fuit demonstrandum.

Non aliter quoque ostendemus, rationem sinus segmenti AB ad sinum sectionis BC esse velut rationem maximae semibasis complementi lateris AC ad sinum complementi anguli ABC.

Aliter ut Georgius Purbachius.[2])

Manente eodem schemate erit per VIII ratio semibasis segmenti FD ad sinum sectionis DE constructa ex duabus, ex ra|tione sinus sectionis FB ad semibasim segmenti BC, et ex ratione sinus segmenti AC ad semibasim maximam Sumpto igitur sinu sectionis DE medio inter sinum segmenti FD et semibasim FB, igitur ratio semibasis FD ad FB semibasim [construitur ex tribus aliis, ex ratione semibasis DE ad FB semibasim,] et ex ratione FB sinus ad BC sinum, atque ex ratione semibasis AC ad sinum maximum. Sed duae rationes semibasis DE ad semibasim FB et semibasis FB ad BC sinum pangunt rationem DE sinus ad sinum BC; ergo ratio semibasis FD ad FB sinum ex duabus constat, ex ratione semibasis DE ad BC sinum, et ex ratione sinus CA ad sinum maximum. At per XI huius atque per XVI quinti *elementorum* Euclidis: „Si magni-

95v

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 13 & 16 inv.

2) Vgl. Ioannes Regiomontanus, *In Ptolemaei magnam compositionem, quam Almagestum vocant, libri tredecim,* Noribergae 1550, II, 33. Von diesem Werke, sog. *Epitome Almagesti,* sind die Bücher I—VI von Georg von Peurbach verfaßt; siehe die Vorrede des Regiomontanus an Kardinal Bessarion.

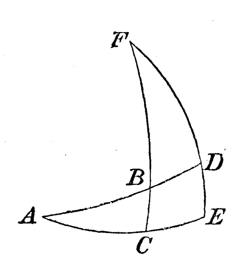
tudines proportionem habuerint, vicissim quoque proportionales erunt", ratio DE sinus ad semibasim BC est sicut [ratio] maximi sinus ad AB sinum. Ergo ratio semibasis FD ad FB sinum pangitur ex duabus, ex ratione maximi 96r sinus ad sinum AB, et ex ratione semibasis CA ad maximam[1]) semi|basim. Sed hae construunt rationem sinus CA ad AB sinum; igitur ratio sinus DF ad FB semibasim est sicut sinus CA ad sinum AB. Ergo per correlarium quartae quinti eorundem *elementorum* semibasis BF ad FD sinum est ut sinus AB ad AC[2]) semibasim.

Igitur in triangulo sphaerico rectum unum habente angulum, cuius unumquodque trium laterum quadrante minus extiterit, et reliqua ut supra.

Propositio XIII.

In triangulo sphaerico, qui unum rectum possidet angulum, et unumquodque trium laterum quadrante minus, ratio sinus complementi unius duorum laterum rectum continentium angulum ad semibasim completionis lateris recto subtensi angulo est sicut ratio sinus maximi ad sinum complementi alterius laterum rectum angulum continentium. |

96v Ut in praemissa figuratione supplementum sectionis AB est BD segmentum, et complementum CB segmenti est BF sectio, et complementum AC segmenti est CE sectio. Dico, sinum BF segmenti ad semibasim segmenti BD esse sicut semibasim FC sectionis, per correlarium tertiae quae est sinus maximus, ad semibasim CE.



Et quoniam BDF angulus est rectus, quem in triangulo BDF subtendit latus BF, et per diffinitionem VIII primi CE magnitudo est anguli BFD, igitur per XI huius sinus segmenti FB ad sinum sectionis BD est sicut maximus sinus, id est semibasis quadrantis FC, ad sinum sectionis CE.

Ergo sinus complementi sectionis CB ad semibasim completionis segmenti AB est sicut maximus sinus, id est semibasis segmenti FC, ad sinum complementi sectionis AC; quod demonstrandum erat.

97r Rursus dico, quod sinus complementi se|ctionis AC ad sinum suppletionis[3]) segmenti AB sit sicut sinus maximus ad sinum suppletionis segmenti CB.

Et quia, velut ostensum est, sinus maximus ad semibasim segmenti CE est sicut sinus FB sectionis ad semibasim BD segmenti, igitur vicissim per XVI quinti *elementorum* Euclidis: „Si magnitudines quatuor proportionem habuerint, vicissim quoque proportionales erunt", sinus segmenti CE ad sinum BD sectionis est sicut semibasis sectionis FC, idest maximus[4]) sinus, ad sinum segmenti BF. Est autem CE supplementum segmenti CA, et DB supplementum sectionis BA, et FB completio segmenti BC, et FC quadrans.

1) Hs. hat *maximae ad CE* statt *CA ad maximam*.
2) Hs. hat *AC ad AB* statt *AB ad AC*.
3) Hs. hat *suppletionis* korr. aus *completionis*. 4) Hs. hat *maximi*.

Rursus ergo in triangulo sphaerico ABC sinus complementi sectionis AC ad sinum suppletionis segmenti AB est sicut maximus sinus ad sinum complementi alterius circa rectum angulum lateris; quod iterum ostendendum erat. |

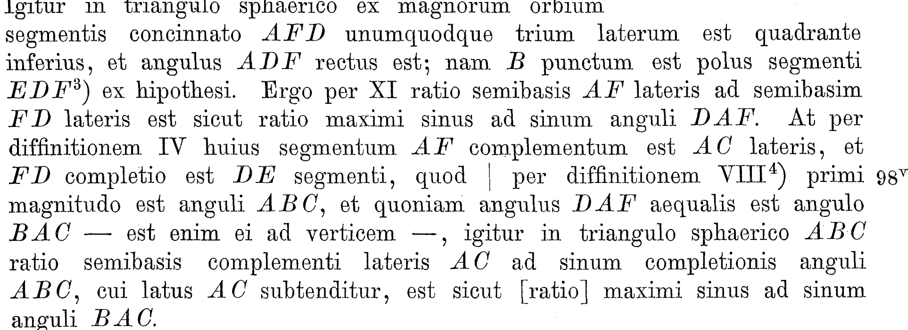
Propositio XIV.

97ᵛ

In triangulo sphaerico rectangulo, unumquodque trium laterum quadrante minus habente, ratio sinus suppletionis lateris alteri acutorum angulorum subtensi ad semibasim supplementi eiusdem anguli acuti erit sicut ratio maximi sinus ad sinum reliqui acuti anguli.

Sit triangulus sphaericus ABC habens angulum ACB rectum, et unumquodque laterum quadrante minus, et utrumque ex reliquis angulis per III propositionem primi acutum. Dico igitur, rationem sinus complementi lateris AC ad semibasim complementi anguli ABC esse, ut est ratio maximi sinus ad semibasim anguli BAC, et rationem sinus suppletionis lateris BC ad semibasim supplementi anguli BAC esse | sicut rationem maximae semibasis ad sinum anguli ABC.

98ʳ



Igitur duo latera AB, BC in partes A, C producantur, donec utrumque quadrans fiat[1]); et sunt hi quadrantes BAD, BCE. Et descripto magni orbis segmento ED duae sectiones AC et DE in partes A et D eiiciantur, donec invicem concurrunt in puncto F.

Et quia anguli iuxta C et E puncta recti sunt, igitur duae sectiones CAF et FDE sunt quadrantes.[2]) Igitur in triangulo sphaerico ex magnorum orbium segmentis concinnato AFD unumquodque trium laterum est quadrante inferius, et angulus ADF rectus est; nam B punctum est polus segmenti EDF[3]) ex hipothesi. Ergo per XI ratio semibasis AF lateris ad semibasim FD lateris est sicut ratio maximi sinus ad sinum anguli DAF. At per diffinitionem IV huius segmentum AF complementum est AC lateris, et FD completio est DE segmenti, quod | per diffinitionem VIII[4]) primi magnitudo est anguli ABC, et quoniam angulus DAF aequalis est angulo BAC — est enim ei ad verticem —, igitur in triangulo sphaerico ABC ratio semibasis complementi lateris AC ad sinum completionis anguli ABC, cui latus AC subtenditur, est sicut [ratio] maximi sinus ad sinum anguli BAC.

98ᵛ

Igitur in triangulo sphaerico rectangulo, unumquodque trium laterum quadrante minus habente, ratio sinus suppletionis lateris uni acutorum angulorum subtensi ad semibasim supplementi eiusdem anguli acuti erit sicut ratio maximi sinus ad semibasim reliqui acuti anguli; quod oportuit demonstrare.

Non aliter quoque demonstrabimus, rationem sinus completionis lateris BC esse ad sinum complementi anguli BAC ut [rationem] semibasis maximae ad semibasim anguli ABC.

1) Hs. hat *fiant*. 2) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13 & 16 inv.
3) Hs. hat CDF. 4) Hs. hat XVIII.

Propositio XV.

Si quatuor numeri proportionem habuerint, erit ut eo, quod 99r ex secundo | in tertium producitur, per primum diviso prodeat numerus quartus.

Sint quatuor[1]) numeri proportionales A, B, C, D, ut A ad B sic C ad D; ducaturque B in C producens E, quo diviso per A numerus F[2]) exeat. Dico, numerum F esse aequalem numero D.

Nam ex hypothesi quatuor numeri A, B, C, D sunt proportionales; igitur per XIX, VII[3]) *[e]lem[entorum]* Eucl[idis]: „Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo et quarto fit, aequus est ei, qui ex secundo et tertio", quod fit ex A in D aequum est ipsi E. At quia ex A in F quoque fit E, igitur E numerus ad utrumque D et F eandem habet rationem. At per IX quinti *elementorum* Euclidis ad quas eadem magnitudo eandem habet rationem, ipsae sunt aequales. Igitur F numerus est idem D numero.

Ergo si 4 numeri proportionem habuerint, erit ut eo, quod ex secundo in tertium producitur, per primum diviso prodeat numerus 4; quod fuit ostendendum. |

99v

Propositio XVI.

Si numeri tres continue fuerint proportionales, erit ut eo, quod ex secundo fit quadrato, per primum diviso exeat tertius numerus.

Sint tres numeri A, B, C continue proportionales, ut A ad B ita B ad C; et quadratus B numeri sit D, quo diviso per A exeat E. Dico, numerum E esse aequalem C numero.

Nam per XX, VII *elementorum* Euclidis[4]): „Si tres numeri continue fuerint proportionales, erit qui fit sub primo et tertio numerus aequalis ei, qui fit ex secundo quadrato", igitur quadratus D est aequalis ei, qui fit sub A et C numeris. At quia sub A et C fit[5]) D, rursusque sub A et E fit idem D quadratus, igitur D quadratus ad utrumque C et E est aeque multiplex, ergo per IX quinti *elementorum* eorundem numerus E est aequalis ipsi C numero. Producitur autem D quadratus ex B secundo numero pro- 100r portionali, et E exivit diviso D quadrato per A nume|rum.

Igitur si numeri tres continue fuerint proportionales, erit ut eo, quod ex secundo fit quadrato, per primum diviso exeat tertius numerus; quod demonstrare oportuit.

Propositio XVII.

In triangulo sphaerico rectangulo, unumquodque trium laterum quadrante minus habente, cognito latere rectum angulum subtendente et altero acutorum angulorum, perspicuum erit et latus reliquum eidem acuto angulo subtensum.

---

1) Hs. hat *tres*. 2) Hs. hat *sinuum F* statt *numerus F*.
3) Hs. hat *VII* korr. aus *VIII*. — Vgl. Euclidis *elementa* VII, 19.
4) Euclidis *elementa* VII, 20 in Zambertis Übersetzung, die Werner immer zitiert. 5) Hs. hat *fit* korr. aus *fitque*.

In triangulo sphaerico ABC latus AB recto angulo ACB subtensum sit cognitum, et angulus BAC quoque innotescat. Dico, latus BC eidem acuto angulo BAC subtensum etiam manifestum esse.

Nam per XI huius sinus lateris AB ad sinum BC lateris est | sicut (100v) semibasis maxima ad sinum anguli BAC. Sit igitur sinus maximus terminus primus, sinus anguli BAC secundus, sinus AB tertius terminus eiusdem proportionis, sinus vero lateris BC quartus. Igitur per XV propositionem prodibit sinus lateris BC quoque cognitus; et per eundem ex tabulis sinuum latus BC innotescet.

Igitur in triangulo sphaerico rectangulo, unumquodque trium laterum quadrante minus habente, cognito latere rectum angulum subtendente atque altero acutorum angulorum super base[!], perspicuum erit reliquum latus.

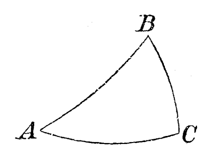
Correlarium.

Hinc liquet, latus BC cognitis angulo BAC et latere AB cognosci per unam proportionem, cuius terminus primus est maximus sinus, secundus semibasis anguli BAC, tertius sinus lateris AB, quartus vero terminus sinus seu semibasis lateris BC, quod desiderabatur.

Propositio XVIII.

In triangulo sphaerico rectangulo, unum|quodque trium (101r) laterum quadrante minus habente, si duo latera unum comprehendentia angulum acutum perspicua fuerint, erit et reliquus acutus angulus liquidus.

Ut in eodem schemate propositionis XVII, si duo latera AB et BC acutum angulum ABC comprehendentia fuerint[1]) cognita, dico, quod pateat etiam angulus BAC.



Est enim per XI ratio maximi sinus ad sinum AB lateris sicut sinus anguli BAC ad sinum lateris BC. Igitur per correlarium quartae quinti *elementorum* Euclidis[2]) et erit [?] semibasis lateris AB ad sinum maximum sicut sinus BC lateris ad sinum anguli BAC. Sed numeri priorum trium semibasium ex tabulis sinuum innotescunt. Igitur per XV huius patebit sinus anguli BAC ex eisdem quoque tabulis.

Igitur in triangulo sphaerico, unumquodque trium laterum quadrante minus habente, si duo latera unum comprehendentia acutum angulum perspicua fuerint, patebit etiam reliquus acutus angulus; quod ostendere conveniebat. |

Correlarium. (101v)

Manifestum inde fiet, angulum BAC patentibus AB et BC lateribus innotescere per unam proportionem, habentem in termino primo semibasim lateris AB, in secundo sinum maximum, in tertio semibasim lateris BC, in quarto sinum anguli BAC, qui quaeritur.

---

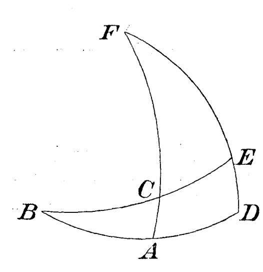
1) Hs. hat *fuerunt*.
2) Euclidis *elementa* V, 4, coroll. in Zambertis Übersetzung.

Propositio XIX.

In triangulo sphaerali rectangulo, acuto et noto angulo atque cognito latere, quod eidem acuto angulo et recto adiacet, reliquus acutus angulus perspicietur.

In triangulo itaque sphaerali ABC angulus BAC sit rectus, et angulus ACB acutus perspicuus, et latus AC manifestum; sint autem singula tria latera AB, AC et BC quadrante minora. Dico, quod reliquus acutus | 102r angulus ABC cognoscitur.

Ergo duo latera AB, BC in partes A, C producantur in quadrantes, qui sint BAD, BCE; et super B polo describatur peripheria DE. Rursus duo segmenta AC, DE in partes C, E protrahantur in concursum super signo F; igitur utrumque duorum segmentorum ACF, DEF quadrans est.[1]) In triangulo autem CEF latus CF cognitum est — supplementum namque perspicui segmenti AC —, et angulus ECF manifestus; ad verticem enim existit angulo ACB per hypothesim cognito; igitur per propositionem XVII huius secundi latus EF patebit. At DE complementum est cogniti segmenti EF; ergo DE segmentum patet. Sed per diffinitionem anguli [I, def. VIII] DE magnitudo est acuti anguli ABC; igitur acutus angulus ABC perspicuus.

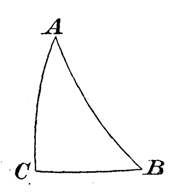


Igitur in triangulo sphaerali, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XX.

In triangulo sphaerico, unum rectum angulum atque unumquodque laterum qua|drante minus habente, si duo latera acutum comprehendentia angulum patescant, et reliquum latus patebit. 102v

In triangulo sphaerico, angulum ACB[2]) rectum et unumquodque laterum quadrante minus habente, duo latera BA, AC circa acutum angulum BAC innotescant.[3]) Dico, reliquum latus BC quoque cognitum fieri, rursus si duo latera AB, BC perspiciuntur, et tertium latus AC patescere.



Nam per XIII huius ratio sinus complementi lateris AC ad semibasim completionis AB lateris est ut sinus maximus ad semibasim complementi lateris BC. At per tabulas sinuum priores sinus tres perspicui sunt; igitur per XV huius et quartus sinus complementi lateris BC liquebit ex eisdem tabulis; ac perinde latus BC palam fiet.

Igitur in triangulo sphaerico, unum angulum rectum atque unumquodque 103r laterum quadrante minus habente, si duo latera acutum | comprehendentia angulum patescant, et reliquum latus patebit.[4])

Eodem modo cognitis AB, BC lateribus, et latus AC innotescet; quod fuit ostendendum.

---

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13 & 16 inv. 2) Hs. hat ABC.
3) Hs. hat *innotescat*. 4) Hs. hat *latus A* [?] statt *latus patebit*.

Correlarium.

Inde constat, lateribus BA et AC manifestis, et latus BC perspici per unam proportionem, quae in primo termino continet semibasim[1]) complementi lateris AC, in secundo sinum complementi lateris AB, in tertio sinum maximum, in quarto semibasim complementi lateris BC, quod disquiritur.

Et cognitis AB et BC lateribus similiter proportione una patebit latus AC, in cuius termino primo est sinus complementi lateris BC, in secundo complementi lateris AB, in tertio sinus maximus[2]), in quarto complementi lateris AC.

Propositio XXI.

In triangulo sphaerico, unum rectum possidente angulum atque unumquodque laterum quadrante minus, si duo latera acutum comprehendentia angulum innotuerint, et acutus angulus ab eisdem comprehensus perspicietur.

In triangulo ABC angulus ACB rectus sit, et duo latera BA, AC cognita. Dico, quod angulus BAC ab eisdem lateribus BA et AC contentus patescit.

B
A C

Nam per XX cognitis lateribus BA | et AC, palam fit quoque latus BC. At quia in triangulo ABC, angulum ACB rectum et unumquodque laterum notum habente atque quadrante minus, igitur per XVIII aut per XII[3]) angulus BAC palam fiet. 103v

Non dissimili ratione cognitis AB et BC lateribus angulus ABC liquebit.

Ergo in triangulo sphaerico, et reliqua ut supra; q. e. de[monstrandum].

Correlarium.

Perspicuum erit, cognitis duobus lateribus BA et AC, angulum BAC innotescere duabus proportionibus, quarum prima in termino primo habet sinum complementi lateris AC, in secundo semibasim complementi lateris AB, in tertio sinum maximum, in quarto sinum complementi lateris BC, quod ita perspicitur. — Rursus secunda proportio habet in termino primo semibasim lateris AB, in secundo sinum lateris BC, in tertio sinum maximum, in quarto sinum anguli BAC, qui quaeritur.

Propositio XXII.

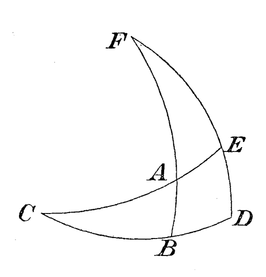
In triangulo rectangulo duobus lateribus, quorum utrumque minus quadrante fuerit, angulum rectum continentibus notis, latus reliquum patescet. |

In triangulo ABC habente angulum CBA rectum, eumque continentibus lateribus AB et BC manifestis, dico, reliquum latus AC patefieri. 104r

---

1) Hs. hat *semibasim circulum* statt *semibasim*. 2) Hs. hat *sinum maximum*.
3) Hs. hat *per XIX aut per XII*; es muß aber XI oder XVIII und XII sein.

Ergo segmenta AC et CB in partes A et B agantur, donec utrumque quadrans fiat. Sintque hi duo quadrantes CAE et CBD; et per E, D puncta magni orbis segmentum describatur DE, quod in partem[1]) E protractum concurrat cum BA segmento in easdem partes acto in puncto F. Et quia duae sectiones DEF et FAB quadrantes sunt[2]), erit BD complementum sectionis BC magnitudo anguli AFE [I, def. VIII], et AF complementum segmenti lateris AB. Et quia per undecimam propositionem huius secundi[3]) libri ratio recti sinus segmenti FB ad semibasim sectionis BD est sicut rectus sinus AF sectionis ad semibasim EA segmenti, primis autem tribus terminis in hac proportione cognitis, per propositionem XV huius secundi[3]) libri patebit etiam sinus rectus AE sectionis; quare deinceps per tabulas sinuum innotescet segmentum AE. At AE complementum est AC lateris; ergo et latus AC perspicuum erit.



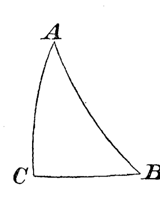
Igitur in triangulo rectangulo, et reliqua ut supra; quod erat ostendendum. |

104v

Propositio XXIII.

In triangulo sphaerico, possidente unum rectum angulum et unumquodque laterum quadrante minus, si alter quoque acutorum angulorum atque latus, quod eidem acuto angulo et recto adiacet, innotescant, erit latus quoque recto subtensum angulo perspicuum.

In triangulo sphaerico ABC, angulum ACB rectum atque unumquodque laterum quadrante minus habente, latus AC atque angulus BAC innotescant. Dico, latus AB recto angulo ACB subtensum palam quoque fieri.



Nam per XIV[4]) angulus ABC liquet.[5]) Atqui per XI sinus anguli ABC ad sinum AC lateris est sicut sinus maximus ad semibasim lateris AB. Sed primi tres sinus ex tabulis sinuum clarescunt; nam segmenta, quae iisdem sinubus subtenduntur, agnita [!] sunt. Igitur per XV sinus quartus[6]) lateris AB cognitus exibit; ergo et latus AB perspicuum erit.

Pari modo per latus BC et angulum ABC liquidum manifestabimus AB latus.

Igitur in triangulo sphaerico, unum possidente rectum angulum et unumquodque laterum quadrante minus, si alter acutorum angulo|rum atque latus eidem acuto et recto adiacens angulo perspicuum fuerit, latus recto quoque angulo subtensum innotescet; quod fuit ostendendum.

105r

---

1) Hs. hat *partes*. 2) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 13 & 16 inv.
3) Hs. hat *primi*. 4) Hs. hat *X*.
5) Hs. hat *liquet* korr. aus *subtensum palam*. 6) Hs. hat *quartis*.

Correlarium.

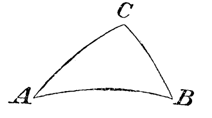
Palam inde fit, patentibus angulo BAC et latere AC, latus AB perspici duabus proportionibus, quarum una in primo termino habeat sinum maximum, in secundo semibasim complementi lateris AC, in tertio sinum anguli BAC, in quarto semibasim complementi anguli ABC, qui hac proportione clarescit. — Altera proportio continet in termino primo semibasim anguli ABC iam reperti, in secundo sinum lateris AC, in tertio semibasim maximam, in quarto sinum lateris AB, quod ita cognitus prodivit.

Quod si per angulum ABC et latus BC cognitum manifestare velis AB latus, permutatis ergo literis A, B, ita ut ad locum ipsius B posito A et in locum A traducto B propositum ex eodem correlario perficies, qua cautione et in praecedentibus admoneri te quoque velim.

Propositio XXIV.

In triangulo sphaerico, unum possidente | rectum angulum 105v et unumquodque laterum quadrante minus, si alter acutorum angulorum et latus ei subtensum cognoscantur, erit latus eidem acuto et recto adiacens angulo quoque notum.

Sit igitur trigonus sphaericus ABC habens angulum ACB rectum, et unumquodque laterum quadrante minus, et angulum ABC et subtensum latus AC cognitum. Dico, latus BC quoque cognosci.



Nam per XI propositionem ratio semibasis anguli ABC ad rectum sinum lateris AC est sicut maxima semibasis ad sinum lateris[1]) AB. Sed priores tres sinus sunt cogniti; igitur et semibasis lateris AB patebit; atque deinde ex tabulis sinuum segmentum AB non ignorabitur. Et quia in triangulo ABC duo latera BA et AC acutum comprehendentia angulum cognita sunt, igitur per XX huius aut eius correlarium latus BC patescit.

Igitur in triangulo, et reliqua ut supra; q. o. o.

Correlarium.

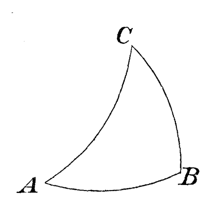
Inde est perspicuum, quod in | triangulo sphaerico et rectangulo, quodlibet latus quadrante minus habente, si acutus angulus et latus eidem subtensum pateant, alterum quoque latus duobus recto adiacens et acuto angulis elucebit duabus proportionibus, quarum prima priorem terminum habebit sinum rectum dati acuti anguli, in secundo termino sinum rectum cogniti lateris, in tertio sinum rectum maximum, in quarto semibasim lateris angulo subtensi recto. — Rursus altera proportio continebit in priori termino semibasim complementi lateris dati, in secundo rectum sinum complementi lateris angulo recto subtensi, in tertio termino semibasim maximam, in quarto rectum sinum completionis alterius iuxta rectum angulum cruris, quod quaeritur, quodque deinde per sublationem eius completionis ex quadrante demptae non ignorabitur. 106r

1) Hs. hat *latus* statt *sinum lateris*.

Propositio XXV.

106[v] In triangulo rectangulo duobus la|teribus, quorum utrumque quadrante minus fuerit, angulum rectum continentibus perspicuis, uterque ex duobus acutis angulis innotescet.

Velut in triangulo ABC, habente rectum angulum CBA, patentibus duobus lateribus AB et BC, dico, utrumlibet acutorum angulorum BAC et ACB manifestum fieri.



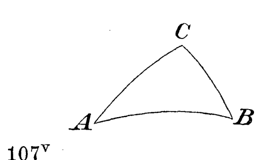
Sit igitur intentio angulum ACB notum efficere. Per XXII huius secundi[1]) libri AC latus angulo recto ABC subtensum est notum. Et quia per XI propositionem secundi[1]) huius libri ratio sinus recti lateris AC ad semibasim AB lateris est ut maximus rectus sinus ad sinum anguli ACB. Atqui in hac proportione, prioribus tribus terminis liquidis, patebit terminus quartus, videlicet semibasis anguli ACB. Igitur et per tabulas sinuum rectorum angulus ACB manifestus est. Eodem modo angulus BAC patebit.

Igitur in triangulo rectangulo, et reliqua ut supra; q. e. demon-[strandum]. |

Propositio XXVI.

107[r] In triangulo rectangulo, cuius quodlibet trium laterum quadrante minus existat, acutum angulum et latus ei subtensum notum habente, erit latus recto angulo subtensum cognitum.

In triangulo ABC rectum habente angulum ACB, acutus angulus BAC et eidem latus BC subtensum pateant. Dico, quod AB latus recto angulo ACB subtensum perspicietur.



Et quoniam per propositionem XI huius secundi libri ratio semibasis maximae ad rectum sinum anguli BAC est sicut ratio semibasis AB lateris ad sinum rectum lateris BC, igitur vicissim per propositionem XVI quinti libri *elementorum* Euclidis ratio semibasis anguli 107[v] | BAC est ad sinum rectum maximum sicut sinus rectus lateris BC ad semibasim AB lateris. Huius autem proportionis per hypothesim et tabulas sinuum rectorum primi tres termini in numeris perspicui sunt; ergo per propositionem XV huius libri semibasis lateris AB patescit; quod oportuit demonstrare.

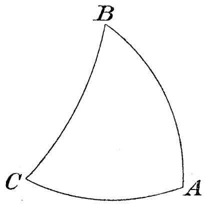
Propositio XXVII.

In triangulo rectangulo si quodlibet laterum quadrante minus existat, et unus acutus angulus eique latus subtensum pateant, et reliquus angulus acutus manifestabitur.

In triangulo ABC itaque angulus BAC[2]) rectus sit, et ACB angulus 108[r] acu|tus notusque, et ei subtensum latus AB quadrante minus atque cognitum,

1) Hs. hat *primi*.
2) Hs. hat *ABC itaque ABC angulus BAC*.

et unumquodque trium laterum AB, AC et BC quadrante minus. Dico, quod acutus angulus ABC quoque perspicuus erit.



Et quoniam in triangulo rectangulo acutus angulus ACB atque eidem subtensum latus AB patent, igitur per propositionem XXVI huius secundi libri latus BC constabit. Et per propositionem XX eiusdem secundi libri reliquum latus AC innotescit. Duobus ergo lateribus AC, CB per iam ostensa liquidis per propositionem XVIII eiusdem secundi libri angulus ABC patebit.

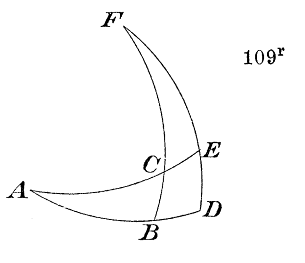
In rectangulo igitur triangulo, et sequentia ut supra; q. o. o.

Propositio XXVIII.

Datis trigoni sphaerici[1]) tribus | angulis, quorum unus rectus et uterque reliquorum acutus extiterit, eiusdem trigoni tria latera dabuntur. 108v

Sit sphaericus trigonus, cuius tres anguli dati fuerint, quorum ABC rectus, reliquorum autem uterque acutus. Dico, quod quodlibet trium laterum trianguli ABC datum erit.

Duo itaque segmenta AB, AC compleantur in quadrantes ABD, ACE; et polo A intervallo autem ABD seu ACE scribatur quadrans DEF; et ex F per C descendat quadrans FCB. Et quia DE segmentum definit quantitatem anguli BAC dati [I, def. VIII], igitur DE segmentum datur; ergo de quadrante DEF reliquum EF datur. Et quia in trian|gulo sphaerico CEF duo anguli dantur, videlicet ECF — nam ad verticem est dati anguli ACB — et CEF rectus, igitur per doctrinam huius secundi libri trigonorum sphaericorum[2]) utrumque duorum segmentorum EC et CF datur [II, 24 & 26]; ergo ex duobus quadrantibus residua segmenta AC et BC dantur. At eisdem segmentis et angulo ACB atque recto ABC datis per eundem secundum librum sphaericorum trigonorum segmentum quoque AB dabitur [II, 17 aut 20]. 109r



Ergo datis trigoni sphaerici[3]) tribus angulis, quorum unus rectus et uterque reliquorum acutus extiterit, eiusdem trigoni tria latera dabuntur.

Finis secundi libri. |

109v vacat[4])

1) Hs. hat *sphaericis.*
2) Hs. hat *huius secundi libri ex secundo libro trigonorum sphaericorum.*
3) Hs. hat *sphaerici* korr. aus *sphaericis.*
4) Nach Fol. 109 folgt ein leeres Blatt ohne Nummer.

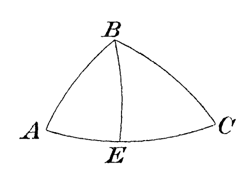
110r IOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS
DE TRIANGULIS SPHAERICIS.

LIBER TERTIUS.

Propositio prima.

Dati trigoni sphaerici duobus inaequalibus et notis lateribus, si eorum utrumque existat quadrante inferius, et acuto angulo ab eisdem lateribus contento et cognito, reliquum latus cognoscitur.

Sit datus triangulus sphaericus ABC habens AB et AC latera cognita, et eorum utrumque quadrante minus. Sitque angulus BAC perspicuus et 110v acutus. Dico, reliquum latus BC quoque manife|stum fieri.



Sit itaque latus AB minus latere AC; et a puncto B super AC latus circuli magni sectio BE ad angulos rectos descendat in puncto E. Et quia latus AB est latere AC inferius, et AB latus excedit AE segmentum — nam in triangulo ABE maiori angulo [I, 47] maius latus opponitur[1] —, ergo AE segmentum minus est AC latere, et idcirco E punctum segmenti perpendicularis BE cadit inter A et C puncta lateris AC. Et quoniam in triangulo rectangulo BAE angulus acutus EAB notus[2]) est, et latus AB recto angulo AEB subtensum innotescit, ergo per XVII propositionem libri secundi[3]) BE perpendicularis liquebit. Et quia in triangulo BAE duo latera AB et BE sunt conspicua, comprehendentia acutum angulum ABE, igitur per XX eiusdem secundi[3]) libri reliquum latus AE patebit, quod sublatum ex segmento AC relinquitur CE sectio nota. At | 111r in triangulo partili BEC angulus CEB per constructionem rectus est, et duo latera eundem angulum rectum BEC comprehendentia sunt manifesta, igitur per XXII secundi[3]) libri BC reliquum latus innotescet.

Ergo dati trigoni sphaeralis duo nota et inaequalia latera possidentis, quorum fuerit utrumque quadrante minus, atque acuto ab eisdem lateribus comprehenso angulo cognito, latus patebit reliquum; quod erat ostendendum.

---

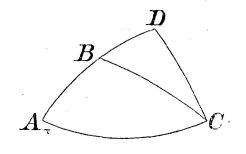
1) Menelai *sphaerica* I, 7. 2) Hs. hat *inotus* oder *motus*.
3) Hs. hat *primi*.

Aliter.

A puncto C maioris lateris AC super AB latus ad rectos angulos describatur CD segmentum.

Quod si punctus D ceciderit in B punctum, erit per constructionem angulus ABC rectus; quare per XI secundi[1] libri, perspicuo angulo BAC et latere AC, patebit latus BC, quod quaerebatur; aut latus BC per XX eiusdem secundi[1] patebit.

Sin autem | D punctum non fuerit idem cum puncto B, igitur ipsum 111v punctum D necessario cadit extra trigonum ABC. Et quia in triangulo ACD angulus ADC rectus est, et acutus CAD angulus ex hipothesi manifestus, et quodlibet trium laterum AD, AC et CD quadrante minus, et AC latus cognitum, igitur per XVII propositionem libri secundi[2] CD sectio innotescit. Et quoniam in eodem rectangulo triangulo ACD duo latera AC et CD acutum angulum ACD continentia patent, ergo per XX eiusdem libri secundi[3] AD segmentum liquebit, cui si demamus AB sectionem ex hypothesi cognitam, relinquitur BD segmentum notum. At in rectangulo triangulo BCD partili duo crura BD et DC rectum angulum CDB comprehendentia patescunt; igitur per XXII secundi[3] libri eiusdem BC reliquum latus erit perspicuum.



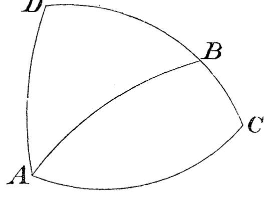
Ergo si in dato sphaerali trigono duo inaequalia latera, | quorum 112r utrumque quadrante minus existat, patuerint, acutum et cognitum angulum continentia, erit etiam reliquum latus apertum; quod erat ostendendum.

Et inde quoque manifestum est, hanc secundam demonstrationem praestare priori. Nam ex hac secunda per duas operationes liquet, utrum angulus ABC rectus fuerit, an non; quod non patebit ex prima demonstratione.

Propositio II.

In triangulo sphaerali, duobus inaequalibus lateribus notis et angulo acuto ab eisdem comprehenso, si fuerit eorundem laterum quadrans alterum, alterum quadrante inferius, reliquum quoque latus manifestabitur.

Sit ergo datus triangulus sphaericus $AB|C$, habens quidem AB latus 112v quadrante minus et notum, AC vero latus quadrantem, angulum quoque BAC acutum et notum ab eisdem lateribus comprehensum. Dico, quod latus BC reliquum etiam innotescet.



Protrahatur ergo CB latus in partem B usque in D[4]; et ab A in CBD perpendiculariter veniat segmentum AD [I, 11]. Et quoniam in triangulo sphaerico ACD angulus ADC per constructionem rectus est, et latus AC quadrans, igitur segmentum DC quadrans est, et totus angulus CAD rectus [I, 2]. Et quia angulus CAB per hypothesim liquet, ergo et reliquus BAD angulus patebit. Igitur per

1) Hs. hat *primi*. 2) Hs. hat *secundi* korr. aus *primi*. 3) Hs. hat *primi*.
4) Hs. hat *usque in D in infinitum*.

propositionem XI secundi[1]) libri segmentum BD cognitum erit, quo quadranti DC sublato remanebit BC sectio manifesta.

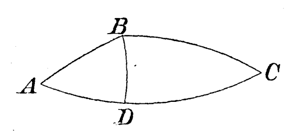
Igitur in triangulo sphaerali, duobus inaequalibus lateribus notis et angulo acuto ab eisdem comprehenso, si fuerit eorundem laterum quadrans alterum, et reliqua ut supra; quod erat demonstrandum. |

113r

Propositio III.

Si triangulum sphaerale duo nota possederit latera, unum quidem quadrante minus, alterum autem quadrante maius, notum et acutum comprehendentia angulum, et reliquum latus innotescet.

Sit ergo trigonus sphaericus ABC duo contingens nota latera, et AB quidem quadrante minus, AC autem quadrante maius, acutum et manifestum angulum BAC comprehendentia. Dico, quod reliquum latus BC innotescet.



Ergo in triangulo ABC ab B signo in AC perpendicularis BD descendat sectio, quae cadet necessario inter A, C puncta [I, 12]. Et quia per XI propositionem libri secundi BD sectio perpendicularis liquet, ergo per propositionem XXIV eiusdem secundi[1]) AD segmentum perspicuum erit. 113v Et | quoniam ex hipothesi totum segmentum AC liquet, igitur et reliqua eius pars DC manifesta erit. Ergo per propositionem[2]) XXII secundi[3]) sectio BC innotescet.

Igitur si triangulum sphaerale duo nota possederit latera, unum quidem quadrante minus, alterum autem quadrante maius, notum et acutum comprehendentia angulum, et reliquum latus innotescet.

Propositio IV.

Si triangulum sphaericum duo cognita habuerit latera, quadrantem quidem unum, alterum maius quadrante, perspicuum et acutum comprehendentia angulum, et reliquum latus notum erit.

Ergo triangulus ABC habeat AB latus quadrantem, AC vero latus eo maius, et utrumque liquidum, et angulum BAC acutum ab eisdem lateribus comprehensum etiam manifestum. | Dico, quod tertium latus BC patescet. 114r

Ex AC latere quadrans AD secetur; et per B, D signa descripto magni orbis segmento BD, quod cognitum est — nam ipsum est magnitudo BAC [I, def. VIII] —, et quoniam DA[4]) liquet, reliqua portio [DC] segmenti AC liquet, atque angulus BDC rectus est[5]); ergo per XXII secundi[6]) libri BC latus patet.

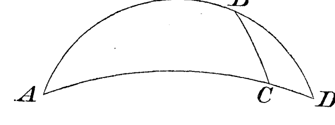
Igitur si triangulum sphaericum duo cognita habuerit latera, quadrantem quidem unum, alterum maius quadrante, perspicuum et acutum comprehendentia angulum, et reliquum latus notum erit.

1) Hs. hat *primi*. 2) Hs. hat *per eandem propositionem*. 3) Hs. hat *primi*.
4) Hs. hat *DC*. 5) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15 & 16 inv.
6) Hs. hat *secundi* korr. aus *primi*.

Propositio V.

Si trigonus sphaeralis duo latera inaequalia possederit perspicua, notum acutumque continentia angulum, et fuerit utrumque horum laterum maius quadrante, et reliquum latus manifestabitur.

Sit triangulus ABC habens duo nota latera AB, AC, et eorum utrumque quadrante | maius, acutum perspicuumque BAC angulum com- 114ᵛ prehendentia. Dico, quod latus BC perspicietur.



Ergo utrumque laterum AB et AC in partes B, C protrahatur, quousque concurrant super D signo. Et quia per primum librum Theodosii in *sphaericis triangulis*[1]) utrumque segmentorum ABD et ACD semicirculus est, [et duo latera AB, AC per hypothesim patent,] ergo et reliquae sectiones BD et DC cognoscuntur[2]); et angulus BDC aequalis est angulo BAC noto.[3]) Igitur per primam propositionem huius tertii libri BC segmentum liquet.

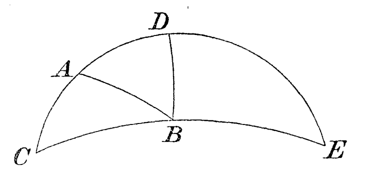
Igitur si trigonus sphaeralis duo latera inaequalia possederit perspicua, notum acutumque continentia angulum, et fuerit utrumque horum laterum maius quadrante, et reliquum latus manifestabitur.

Propositio VI.

Si in triangulo sphaerali inaequalia duo latera, quorum utrumque quadrante minus extiterit, pateant, obtusum comprehendentia et notum angulum, erit reliquum latus quoque perspicuum. |

In triangulo sphaerali ABC utrumque duorum crurium BA et AC sit 115ʳ cognitum et quadrante minus; atque ab eis comprehensus angulus BAC etiam manifestus et obtusus. Dico, reliquum latus BC quoque patefieri.

Agatur AC latus in partem[4]) A usque in D; et per B punctum ipsi CAD segmento ad rectos angulos describatur magni orbis sectio BD. Et quoniam BAD angulus patet — nam ipse reliquus est BAC angulo ex duobus rectis sublato —, et BA latus per hypothesim cognitum, igitur per XVII secundi[5]) in partili triangulo rectangulo BAD latus BD innotescit. Et quia in eodem triangulo partili BAD duo latera acutum comprehendentia angulum ABD ⟨per XII secundi[5]) libri[6])⟩ nota sunt, igitur per XX eiusdem libri secundi[7]) AD segmentum innotescet; ergo et totum seg-



1) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.]. — Vgl. Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 11.
2) Hs. hat *ergo et reliqua sectionis BD et DC cognoscitur.*
3) Menelai *sphaerica* I, def. 4. 4) Hs. hat *partes.* 5) Hs. hat *primi.*
6) Dieser Verweis auf II, 12 scheint hier keinen Sinn zu haben und ist wohl zu streichen. 7) Hs. hat *primi.*

mentum DAC patet, quod ubi quadrante minus fuerit, et in triangulo rectangulo sphaerali [BDC] duo latera BD et DC rectum continentia angulum BDC [cognita sunt], et utrumque eorum quadrante minus est, igitur per XXII secundi[1]) BC latus elucescit.

Ergo in triangulo sphaerali si inaequalia duo latera, quorum utrumque quadrante minus extiterit, et reliqua ut supra; q. o. o. |

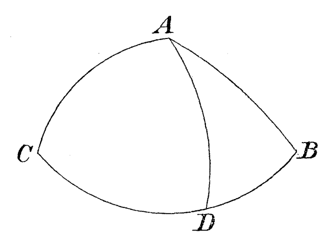
115ᵛ At quando DA et AC segmenta simul accepta quadrantem ex amussi constituerint, erit BC latus quoque quadrans orbis magni [I, 6], quare rursus patet intentio.

Quando autem DA et AC segmenta simul sumpta sectionem quadrante maiorem efficerint, igitur et BC latus quadrantem exuperat [I, 7]; ergo CB et CD sectiones ad partes B et D excitentur, donec ad invicem concurrant in puncto E. Igitur per XV propositionem libri primi Theodosii in *sphaericis triangulis*[2]) utraque sectionum BCE [!] et CDE semicirculus est magni orbis; quare ex hipothesi cum utrumque duorum segmentorum partilium DC et CB quadrante maius existit, reliquarum duarum sectionum BE et ED [utraque] quadrante minor est. Et quia in [triangulo] rectangulo sphaerali BED duo latera BD et DE nota sunt, rectum comprehendentia angulum BDE — cognoscitur enim ex hipothesi BD, sed DE sectio patet idcirco, quia relinquitur nota sectione DC semicirculo CDE detracta —, ergo per XXII secundi[1]) libri BE[3]) sectio patet; ergo et reliqua BC semicirculi CBE |
116ʳ portio manifesta est.

Igitur si in triangulo sphaerali duo latera inaequalia, quorum utrumque minus fuerit quadrante, pateant, obtusum et notum continentia angulum, erit reliquum latus quoque perspicuum; q. o. o.

Propositio VII.

Si in trigono sphaerali duo innotescant latera, quorum unum quadrante minus existat, alterum quadrans, obtusum et notum continentia angulum, erit et tertium latus cognitum.



Sit triangulus ABC nota possidens latera AB et AC, quorum unum AB quadrante minus existat, quadrans alterum AC, comprehendentia obtusum angulum BAC liquidum. Dico, quod reliquum segmentum BC liquescit.

Et quoniam in omni trigono sphaerico ex magnis circulis concinnato sub maiore angulo latus maius subtenditur[4]), ergo BC latus maius est AC quadrante. Resecetur ergo BC lateri quadrans CD; et per A, D signa sectio orbis magni descripta sit.[5])
116ᵛ Et quia in triangulo | partili ABD angulus ADB rectus[6]), et latus ei oppositum AB cognitum, atque angulus BAD — nam ipse relinquitur

1) Hs. hat *secundi* korr. aus *primi*. 2) Hs. hat *sphaericis nis* [d. h. 3is.].
3) Hs. hat DE.
4) Menelai *sphaerica* I, 7. — Daß $\angle B < 90^{\circ}$, ist in I, 15 bewiesen.
5) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 20. 6) Ibid. I, 15 & 16 inv.

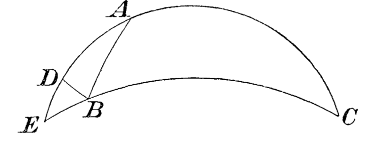
recto angulo ex dato obtuso angulo BAC sublato —, igitur per propositionem XI secundi[1]) libri BD sectio innotescit. Et quia CD segmentum iuxta constructionem quadrans est, ergo totum segmentum BC manifestum est.

Igitur si in triangulo sphaerali duo innotescant latera, quorum unum quadrante minus existat, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio VIII.

Si trigonus sphaeralis duo inaequalia nota possideat latera, quorum alterum quadrante minus, alterum quadrante maius, obtusum notumque comprehendentia angulum, et latus reliquum perspicietur.

Sit in triangulo ABC sphaerali angulus BAC manifestus obtususque, et utraque latera AB et AC eundem angulum continen|tia perspicua, sitque 117r quadrante minus AB, AC autem quadrante maius. Dico, quod latus BC etiam manifestabitur.



Ergo segmentum CA in partem A protrahatur usque in D; ex B in segmentum CAD veniat perpendicularis sectio BD. Et quia angulus extrinsecus BAD innotescit — nam ipse reliquus est BAC angulo de duobus rectis sublato —, et AB segmentum cognitum ex hipothesi, igitur per XI propositionem secundi[2]) libri BD perpendicularis sectio patebit. Ergo per XX propositionem secundi[2]) libri in trigono rectangulo partili ABD et latus AD liquet; ergo et totum segmentum CAD patescit. Denique utrumque segmentorum DC et CB in partes B et D protrahatur, usque concurrant super E. Et quoniam in partili triangulo BDE angulus BDE rectus est, et duo latera BD, DE cognita — nam DE segmentum reliquum est cognita sectione CD ex semicirculo sublata, BD vero perpendicularis ex praeostensis perspicua —, et utrumque segmentorum BD, DE quadrante minus, ergo per XXII secundi[2]) libri sectio BE patescit, qua de semicirculo CBE sublata relinquitur BC sectio co|gnita. 117v

Igitur si trigonus sphaeralis duo inaequalia notaque possideat latera, quorum alterum quadrante minus, alterum quadrante maius, obtusum notumque comprehendentia angulum, et reliquum latus perspicietur; q. o. o.

Propositio IX.

Si in triangulo sphaerico duo latera inaequalia, quorum unum quadrans sit, alterum quadrante maius, innotuerint, obtusum notumque angulum comprehendentia, erit et reliquum latus notum.

Esto datus trigonus ABC cognita inaequaliaque habens latera AB et AC, quorum AB quadrans existat, AC vero quadrante maius, obtusum[3]) notumque angulum BAC continentia. Dico, quod latus BC perspicuum erit.

1) Hs. hat *secundi* korr. aus *primi*. 2) Hs. hat *primi*. 3) Hs. hat *obtusumque*.

Et quoniam maiori angulo maius subtenditur latus, ergo BC latus maius est AC latere.[1]) Igitur ex BC auferatur BD quadrans; et per A, D signa magni orbis segmentum describatur.[2]) Erit ergo uterque duorum | angulorum BAD et ADB rectus[3]); et quia totus angulus BAC ex hypothesi cognoscitur, ex eo igitur recto BAD sublato[4]) relinquitur angulus partilis CAD perspicuus. Et duo segmenta CA et AD in partes C, D producta concurrant super E signo. Et quoniam anguli circa D signum recti sunt, erit triangulus sphaeralis CDE rectangulus. Igitur per XI propositionem secundi[5]) libri sectio DC patet. Est autem ex hypothesi BD quadrans; ergo totum segmentum BDC notum erit.

118r

A B C D E

Igitur si in triangulo sphaerico bidua [!] latera inaequalia, quorum unum quadrans sit, alterum quadrante maius, innotuerint, obtusum notumque angulum comprehendentia, erit et reliquum latus notum; q. o. o.

Propositio X.

Si triangulum sphaericum duo latera nota possideat inaequalia, quorum utrumque quadrante maius existat, obtusum notumque angulum comprehendentia, erit et reliquum latus notum. |

118v Sit igitur triangulus sphaeralis ABC habens inaequalia duo nota latera AB et AC, utrumque quadrantem exuperans[6]), quae obtusum notumque angulum BAC comprehendant. Dico, reliquum[7]) latus BC quoque notum fieri.

A B C D

Ergo utraque segmenta AB, AC in partes B, C producantur, quousque concurrant super D. Et quia trianguli BDC duorum laterum BD et DC utrumque quadrante vincitur notumque est, eadem quoque latera BD[, D]C notum obtusumque angulum BDC continent, ergo per sextam propositionem huius tertii libri latus BC innotescet.

Igitur si triangulum sphaericum duo latera nota possideat inaequalia, quorum utrumque quadrante maius existat, obtusum notumque angulum comprehendentia, erit et reliquum latus notum; q. o. o.

Propositio XI.

In triangulo sphaerico duo nota possidente latera, quorum utrumque quadrante minus existat, atque perspicuum et acutum

---

1) Menelai *sphaerica* I, 7. — Dieser Satz wird hier falsch benutzt, wie es scheint in Analogie mit der richtigen Anwendung in III, 7. Winkel B ist nämlich auch stumpf (I, 17). Daß aber BC größer als 90° ist, erhellt aus I, 17.

2) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 20. 3) Ibid. I, 15 & 16 inv.

4) Hs. hat *rectus BAD sublatus*. 5) Hs. hat *primi*.

6) Hs. hat *exuperantibus*. 7) Hs. hat *Dico, quod reliquum*.

angulum super reliquo latere et | iuxta brevius latus cognitum 119r
consistentem, et idem reliquum innotescet latus.

Sit trigonus sphaeralis ABC habens cognita crura AB et AC, atque utrumque quadrante inferius, latus quidem AB brevius, AC autem longius, angulum vero ABC [acutum] notum[que]. Dico, quod reliquum latus BC patescet.

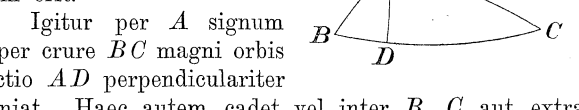
Ergo a signo A segmentum AD magni orbis perpendiculariter veniat super BC latus; et quoniam uterque duorum angulorum ABC et ACB acutus est [I, 24], igitur signum D cadit inter B, C puncta. Et quia AB sectio ex hipothesi manifesta est, similiter quoque angulus ABD, igitur per XI propositionem secundi[1]) libri perpendicularis sectio AD perspicua erit. Quare per XX eiusdem[2]) libri et BD segmentum liquet. Per eandem quoque propositionem sectio DC patescet; ergo et totum segmentum BC patet.

Igitur si in triangulo sphaerico duo latera nota possidente, quorum utrumque quadran|te minus existat, atque perspicuum et acutum angulum 119v
super reliquo latere et iuxta brevius latus cognitum consistentem, et idem reliquum innotescet latus; q. o. o.

Propositio XII.

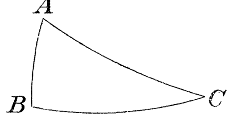
Si trianguli duobus lateribus, quorum quadrante minus utrumque sit, cognitis acutus et perspicuus angulus super reliquo crure consistens maiori cognito cohaereat lateri, idem reliquum latus patescet.

Sit triangulus ABC habens AB et BC latera cognita et eorum utrumque minus quadrante, AC quidem maius, minus BA[3]), et angulum ACB acutum notumque. Dico, quod latus BC liquidum erit.



Igitur per A signum super crure BC magni orbis sectio AD perpendiculariter veniat. Haec autem cadet vel inter B, C aut extra, vel AD eadem erit ipsi AB, quod accidit.

Primum ergo AD interius cadat, ea per XI propositionem [secundi libri] cogni|ta erit. Et quia per XX propositionem 120
secundi[4]) utrumque segmentum BD et DC patet, ergo et tota sectio BDC manifesta erit.



Igitur si trianguli duobus lateribus, etc.

Iam autem perpendicularis AD extra B, C signa cadat velut in secunda specie. Et quia per XX secundi[4]) libri utrumque rursus segmentum BD et DC patet, ergo reliqua partilis sectio BC manifesta erit.

---

1) Hs. hat *primi*. 2) Hs. hat *eiusdem* korr. aus *primi*. 3) Hs. hat BC
4) Hs. hat *primi*.

Quod si AD fuerit eadem segmento AB, tunc enim angulus ABC est rectus, quare iterum per XX secundi[1]) BC segmentum liquet.

Igitur si trianguli duobus lateribus, quorum quadrante minus utrumque existat, et reliqua ut supra.

Correlarium.

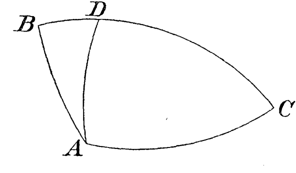
Hinc patet etiam penitus discerni non posse tribus tantum magnitudinibus videlicet notis, duobus cruribus AB, AC et angulo ACB, [utrum] perpendicularis AD inter B, C signa cadat an extra, idest an eadem perpendicularis cadat intra triangulum ABC an extra eundem, nisi cognitus etiam fuerit vel angulus BAC, vel ad minus pateat, an angulus ABC sit obtusus vel acutus sive rectus.

120ᵛ Nam si obtusus, AD perpendicularis veniet extra trigonum | ABC, si acutus intra. Et si idem angulus ABC rectus fuerit, perpendicularis AD eadem erit sectioni AB, et signa B, D incident in unum punctum. Igitur ad deffiniendum propositionem hanc XII cognoscere etiam oportet angulum ABC, utrum ipse obtusus acutusve sit, alioquin circa inquisitionem BC segmenti nobis hallucinari continget.

Propositio XIII.

In triangulo sphaerico duobus cruribus cognitis, quorum unum quadrans existat, alterum minus quadrante, [si] angulus perspicuus acutusque super reliquo trianguli latere breviori cohaereat cruri, et reliquum latus manifestabitur.

Sit igitur triangulus ABC cognita habens latera AB [et] AC, AB quidem minus quadrante, quadrantem vero AC, et angulum ABC notum acutumque. Dico, quod latus BC innotescet. |



121ʳ Igitur per A super BC segmentum perpendicularis sectio veniat[2]) AD. Et quia AB latus ex hypothesi quadrante superatur, et angulus ABC acutus est, igitur et reliquus angulus ACB est acutus.[3]) Ergo perpendicularis AD intra triangulum ABC cadit, quae per XI secundi[4]) clara est; et quia anguli circa D recti sunt, et AC quadrans est ex hypothesi, igitur et CD quadrans est [I, 2]. At per XX secundi[4]) BD sectio elucescit, ergo et totum segmentum BDC[5]) manifestum est.

Igitur in triangulo sphaerico duobus cruribus cognitis, et reliqua ut supra; quod decuit [!] ostendere.

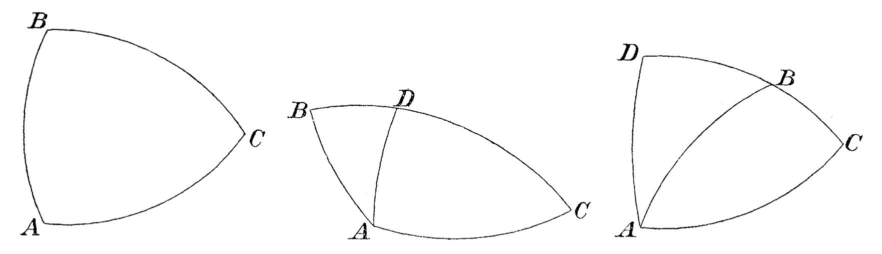
Propositio XIV.

Trianguli duobus cognitis lateribus, quorum unum quadrante vincatur, alterum quadrans existat, si acutus notusque angulus quadrante et reliquo incognito latere comprehensus fuerit, et eidem lateri reliquo reperiri continget. |

1) Hs. hat *primi*. 2) Hs. hat *veneat*.
3) Früher nicht bewiesen; vgl. I, 25—27. 4) Hs. hat *primi*.
5) Hs. hat DDC.

Sit triangulus ABC, cuius unum cognitorum laterum AB quadrante minus, alterum quadrans AC, et angulus ACB cognitus acutusque. Dico, quod continget et lateri BC fieri notum. 121v

Quod si de angulo ABC constiterit, qualis foret, rectusne an acutus vel obtusus, profecto sciemus BC latus. Nam si idem angulus ABC rectus extiterit, BC latus quadrans erit [I, 2], si acutus, ergo per A perpendicularis super BC descendat sectio AD, quae cadet intra triangulum



ABC et manifesta fiet per XI secundi.[1]) Quare per XX secundi[2]) eiusdem utrumque segmentorum BD et DC patebit; ergo et totum segmentum BDC perspicuum est.

Si autem angulus ABC obtusus fuerit, ergo sectio perpendicularis AD cadet extra triangulum ABC, velut in secunda forma conspicimus, et per eandem XX secundi[2]) utrumque segmentorum CD et DB cognitum prodibit, quare BD sublato ex DC remanebit sectio[3]) BC manifesta.

Igitur trianguli duobus cognitis lateribus, etc. ut supra; quod erat demonstrandum. |

Propositio XV. 122r

In triangulo sphaerico si duobus notis lateribus, quorum unum quadrante vincatur, alterum vero sit quadrante superius, acutus perspicuusque angulus reliquo latere atque minore datorum laterum contineatur, erit et idem reliquum latus manifestum.

Sit triangulus ABC habens duo cognita latera, AB quidem quadrante minus, AC vero quadrante superius, angulum quoque ABC cognitum et acutum. Dico, quod et latus BC prodibit manifestum.

Et per A super BC sectio perpendicularis AD incidat. Et quia angulus ABC acutus est, atque latus AB quadrante minus, AC vero quadrante maius, igitur eadem AD perpendicularis cadit intra triangulum ABC, manifesta existens per XI secundi[4]); quare per XX eiusdem[5]) duo partilia segmenta BD, DC clara | prodibunt; ergo totum segmentum BDC manifestum est. 122v

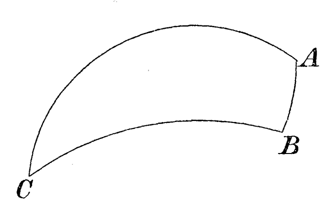
Igitur in triangulo sphaerico si duobus notis lateribus, quorum unum quadrante vincatur, etc. ut supra; q. o. o.

1) Hs. hat *secundi* korr. aus *primi*. 2) Hs. hat *primi*. 3) Hs. hat *sectione*.
4) Hs. hat *secundi* korr. aus *primi*. 5) Hs. hat *eiusdem* korr. aus *primi*.

Propositio XVI.[1])

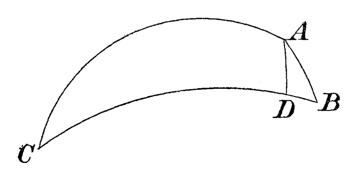
Si in triangulo sphaerico duobus datis lateribus, quorum unum quadrante superatur, quadrante alterum maius existat, acutus notusque angulus super reliquo latere consistens ampliori datorum laterum appositus extiterit, idem latus non necessario manifestabitur, nisi alterius super eodem latere consistentis anguli genus innotescat.

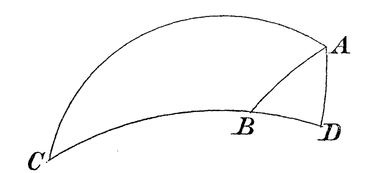
Sit ergo triangulus ABC habens [duo] cognita latera, AB quidem minus quadrante, AC vero maius, et angulum ACB acutum et notum. Dico, quod latus BC non necessario cognoscetur a nobis, nisi noverimus anguli alterius ABC speciem, utrum videlicet ipse sit rectus obtususne an acutus.



Nam ut in praecedentibus producta perpendiculari AD si angulus ABC rectus fuerit, ipsa eadem perpendicularis erit AB lateri, et per XX secundi[2]) patebit BC latus.

Si autem angulus ABC fuerit acutus, ergo perpendicularis AD cadet 123r intra triangulum | ABC ut in primo hoc schemate, et cognita per XI secundi[2]) perpendiculari AD igitur per XX secundi[2]) partilia segmenta BD, DC non latebunt; ergo et totum BC segmentum manifestabitur.





At angulo ABC obtuso subsistente, perpendicularis AD cadet extra trigonum ABC; ergo per XI secundi[2]) patente perpendiculari AD utrumque segmentorum DC et BD per XX secundi[2]) liquet, ergo et BC sectio.

Igitur si in triangulo sphaerico duobus datis lateribus, quorum unum quadrante superatur, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XVII.

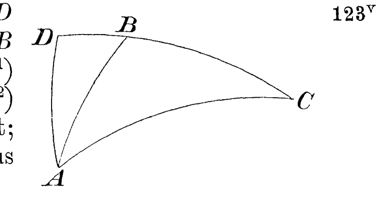
Si trigonus sphaericus duo possideat inaequalia notaque latera, quorum utrumque minus sit quadrante, et minore reliquoque incognito latere comprehendatur cognitus angulus obtusus, erit idem latus reliquum manifestum.

Sit triangulus ABC habens duo latera cognita et inaequalia, et eorum[3]) utrumque quadrante minus, AB quidem brevius, AC vero longius, et angulum ABC obtusum atque manifestum. Dico, quod latus BC reliquum patebit.

1) Statt *XVI* hat die Hs. *VI* korr. aus *VII*. 2) Hs. hat *primi*.
3) Hs. hat *et eorumque*.

Igitur super BC per A signum deducta perpendicularis sectio [AD] cadet extra triangulum ABC; et quia angulus interior ABC obtusus cognitusque est, igitur | et de duobus rectis reliquus ABD acutus notusque erit. Angulus autem ADB per constructionem rectus; ergo per XI secundi[1]) perpendicularis AD patet; quare per XX eiusdem[2]) utrumque segmentorum BD et DC innotescet; quare et residuum segmentum BC idest latus BC liquet.

123v



Igitur si trigonus sphaericus duo possideat inaequalia notaque latera, et reliqua ut supra; q. o. o.

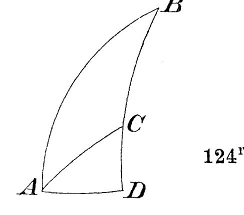
Propositio XVIII.

Si triangulus sphaericus duo possideat inaequalia latera, quorum unum quadrans, alterum quadrante minus et notum fuerit, et angulum obtusum notumque minore dato et reliquo latere contentum, erit reliquum latus perspicuum.

Sit in triangulo ABC latus AB quadrans, et BC quadrante minus et notum, et angulus ACB obtusus et cognitus. Dico, quod reliquum latus AC manifestum erit.

Producatur ergo BC latus in partem C usque in D, ita ut totum segmentum BCD sit quadrans, et descripta [sit] AD peripheria super B polo. Et quoniam in triangulo ACD angulus ADC rectus est[3]), et ACD angulus acutus cognitusque, et unumquodque trium | laterum AD, AC et CD quadrante minus per XXX primi, igitur per XXIII propositionem secundi latus AC cognitum est.

124r



Ergo si triangulus sphaericus, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XIX.

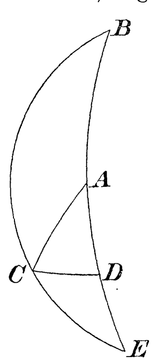
Si in triangulo obtusiangulo duorum notorum laterum unum ex reliquis angulis continentium alterum quadrante quidem minus, alterum vero maius existat, obtususque angulus notus fuerit, erit et reliquum latus cognitum.

Sit ergo in triangulo ABC angulus BAC cognitus et obtusus, et BC latus quadrante quidem maius, AC vero minus [, et utrumque notum existat]. Dico, et reliquum latus AB cognosci.

Utrumque igitur duorum laterum AB, BC in partes A, C productum sit usque in concursum E, descriptaque perpendiculari CD [ipsa secabit AE peripheriam inter A, E signa in puncto D]. Et quoniam in triangulo rectangulo ADC quodlibet laterum quadrante minus existit [I, 31, 50 & 21], et angulus CAD acutus per hypothesim et notus, latus quoque AC notum, igitur per propositionem XVII libri secundi[4]) CD perpendicularis

1) Hs. hat *primi*. 2) Hs. hat *eiusdem* korr. aus *primi*.
3) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15.
4) Hs. hat *XVII · III · libri secundi*.

innotescit, et per propositionem XX eiusdem libri perspicuum erit AD | 124v segmentum. Et quoniam BCE peripheria semicirculus est, et BC segmentum innotescit, ergo et reliqua sectio CE patet. Et quoniam in triangulo BCD



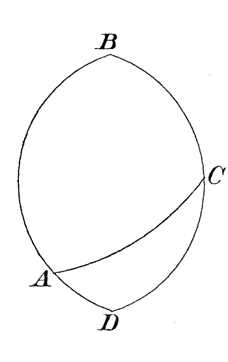
angulus BDC rectus est, et quadrante latus quidem CD minus, latus autem BC maius, ergo per propositionem XXII primi libri BD latus quadrantem exuperat. Igitur ex semicirculo et reliqua peripheria DE quadrante inferior est; ergo triangulus CDE[1]) possidet unumquodque trium laterum quadrante minus. Est autem per constructionem angulus CDE rectus, ergo per eandem propositionem XX secundi libri peripheria DE patescit. At prius AD segmentum innotuit, ergo et tota circumferentia ADE perspicua est; igitur ex semicirculo ADE reliquum segmentum AB innotescit.

Quare si in triangulo unum notum obtusumque angulum habente, et duorum laterum unum ex reliquis angulis continentium alterum quadrante quidem minus, alterum vero maius existat, obtususque angulus notus fuerit, erit et reliquum latus cognitum; quod erat ostendendum.

Propositio XX.

Si in triangulo obtusiangulo angulus obtusus notus existat, duorumque laterum unum ex reliquis angulis continentium 125r utrumque innotescat, | fueritque alterum quadrans, alterum quadrante maius, latus reliquum quoque patebit, si genus unius ex reliquis angulis perspicuum extiterit.

Sit itaque in triangulo ABC angulus ACB obtusus, et latus AC quadrans, AB vero latus quadrante maius[2]) [notumque], et utriusque duorum angulorum BAC et ABC genus pateat. Dico, quod latus BC reliquum patebit.

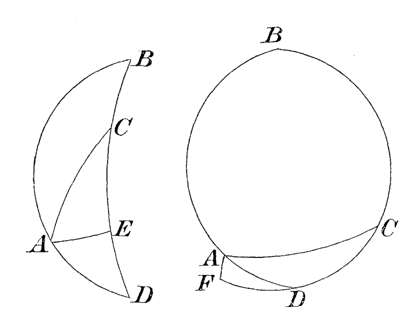


Protrahantur itaque duo latera AB, BC in concursum D in partes A, C. Patet autem per correlarium XXXII primi, quod duo anguli BAC et ABC simul sint aut recti, vel acuti, aut obtusi. Et per conversionem eiusdem propositionis XXXII et sui correlarii si iidem anguli recti fuerint, BC quadrans est; si acuti, BC latus quadrante minus est; quare ex semicirculo reliquum segmentum CD quadrante maius existit; ex eo igitur auferatur quadrans CE; descriptaque [sit] circumferentia AE; et quia per hipothesim angulus obtusus ACB cognitus est, igitur ex duobus rectis reliquus ACE ⟨cognoscitur; est autem AE circumferentia magnitudo anguli ACE⟩[3]); ergo 125v AE segmentum innotescit.[4]) Et quoniam AB segmentum | per hipothesim innotescit, ergo ex semicirculo reliquum AD patet. Anguli autem ad E recti sunt, quoniam C polus est circumferentiae AE[5]); igitur in partili

1) Hs. hat CBE.
2) Hs. hat AC *quadrans, AB vero quadrans, AB vero latus quadrante maius.*
3) Die Worte in ⟨ ⟩ am Rande mit 1. Hand.
4) Hs. hat nach *innotescit* die ausgestrichenen Worte *ergo ex semicirculo.*
5) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 15 & 16 inv.

triangulo ADE per propositionem XX secundi libri DE segmentum innotescit. At quia CE quadrans est per hipothesim, igitur et totum segmentum DEC patet; quare ex semicirculo reliquum CB idest latus BC innotescit.

Quod si duorum angulorum BAC et ABC uterque subiiciatur obtusus, ergo per eandem propositionem XXXII primi et ipsius correlarium BC latus quadrantem excedet, et CD peripheria quadrante minor existit. Sit ergo CDF quadrans, et super polo C et sumpto intervallo CF circumferentia magni orbis describatur AF. Et quia peripheria AF magnitudo est anguli ACF — est autem ACF angulus notus —, ergo et AF[1]) peripheria cognoscitur. Est et AD segmentum liquidum; nam reliquum est ex semicirculo BAD sublato AB segmento per hipothesim cognito; angulus autem AFD rectus est.[2]) Igitur in triangulo ADF per | XX secundi libri FD latus perspicuum erit. At quia per constructionem CDF segmentum quadrans est, igitur eius reliqua sectio DC perspicua est; et ex semicirculo DCB reliquum segmentum BC patet. 126r



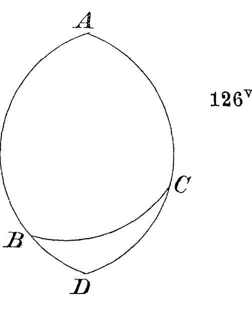
Igitur si in triangulo obtusiangulo angulus obtusus notus existat, et sequentia velut supra; q. o. o.

Propositio XXI.

In triangulo obtusiangulo, notum obtusum angulum habente, si duorum laterum unum ex reliquis angulis continentium utrumque notum et quadrante maius extiterit, reliquum quoque latus innotescet, si alter ex reliquis angulis genere pateat.

Sit ergo triangulus ABC habens [duo latera cognita AB et AC, eorumque utrumque quadrante maius, et] angulum ACB obtusum perspicuum, et genus alterius duorum angulorum BAC, ABC pateat. Dico, quod latus reliquum BC perspicuum fiet.

Duo itaque latera AB, AC in partes B, C protra|hantur usque ad concursum D. At quia per XXXIII primi uterque duorum angulorum BAC et ABC specie variatur, ergo praesens propositio non uno conficitur modo. 126v



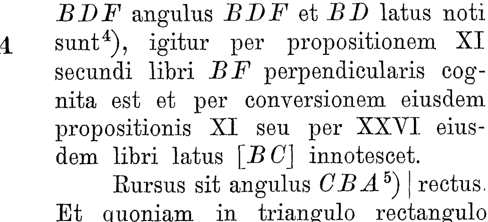
Inprimis ergo sit angulus BAC rectus. Igitur et suus[3]) aequalis BDC rectus est.[4]) Et quoniam in triangulo rectangulo [BCD] utrumque laterum rectum angulum [BDC] comprehendentium quadrante minus est et notum, igitur per XXII secundi latus BC innotescet.

Rursus angulus BAC sit obtusus. Ergo et suus aequalis BDC obtusus est.[4]) Describatur perpendicularis DE[5]) super BC. Et quoniam in triangulo

1) Hs. hat AE. 2) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15 & 16 inv.
3) Hs. hat *sinus*. 4) Menelai *sphaerica* I, def. 4. 5) Hs. hat DF.

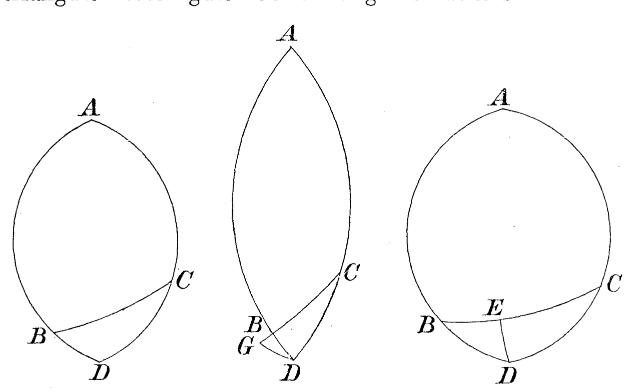
rectangulo CED angulus DCE acutus et notus est, et angulus DEC rectus per constructionem, latusque CD cognitum, igitur per XI propositionem secundi libri perpendicularis DE patebit. Et per XX eiusdem libri secundi segmentum CE innotescit, et per eandem propositionem cognitis[1]) duobus lateribus BD et DE trianguli BDE sectio BE perspicua erit. Quare et totum latus BC liquidum est.

Sit iam angulus BAC acutus. Ergo et suus[2]) aequalis BDC acutus est; quare per signum B descripta perpendiculari[3]) BF ipsa secabit CD peripheriam inter C, D signa in signo F. Et quia in triangulo rectangulo BDF angulus BDF et BD latus noti sunt[4]), igitur per propositionem XI secundi libri BF perpendicularis cognita est et per conversionem eiusdem propositionis XI seu per XXVI eiusdem libri latus [BC] innotescet.



127r Rursus sit angulus CBA[5]) | rectus. Et quoniam in triangulo rectangulo BCD duo latera BD, DC et angulus acutus BCD cognoscuntur, ergo et latus BC innotescet [II, 20].

Sit autem angulus ABC acutus. Et protracto segmento CB in partem B usque ad G descriptaque perpendiculari[3]) DG ipsa per propositionem XI secundi libri patet. Nam in triangulo rectangulo CDG angulus acutus DCG et latus CD perspiciuntur. Atque per propositionem XX secundi libri utrumque segmentorum CG et GB patet; ergo et reliqua sectio BC innotescit.



Sit demum angulus ABC obtusus. Igitur reliquus CBD acutus est; quare per signum D descripta perpendiculari velut DE ipsa secabit peripheriam BC inter B, C signa in puncto E. Per notum autem angulum acutum DCE et CD segmentum cognitum perpendicularis DE liquescit [II, 11]. Et per XX secundi libri bis repetitam utraque sectionum CE, EB cognitis CD, DE et BD segmentis innotescet.

Igitur in triangulo obtusiangulo, et reliqua ut supra; q. o. o.

---

1) Hs. hat *cognitus*. 2) Hs. hat *sinus*. 3) Hs. hat *perpendicularis*.
4) Dieser Teil des Beweises ist falsch; denn Winkel BDF ist nicht bekannt. 5) Hs. hat CBD.

Propositio XXII.

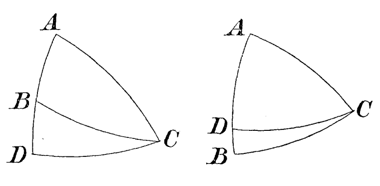
In triangulo duobus notis et inaequalibus lateribus acutum et notum angulum comprehendentibus, quorum utrumque quadrante minus est, uterque reliquorum angulorum innotescet. |

In triangulo ABC duo nota latera AB, AC utraque quadrante minora 127v acutum et notum angulum BAC comprehendant. Dico, quod uterque duorum angulorum ABC et ACB patescet.

Atque inprimis angulus ABC manifestandus est. Manifestum autem est per propositionem X primi et eius correlarium, quod angulo ABC contingit esse vario; nam aut acutus aut rectus vel obtusus erit. Ergo per signum C super latus AB ad rectos angulos describatur magni orbis segmentum CD, quod idem erit cum latere BC, si angulus ABC rectus existat. Si vero ABC angulus acutus fuerit, perpendicularis sectio CD cadet intra triangulum ABC. At ubi angulus ABC obtusus contigerit, CD perpendicularis cadet extra triangulum ABC. Eorum autem quodlibet quando contingat ex subiectis perspicuum erit; perpendicularis autem sectio CD notis AC latere et angulo acuto BAC innotescit per propositionem XVII secundi libri. Et — per propositionem XX secundi libri — quia in triangulo rectangulo ACD duo latera AC, CD acutum angulum ACD comprehendentia nota sunt, igitur AD latus innotescet.

Quod si AD segmentum aequale fuerit lateri AB, per|spicuum est, 128r angulum ABC esse rectum.

Si autem AD segmentum maius extiterit latere AB trianguli ABC, liquebit igitur, angulum ABC esse obtusum; nam per III primi [in triangulo rectangulo BCD angulus CBD acutus est. Et quoniam] in triangulo rectangulo BCD duo latera BD[1]) et CD rectum angulum BDC continentia patent, ergo per XXII[2]) secundi latus BC innotescet. Et quoniam in triangulo rectangulo BCD duo latera BC et CD acutum continentia angulum BCD patescunt, ergo et reliquus acutus angulus CBD per propositionem XVIII secundi patescit, quare de duobus rectis reliquus ABC perspicuus est.



At si perpendicularis CD ceciderit intra triangulum ABC, iam liquet per propositionem tertiam primi, [quod] angulus CBD[3]) acutus est, qui per eandem propositionem XVIII secundi libri notis perpendiculari CD et BC segmento[4]) patescit; sive per XXV secundi notis duobus lateribus BD[5]), CD rectum angulum BDC comprehendentibus innotescet acutus angulus CBD.

Iam esto propositum patefacere reliquum angulum ACB circa longius duorum laterum AB, AC, videlicet iuxta latus AC consistentem, ex iam ostensis igitur, patefactis perpendiculari sectione CD et AD segmento.

1) Hs. hat BC. 2) Hs. hat XX. 3) Hs. hat CDB.
4) Hs. hat *et BC segmento* BC. 5) Hs. hat BC.

Quod si AD idem fuerit ipsi lateri AB, igitur per XVIII secundi libri angulus ACB patet.

128v At segmento CD | cadente extra triangulum ABC, ergo per eandem propositionem XVIII secundi libri bis assumptum uterque duorum angulorum ACD et BCD innotescit; auferatur ergo minor BCD, relinquitur angulus ACB, qui quaerebatur, notus.

Rursus perpendicularis peripheria CD iam cadet intra triangulum ABC. Per ostensa igitur cognitis AD et CD segmentis et per propositionem eandem XVIII secundi bis repetitam uterque duorum angulorum ACD et DCB perspicuus est. Igitur ex eisdem angulus compositus ACB cognoscitur.

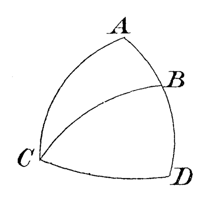
Ergo in triangulo duobus notis et inaequalibus lateribus acutum et notum angulum comprehendentibus, et sequentia ut supra; q. o. o.

Propositio XXIII.

In triangulo duobus notis et inaequalibus lateribus notum et acutum comprehendentibus angulum, quorum unum quadrante minus existat, alterum quadrans, uterque reliquorum angulorum patebit.

129r In triangulo ABC latus AB notum et qua|drante minus existens et AC latus existens quadrans acutum et perspicuum angulum BAC comprehendant. Dico, quod uterque duorum angulorum ABC et ACB perspicuus erit.

Protrahatur[1]) ergo latus AB in partem B usque ad D, sicut totum segmentum ABD quadrans existat; et super A signo iuxta intervallum alterius quadrantum ABD aut AC orbis magni circumferentia CD describatur. Ergo in triangulo BCD rectangulo existente, et utrumque duorum laterum BD et DC rectum angulum BDC comprehendentium habente notum atque quadrante minus, per propositionem XXV secundi libri uterque reliquorum angulorum CBD et BCD[2]) innotescet. Ergo de duobus rectis angulus reliquus ABC patebit, et de uno recto reliquus angulus ACB perspicuus est.



Igitur in triangulo duobus notis et inaequalibus lateribus notum[3]) et acutum comprehendentibus angulum, et reliqua ut supra; q. e. o.

Propositio XXIV.

129v In triangulo duobus notis et inaequalibus | lateribus notum et acutum angulum comprehendentibus, quorum quadrante minus existat alterum, alterum maius, et reliquorum angulorum uterque fiet manifestus.

In triangulo igitur ABC latus AB quadrante minus atque cognitum existat, AC vero latus quoque cognitum et quadrante maius, et angulus BAC cognitus etiam et acutus. Dico, quod uterque duorum angulorum ABC et ACB liquebit.

Ergo per signum B super AC segmentum perpendicularis BD sectio scribatur. Et quoniam in triangulo rectangulo ABD latus AB recto sub-

1) Hs. hat *protrahantur*. 2) Hs. hat BDC.
3) Hs. hat *lateribus angulis notum*.

tensum angulo et angulus BAD acutus innotescit, ergo per propositionem XVII secundi libri perpendicularis sectio BD innotescit; et per XX eiusdem libri segmentum AD clarum fiet. Atque per XVIII eiusdem libri ABD angulus patescit.

Rursum si in triangulo partili et rectangulo BCD segmentum CD quadrans existat, erit C signum polus segmenti BD, quare et angulus CBD rectus est[1]); et quia iam notus fuit angulus ABD, ergo et totus angulus $AB|C$ patet. 130r

Quod si CD sectio quadrante minor extiterit, ergo duobus lateribus BD[, D]C cognitis per XXV secundi angulus partilis CBD iterum innotescet. At iam patuit angulus ABD; ergo totus angulus ABC perspicuus erit.

Segmento[2]) autem CD quadrantem exuperante, protrahantur ergo duo latera BC, CA in concursum super signo E. Et quoniam in triangulo rectangulo BDE duo latera BD, DE rectum angulum BDE comprehendentia patent, et utrumque quadrante minus existit, ergo per propositionem XXV secundi angulus DBE liquidus fiet. Quare de duobus rectis reliquus angulus CBD patescit. At pridem patuit angulus ABD, ergo totus angulus ABC manifestus erit.

Et per eandem propositionem XXV secundi angulus quoque ACB innotescit, aut per BD[, D]C segmenta, si CD sectio quadrante minor existat, aut per BD[, D]E segmenta, si eadem CD sectio quadrantem exuperat. At si quadrans existat CD, sectio erit perpendicularis BD[3]) magnitudo anguli BCD; sed ex | ostensis BD perpendicularis sectio cognoscitur; ergo et angulus BCD patescet. 130v

Igitur in triangulo duobus notis et inaequalibus lateribus notum et acutum angulum comprehendentibus[4]), et sequentia ut supra; q. e. o.

Propositio XXV.

In triangulo si duo nota et inaequalia latera acutum notumque comprehendant angulum, et eorundem laterum quadrans unum existat, alterum vero quadrante maius, erit uterque reliquorum angulorum manifestus.

In triangulo ABC latus AB[5]) quadrans existat, AC vero latus quadrantem excedat ipsumque sit cognitum, et angulus BAC acutus atque notus. Dico, quod duorum angulorum ABC et ACB uterque cognitus fiet.

Ex noto igitur et longiore latere AC quadrans AD auferatur, et super A polo iuxta intervallum AB aut AD peripheria scribatur BD. Ergo sectio $B|D$ nota est; magnitudo etenim anguli BAD. Et quoniam anguli ad D signum recti sunt, et in triangulo rectangulo BCD duorum laterum BD[, D]C rectum angulum BDC comprehendentium utrumque cognitum 131r

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15 & 16 inv. 2) Hs. hat *Segmenti*.
3) Vor BD hat die Hs. *sectio* gestrichen. 4) Hs. hat *comprehendentia*.
5) Hs. hat AD.

existit, ergo per XXV secundi angulus CBD patescit; angulus autem ABD rectus est, ergo totus angulus ABD liquescit. Rursus per eandem XXV secundi angulus BCD perspicitur.

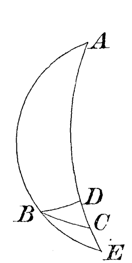
Ergo in triangulo si duo nota et inaequalia latera, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XXVI.

Si trianguli duo nota et inaequalia latera, quorum utrumque quadrante superius existat, acutum notumque comprehendant angulum, erit uterque reliquorum angulorum cognitus.

Sit ergo in triangulo ABC utrumque duorum inaequalium et notorum laterum AB et AC quadrante maius, et angulus BAC acutus notusque. 131v Dico, quod uterque duorum angulorum | ABC et ACB perspicuus fiet.

Sit ergo latus AB brevius latere AC, et duo latera AB, AC protrahantur in concurssum [!] E. Atque per signum B super ACE semicirculum describatur perpendicularis sectio BD. Et quoniam per propositionem X primi libri latus BC quadrante minus existit, et angulus ACB acutus, igitur per propositionem XX eiusdem libri primi perpendicularis BD cadit intra triangulum ABC. At quia angulus BED aequalis est angulo BAC, at angulus BAC ex hypothesi acutus, ergo et angulus eidem aequalis[1]) BED acutus est; angulus autem BDE per constructionem rectus est, et sub maiori angulo latus maius subtenditur[2]), ergo segmentum BE superat perpendicularem sectionem BD; sed BE segmentum quadrante minus est, ergo multo fortius perpendicularis sectio BD quadrante minor existit; ergo per propositionem XXI primi DE segmentum quadrante vincitur. Perpendicularis autem sectio BD cognita est per propositionem XVII secundi, et BE segmentum ex hypothesi



132r — | nam ex semicirculo reliquum AB patet —, ergo per XX secundi eiusdem segmentum DE innotescit. At CE sectio perspicitur; nam reliqua existit sublato noto segmento AC ex semicirculo ACE; igitur et CD sectio perspicua existit. Ergo per XXV[3]) eiusdem secundi libri bis assumptam uterque duorum angulorum DBE et CBD liquet; igitur partilis angulus CBE innotescit; ergo de duobus rectis reliquus ABC manifestus est. At trianguli BCD, duobus lateribus BD, CD rectum angulum BDC comprehendentibus et notis, per propositionem XXV eiusdem libri secundi patescet angulus BCD.

Igitur si trianguli duo nota et inaequalia latera, quorum utrumque, et sequentia ut supra; q. o. o.

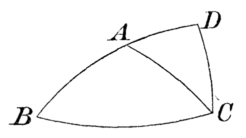
Propositio XXVII.

In triangulo duobus lateribus notis et inaequalibus, quorum quadrante utrumque minus existat, obtusum notumque angulum comprehendentibus, reliquorum uterque angulorum manifestabitur. |

1) Hs. hat *inaequalis*. 2) Menelai *sphaerica* I, 7. 3) Hs. hat *XVIII*.

In triangulo igitur ABC utrumque duorum laterum AB, AC[1]) quadrante minus existat et notum, atque ab eisdem comprehensus angulus BAC obtusus notusque. Dico, quod uterque reliquorum angulorum ABC et ACB patescet. 132ᵛ

Per signum igitur C super BA segmentum perpendicularis sectio CD scribatur. Et quia angulus BAC obtusus est, [et] ex hypothesi utrumque duorum laterum AB et AC quadrante minus est, igitur perpendicularis sectio CD cadit extra triangulum ABC secans latus BA super D signo Et quia per. XVII secundi segmentum CD notum est, igitur in triangulo rectangulo ACD duobus notis lateribus AC, CD acutum angulum ACD comprehendentibus latus AD perspicuum est [II, 20]; ergo totum segmentum BAD manifestum erit. Rursus per XXV eiusdem secundi libri in triangulo BCD notis duobus lateribus BD, DC rectum angulum BDC comprehendentibus uterque duorum angulorum ABC et BCD patescit. Et per XVIII eiusdem secundi partilis an|gulus ACD perspicuus est; at totus angulus BCD iam innotuit; ergo et reliquus angulus ACB manifestus existit. 133ʳ



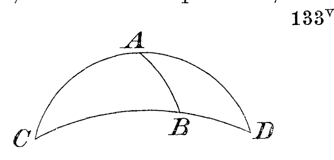
Igitur in triangulo duobus lateribus notis, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XXVIII.

In triangulo duobus lateribus notis et inaequalibus, quorum unum quadrante minus, alterum quadrans existat, obtusum notumque angulum comprehendentibus, erit uterque reliquorum angulorum perspicuus.

In triangulo itaque ABC latus AB sit quadrante minus notumque, et latus AC quadrans. Angulus autem BAC obtusus notusque. Dico, quod duorum angulorum ABC et ACB uterque innotescit.

Duo igitur latera AC, BC producantur in concursum D. Et quoniam in triangulo ABD latus AB quadrante minus existit, et latus AD quadrans, et ipsa latera AB | et AD nota acutum notumque angulum BAD comprehendunt, igitur per propositionem XXIII huius tertii libri uterque duorum angulorum ABD et ADB patet. At ABC angulus reliquus est ABD noto angulo ex duobus rectis sublato; igitur et angulus ABC cognoscitur. Rursus ACB angulus aequalis est ADB angulo noto; igitur et angulus ACB cognoscitur. 133ᵛ



Ergo in triangulo duobus lateribus notis inaequalibus, et sequentia ut supra; q. o. o.

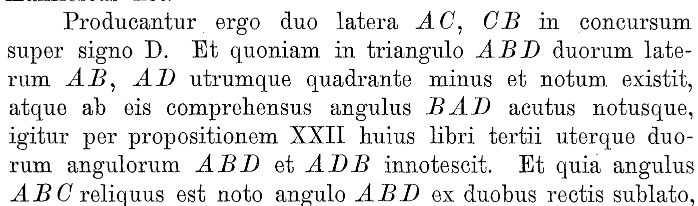
Propositio XXIX.

In triangulo duobus lateribus cognitis et inaequalibus[2]), quorum alterum quadrante quidem minus, alterum vero maius existat, obtusum notumque continentibus angulum, erit uterque reliquorum angulorum cognitus.

---

1) Hs. hat BC. 2) Hs. hat *lateribus et inaequalibus cognitis.*

In triangulo itaque ABC latus AB quadrante minus existat, latus 134r vero AC quadrantem exuperet, et utrumque cognitum existat; | angulus quoque BAC ab eis comprehensus sit obtusus cognitusque. Dico, quod uterque duorum angulorum ABC[1]) et ACB manifestus fiet.



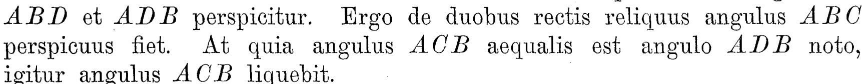
Producantur ergo duo latera AC, CB in concursum super signo D. Et quoniam in triangulo ABD duorum laterum AB, AD utrumque quadrante minus et notum existit, atque ab eis comprehensus angulus BAD acutus notusque, igitur per propositionem XXII huius libri tertii uterque duorum angulorum ABD et ADB innotescit. Et quia angulus ABC reliquus est noto angulo ABD ex duobus rectis sublato, igitur angulus ABC manifestus est. Et quia angulus ADB notus aequalis est angulo ACB, ergo et angulus ACB perspicuus erit.

Igitur in triangulo cognitis duobus lateribus inaequalibus, et sequentia ut supra; q. o. o.

Propositio XXX.

In triangulo cognitis binis lateribus et inaequalibus, quorum alterum quadrans, alterum quadrante maius fuerit, obtusum notumque continentibus angulum, erit uterque reliquorum angulorum perspicuus. |

134v In triangulo ABC latus AB sit quadrans, et latus AC quadrante maius atque perspicuum, et angulus BAC obtusus notusque. Dico, quod uterque reliquorum angulorum ABC et ACB manifestus fiet.



Duo itaque latera AC, CB in partes A, B producantur in concursum super D signo. Et quia in triangulo ABD latus AB quadrans est, et latus AD quadrante minus notumque, et angulus BAD acutus atque cognitus, igitur per propositionem XXIII huius libri tertii uterque duorum angulorum ABD et ADB perspicitur. Ergo de duobus rectis reliquus angulus ABC perspicuus fiet. At quia angulus ACB aequalis est angulo ADB noto, igitur angulus ACB liquebit.

Ergo in triangulo cognitis duobus lateribus et inaequalibus, quorum alterum quadrans, alterum quadrante maius fuerit, obtusum notumque continentibus angulum, erit uterque reliquorum angulorum perspicuus; q. o. o.

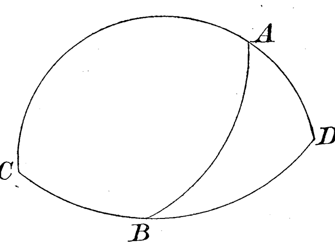
Propositio XXXI.

In triangulo perspicuis duobus[2]) lateribus et inaequalibus, quorum quadrante utrumque maius existat, obtusum notumque 135r an|gulum comprehendentibus, erit uterque reliquorum angulorum perspicuus.

---

1) Hs. hat AB statt ABC. 2) *Duobus* über die Zeile mit 1. Hand.

In triangulo itaque ABC duorum laterum AB, AC utrumque quadrante maius sit atque manifestum, et angulus ACB quoque notus [obtususque]. Dico, quod uterque reliquorum angulorum ABC et ACB liquidus erit.



Duo itaque latera AC, CB in partes A, B protrahantur in concursum super D signo. Et quoniam in triangulo ABD latus AB quadrante quidem maius existit, AD vero latus quadrante minus, eorumque utrumque notum, et ab eis comprehensus angulus BAD acutus atque notus, igitur per propositionem XXIV [huius tertii libri] uterque reliquorum angulorum ABD et ADB cognoscitur. Ergo de duobus rectis reliquus angulus ABC perspicuus est. Et quia angulus ACB aequalis est angulo ADB noto, igitur et angulus ACB manifestus fit.

Ergo in triangulo perspicuis duobus lateribus et inaequalibus, quorum quadrante utrumque maius existat, obtusum notumque angulum comprehendentibus, erit uterque reliquorum angulorum perspicuus; q. o. o.

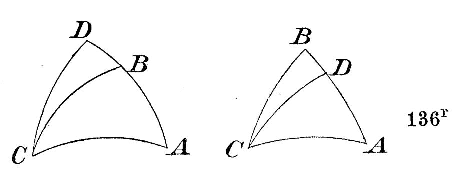
Propositio XXXII. |

135v In triangulo sphaerico duobus acutis angulis atque latere inter eos, quod quadrante minus est, cognito, utrumque reliquorum laterum patescit.

Sit triangulus ABC habens cognitos duos angulos ACB et BAC acutos, et quadrante minus latus AC, quod eisdem angulis adiacet, quoque perspicuum. Dico, quod duorum laterum AB, BC utrumque perspicuum fiet.

Igitur per signum C ipsi AB lateri ad [angulos] rectos descripta esto orbis magni peripheria CD, quae per propositionem XVII secundi libri perspicua fiet. Deinde per propositionem XX eiusdem secundi libri AD circumferentia innotescit. Cognitis autem AC et AD segmentis per propositionem XVIII eiusdem secundi libri angulus ACD innotescit.

Qui si aequalis fuerit angulo ACB, igitur CD perpendicularis sectio eadem erit ipsi BC lateri, et AD peripheria ipsi AB lateri aequalis.



At angulo ACD vincente ACB angulum, igitur ex eodem noto auferatur angulus ACB per hypothesim liquidus, et residebit angulus BCD manifestus. Eo et CD perpendiculari | sectione per propositionem XXIII eiusdem secundi libri BC latus patebit, quo et angulo BCD iam pridem revelato BD segmentum liquet [II, 17]. Eo ex AD sectione sublato et latus AB manifestabitur. 136r

Rursus angulus ACD minor sit angulo ACB. Igitur angulus ACD sublatus ex angulo ACB relinquat angulum BCD cognitum. Perpendiculari autem sectione CD pridem manifestata et angulo BCD per eandem pro-

positionem XXIII secundi libri manifestabitur latus BC. Rursus latere BC et angulo BCD cognito BD segmentum liquescit [II, 17], quo adiuncto ipsi AD segmento patebit et latus AB.

Igitur in triangulo sphaerico duobus acutis angulis atque latere inter eosdem perspicuo, reliquorum laterum utrumque perspicitur; q. e. o.

Correlarium.

Hinc quoque liquet, si seorsum manifestare unum tantum laterum reliquorum libeat, ab communi igitur signo eiusdem lateris et lateris AC perpendiculare[1]) in alterum ignotorum laterum describamus segmentum, itaque 136v [per] praemissam praeceptionem idem la|tus cognoscimus; velut si propositum fuerit latus BC tantum liquidum reddere, igitur perpendicularis sectio describenda est super latus AB per signum C.

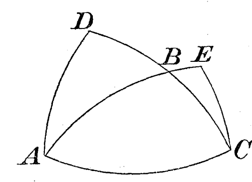
Si vero latus AB sigillatim cognoscere velimus, per signum A perpendiculare segmentum super latus reliquum BC scribendum est; imitantes itaque iam ostensam doctrinam conficiemus propositum.

Propositio XXXIII.

In triangulo sphaerico duobus acutis angulis atque latere inter eos, quod quadrans est, liquido, utrumque reliquorum laterum manifestabitur.

Sit ergo triangulus ABC habens utrumque duorum angulorum ACB et BAC acutum notumque, et latus AC quadrantem. Dico, quod utrumque duorum laterum AB, BC patescet.

Et quia per propositionem XLI[2]) primi libri utrumque duorum laterum 137r AB et BC qua|drante inferius est, sitque intentio AB latus in primis notum efficere, igitur reliquum latus ignotum BC in partem B producatur usque in D signum, sic ut CBD quadrans existat. Atque descripta AD magni orbis peripheria[3]) ipsa est magnitudo per diffinitionem acuti anguli ACB [I, def. 6]; et propterea circumferentia AD patet. Et quia signum C polus est circumferentiae AD, igitur datorum angulorum CAD et ADC uterque rectus est.[4]) Ergo angulus BAC per hypothesim cognitus ablatus ex recto CAD relinquit angulum BAD manifestum. Igitur per propositionem XXIII secundi libri, cognito segmento AD et angulo BAD, latus AB patebit. Deinde per XVII eiusdem secundi libri segmentum BD innotescet; quod si quadranti CD auferatur, residebit BC latus cognitum.



Correlarium.

Quod si latus BC seorsum ac in primis perspicere velimus, igitur iuxta traditam praeceptionem latus AB in quadrantem ABE producatur, descripta

1) Hs. hat *perpendicularem*. 2) Hs. hat *XII* [?].
3) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 20. 4) Ibid. I, 16 inv. & 15.

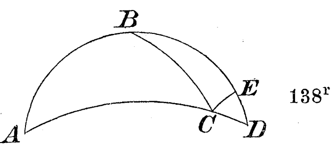
CE peripheria et reliqua, ut iam dictum est, agenda sunt; et la|tus BC 137ᵛ inprimis patebit. Prior tamen doctrina praecipit, quomodo duorum laterum AB, BC alterum ex altero inprimis manifestato pateat.

Propositio XXXIV.

In triangulo sphaerico duobus acutis angulis atque latere cognito inter eos, quod quadrantem exuperet, utrumque reliquorum laterum patescet.

Sit ergo triangulus ABC habens cognitum latus AC quadrante maius, et utrumque duorum angulorum ACB et BAC notum acutumque. Dico, quod utrumque duorum laterum AB, BC patescet.

Propositum nunc esto latus BC inprimis notum facere atque deinceps AB latus. Igitur duo latera AB, AC protrahantur in concursum D; et per signum C ipsi BD peripheriae ad angulos rectos describatur CE. Et quia angulus acutus BAC notus est aequalis angulo CDE, igitur angulus CDE manifestus est. CD autem segmentum patet | — nam 138ʳ ipsum est de semicirculo ACD reliquum notae sectionis AC sublatae [!] [1]) —, quare per XVII secundi libri CE perpendicularis sectio liquet. Et quia CD latus recto angulo CED subtensum quadrante minus est, et CE perpendicularis acuto angulo CDE subtenditur, atque sub maiore angulo maius subtenditur latus [2]), igitur CE perpendicularis multo magis quadrante vincitur. Ergo per propositionem XXI secundi libri angulus DCE liquet. At quia totus angulus BCD patet — nam de duobus rectis reliquus est noti anguli ACB subtracti [!] [3]) —, igitur partilis angulus BCE innotescet. At quia CE perpendicularis sectio, ut patuit, nota est, igitur per propositionem XXIII secundi libri latus BC perspicuum est. Eodem quoque modo protractis duobus lateribus AC, CB in concursum patebit latus AB.



Aliter autem idem latus AB patebit manifestato, ut iam traditum fuit, latere BC. Nam per XX secundi cognitis CE et CD segmentis sectio DE perspicua erit, et per eandem propositionem XX secundi CE et CB cognitis segmentis BE segmentum liquet. Igitur totum segmentum BED [4]) innote|scit; 138ᵛ ergo ex semicirculo reliquum segmentum AB patebit.

Igitur in triangulo sphaerico duobus acutis angulis atque cognito inter eos latere, quod quadrantem excedat, utrumque reliquorum laterum manifestabitur.

Propositio XXXV.

In triangulo sphaerico duobus obtusis angulis atque cognito inter eos latere, quod quadrante superatur, reliquorum laterum utrumque patescet.

1) Soll heißen: *nota sectione AC sublata.*
2) Menelai *sphaerica* I, 7. 3) Soll heißen: *noto angulo ACB subtracto.*
4) Hs. hat *segmentum BED segmentum.*

In triangulo ABC uterque duorum angulorum ACB et BAC obtusus sitque [!] cognitus, atque inter eos AC latus quadrante minus atque cognitum. Dico, quod utrumque duorum laterum AB, BC patescit.

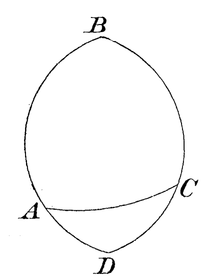
Igitur, binis lateribus AB, BC in concursum protractis super D signo, erunt in triangulo ACD duo anguli ACD et CAD acuti et noti; ergo utrumque duorum laterum AD, DC per propositionem XXXII huius tertii libri perspicuum erit. Igitur de duobus semicir|culis BAD, BCD reliqua segmenta AB, BC perspicua sunt.

139r

Igitur in triangulo ABC duobus obtusis angulis ACB, BAC atque cognito inter eos latere AC, quod quadrante minus est, reliquorum laterum AB, BC utrumque patet; q. o. o.

Propositio XXXVI.

In triangulo duobus angulis obtusis notis super quadrante existentibus, utrumque reliquorum laterum patescit.



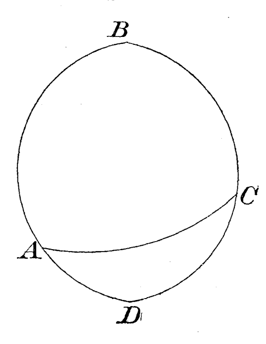
Ut in praecedenti figura, et quoniam per hypothesim uterque duorum angulorum ACB et BAC obtusus est, igitur in triangulo ACD duorum angulorum ACD et DAC uterque acutus est, et latus AC quadrans. Quare per propositionem XXXIII huius tertii utrumque duorum segmentorum AD, CD patet; igitur et reliqua duo segmenta AB et BC perspicua sunt.

In triangulo igitur duobus angulis obtusis BAC[1]) et BCA cognitis, et reliqua ut supra; q. o. o. |

139v

Propositio XXXVII.

In triangulo, cognitis duobus obtusis angulis super segmento consistentibus quadrantem exuperante, et utrumque reliquorum laterum patescit.



In triangulo ABC latus AC quadrantem exuperans innotescat; et sit duorum angulorum BAC et ACB uterque obtusus et cognitus. Dico, quod utrumque ex duobus lateribus AB et BC perspicuum erit.

Ut in praecedenti figura, et quoniam duorum angulorum ACB et BAC uterque obtusus est et notus, igitur de duobus rectis reliqui duo anguli ACD et DAC perspicui sunt et acuti. Et quoniam per propositionem XXXIV huius tertii libri in triangulo duobus acutis angulis atque latere inter eos cognito, quod quadrantem excedat, utrumque ex reliquis lateribus patet, ergo duo segmenta AD et DC perspicua sunt.

1) Hs. hat ABC.

Quare de duobus semicirculis BAD et BCD reliqua duo segmenta AB et BC perspi|cua sunt. 140[r]

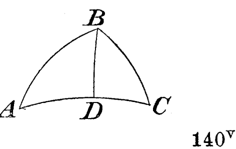
Igitur in triangulo, cognitis duobus obtusis angulis consistentibus super latere quadrantem exuperante, et sequentia ut supra; q. e. demon-[strandum].

Propositio XXXVIII.

In triangulo cognitis duobus acutis angulis atque latere, quod quadrante inferius unum ex perspicuis angulis subtendit, utrumque reliquorum laterum manifestum erit.

In triangulo itaque ABC uterque duorum angulorum ACB et BAC pateat et latus AB, quod quadrante minus existat. Dico, quod utrumque reliquorum laterum AC et BC innotescit.

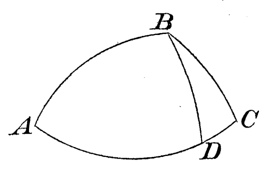
Et quia AB notum segmentum quadrante minus est, et angulus BAC acutus atque perspicuus, descripta igitur perpendicularis sectio BD per propositionem XVII secundi libri liquebit. Et quoniam in partili triangulo BCD angulus BCD eique subtensum latus BD patent, igitur per propositionem XXVI secundi libri latus BC perspicitur. At cognitis duobus late|ribus AB, BC atque perpendiculari sectione BD per propositionem XX secundi libri utrumque duorum segmentorum AD et DC patebit; quare et reliquum latus AC innotescit. 140[v]



Igitur in triangulo cognitis duobus acutis angulis, et reliqua ut supra; q.e.o.

Assumptum sive lemma.

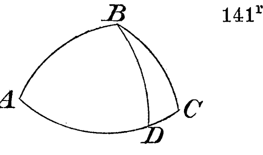
Quando BD perpendicularis aequalis fuerit angulo BAD, erit AB et AD segmentorum utrumque quadrans.[1])



Propositio XXXIX.

In triangulo cognitis duobus acutis angulis atque latere, quod quadrans est, unum ex cognitis angulis subtendente, reliquorum laterum utrumque patebit.

In triangulo ABC duorum angulorum ACB et BAC uterque sit acutus atque manifestus, et AB latus quadrans. Dico, quod utrumque | duorum laterum AC, CB patebit. 141[r]



Describatur perpendicularis BD; et quoniam AB ex hypothesi quadrans est, igitur per propositionem secundam primi AD sectio quadrans est circuli magni; et per diffinitionem anguli sphaeralis [I, def. 4] BD perpendicularis sectio aequalis angulo BAD, et idcirco BD segmentum innotescit. At quia AD segmentum quadrans est, igitur

1) Da $AB < 90^{\circ}$ gegeben ist, ist das Lemma unverständlich.

reliqua sectio DC quadrante minor. Est autem et BD quadrante minus — magnitudo namque acuti anguli BAD [I, def. 6] —, et per propositionem tertiam primi BC latus quoque quadrante minus. Igitur per propositionem XXVI secundi libri BC latus liquidum erit; et per propositionem XX eiusdem secundi libri DC latus patet. At ex iam ostensis AD segmentum liquet esse quadranti aequale; ergo totum segmentum ADC patet.

Igitur in triangulo cognitis duobus acutis angulis atque latere, quod quadrans est, unum ex cognitis angulis[1]) subtendente, reliquorum laterum utrumque patebit. |

141v

Propositio XL.

In triangulo cognitis duobus acutis angulis atque latere, quod quadrantem superat, unum ex acutis angulis subtendente, erit utrumque reliquorum laterum manifestum.

In triangulo ABC uterque biduorum [!] angulorum ACB et BAC cognitus sit atque acutus, et AB latus quoque perspicuum atque quadrante maius. Dico, quod utrumque duorum laterum AC, CB patebit.

Duo itaque latera AB et AC in partes B, C protrahantur usque in D concursum. Et protracta perpendiculari sectione BE ipsa cadit intra triangulum ABC. Et quoniam in triangulo rectangulo ABE per propositionem L libri primi AE segmentum quadrante maius est, et BE quadrante minus, ergo DE quadrante minus | est. BD autem sectio per hypothesim quadrante vincitur; ergo in triangulo rectangulo BDE unumquodque latus quadrante minus est. Angulus autem BDE acutus aequalis est angulo BAE et idcirco notus, et segmentum BD quoque notum est — nam ex semicirculo ABD reliquum segmentum AB per hypothesim cognoscitur —, ergo per propositionem XVII secundi libri perpendicularis sectio [BE] innotescit. Et quia in partili triangulo rectangulo BCE acutus angulus BCE atque latus eidem subtenso BE pateat, igitur per propositionem XXVI eiusdem secundi libri BC latus innotescit. Et per propositionem XX secundi libri bis assumptam utrumque duorum segmentorum DE, CE perspicuum est; igitur et DC sectio patet. Quare ex semicirculo ACD reliquum segmentum AC innotescit.

142r

In triangulo igitur cognitis duobus acutis angulis, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio XLI. |

142v

In triangulo duobus obtusis angulis cognitis atque latere, quod quadrans est, alterum eorum subtendente, reliqua duo latera patebunt.

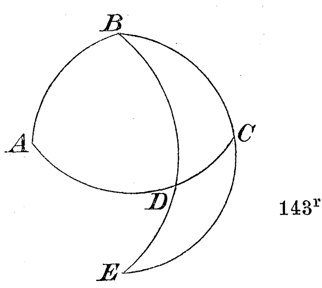
In triangulo itaque ABC uterque duorum angulorum ACB et BAC pateat, et latus AB quadrans existat. Dico, quod utrumque reliquorum laterum AC, CB perspicuum fiet.

---

1) Nach *angulis* hat die Hs. die Worte *atque latere qui* gestrichen.

Et quia per propositionem LVI primi liquet, angulum ABC esse obtusum, et duorum laterum AC, CB utrumque quadrante maius, igitur ex AC latere quadrans AD auferatur, et descripta circumferentia BD super A polo ipsa erit magnitudo anguli BAD [I, def. 4]. Igitur BD circumferentia cognita est, et anguli iuxta D signum recti.[1]) Protrahantur ergo duo segmenta BC, BD in concursum super E signo. Et quia in triangulo CDE angulus CDE rectus est, et circa eum duo latera CD, DE utraque quadrante mino|ra per constructionem — est enim BD segmentum magnitudo obtusi anguli BAD et idcirco quadrante maius —, igitur ex semicirculo BDE reliqua sectio DE quadrante minor. Et quoniam ex hipothesi AD quadrans est, idcirco reliqua sectio DC quadrante inferior. At per III primi CE circumferentia quoque quadrante inferior est. Et quia per hipothesim obtusus angulus BCA cognoscitur, ergo de duobus rectis reliquus acutus angulus DCE manifestus est. Patet autem et DE segmentum; igitur per propositionem XXVI secundi libri peripheria CE patescit; ergo de semicirculo BCE reliquum segmentum BC perspicuum est. Et per propositionem XX eiusdem secundi libri notis peripheriis DE, EC segmentum DC prodibit, quo adiecto ad quadrantem AD tota sectio ADC perspicua fit.

143r



In triangulo igitur duobus obtusis angulis cognitis, et reliqua ut supra; q. o. d.

Propositio XLII.

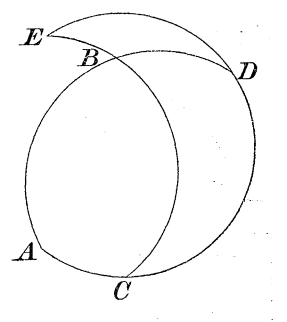
In triangulo duobus angulis obtusis per|spicuis atque latere, quod quadrante maius est, unum ex eisdem angulis subtendente, reliqua latera patebunt, praesertim si genus anguli tertii pateat.

143v

In triangulo igitur ABC uterque duorum angulorum ACB et BAC obtusus cognitusque sit, et latus AB quadrante maius atque cognitum, et genus reliqui anguli ABC pateat. Dico, quod utrumque reliquorum laterum AC[2]), BC innotescet.

Et quia per propositionem LVII[3]) primi libri angulo ABC contingit esse genere vario, ideoque praesens propositio variis modis determinabitur.

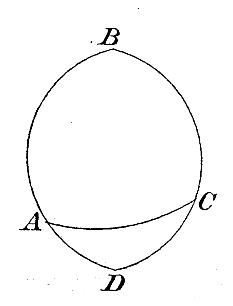
Sit ergo inprimis angulus ABC rectus; et AB, AC latera producantur in concursum super signo D; rursus BC, CD segmenta protrahantur in concursum super signo E. Et quia in partili triangulo BCD utrumque segmentorum BC, CD quadrante maius est [I, 43], igitur in triangulo rectangulo BDE quodlibet trium laterum quadrante minus est. Et quoniam angulus BED acutus aequalis est angulo BCD acuto cognito, igitur | angulus BED cognitus est. Est autem per hypo-



144r

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15.
2) Hs. hat AB. 3) Hs. hat LVIII.

thesim perspicuum BD latus; nam ex semicirculo ipsum reliquum est AB cognito segmento subtracto; igitur per propositionem XXVI secundi libri segmentum DE innotescit. At segmentum DE aequatur segmento AC; nam ex duobus semicirculis ACD et CDE communi segmento CD subtracto resident AC et DE segmenta aequalia; sed DE segmentum iam patuit; igitur AC sectio innotescit. Rursus per XX eiusdem secundi libri duobus cognitis peripheriis BD, DE acutum angulum BDE comprehendentibus BE segmentum perspicuum fit; igitur ex semicirculo CBE reliqua sectio BC manifesta fit.



In triangulo igitur ABC habente duos obtusos et cognitos[1]) angulos BAC et ACB, et reliquum angulum ABC rectum, et AB latus quadrante maius atque cognitum, utrumque duorum laterum AC, CB innotescit.

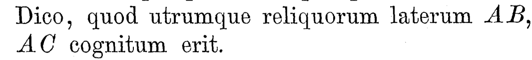
Sit iam angulus ABC sive acutus sive obtusus velut in secunda figura, et universaliter sit angulus ABC qualiscumque. Igitur duo latera AB, BC concurrant super signo D. Et quoniam in triangulo ACD duo acuti anguli ACD, DAC cogniti sunt, atque latus 144v AD qua|drante minus et notum, igitur per propositionem XXXVIII huius tertii libri utrumque duorum laterum AC, CD patebit. Ergo ex semicirculo BCD reliquum segmentum BC innotescit.

In triangulo igitur ABC duobus obtusis angulis perspicuis ACB et BAC atque latere AB, quod quadrante maius est, utrumque reliquorum laterum AC, CB perspicuum erit.

Propositio XLIII.

In triangulo duobus cognitis angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrante inferius sit, acutum angulum subtendente, erit utrumque reliquorum laterum manifestum.

In triangulo itaque ABC angulus BAC sit acutus, et ACB angulus obtusus, et uterque cognitus, et BC latus perspicuum atque quadrante minus. Dico, quod utrumque reliquorum laterum AB, AC cognitum erit.



Duo itaque latera AB et AC producantur in concursum super signo D. Et quoniam in 145r triangulo | BCD uterque duorum angulorum BCD et BDC acutus atque manifestus existit, et BC latus quadrante minus atque perspicuum, igitur per propositionem XXXVIII huius tertii libri duo latera BD, DC cognita fient. Ergo de duobus semicirculis ABD et ACD reliqua segmenta AB et AC perspicua fiunt.

Igitur in triangulo duobus cognitis angulis, uno acuto altero obtuso, et reliqua ut supra; q. o. o.

---

1) Am Rande stehen hier die Worte *et cognitus* mit 1. Hand.

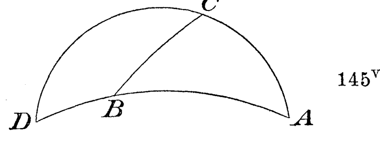
Propositio XLIV.

In triangulo perspicuis duobus angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrans est, acutum subtendente, erit utrumque reliquorum laterum manifestum.

In triangulo itaque ABC angulus BAC sit acutus, et ACB obtusus, et uterque manifestus, et BC latus quadrans. Dico, quod utrumque reliquorum laterum AB, AC manifestabitur.

Duo itaque latera AB, AC protrahantur in concursum super signo D. Et quoniam in triangulo BCD | duo anguli BCD et BDC acuti sunt atque cogniti, et latus BC quadrans, ergo per propositionem XXXIX utrumque duorum laterum BD et DC[1]) perspicuum erit. Ergo de duobus semicirculis ABD et ACD reliqua segmenta AB et AC perspicua sunt.

145[v]



In triangulo igitur duobus perspicuis angulis, et reliqua ut supra; q. o. o.

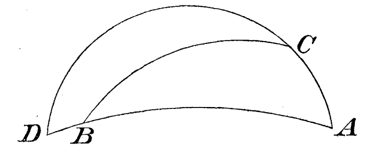
Propositio XLV.

In triangulo cognitis duobus angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrante maius existat, acutum subtendente, erit utrumque reliquorum laterum perspicuum.

In triangulo itaque ABC angulus BAC sit acutus, et ACB angulus obtusus, et latus BC quadrante maius et liquidum. Dico, quod utrumque reliquorum laterum perspicuum fiet.

Duo itaque latera AB, AC producantur in concursum super signo D. | [Et quoniam in triangulo BCD duo anguli BDC et BCD acuti sunt atque cogniti,] et latus BC quoque cognitum et quadrante maius, ergo per propositionem XL utrumque reliquorum laterum BD, DC perspicuum erit. Quare de duobus semicirculis ABD et ACD reliqua duo segmenta AB et AC manifesta fiunt.

146[r]



In triangulo igitur cognitis duobus angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrante maius existat, acutum subtendente, utrumque reliquorum laterum perspicuum erit; q. e. de[monstrandum].

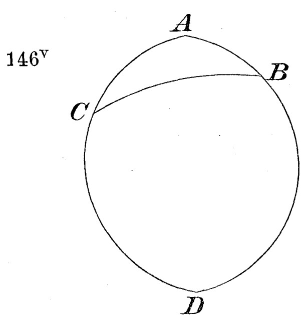
Propositio XLVI.

In triangulo cognitis duobus angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrans existat, obtusum subtendente, erit utrumque reliquorum laterum cognitum.

---

1) Hs. hat DE.

In triangulo ABC angulus ACB sit acutus, et angulus BAC obtusus, atque uterque notus, et latus BC quadrans. Dico, quod duo latera reliqua AB, AC quoque perspicua fient.



146ᵛ Duo itaque latera AB, AC protrahantur in concursum super signo D. Et quoniam in | triangulo BCD duo anguli BCD et BDC obtusi sunt atque cogniti, et latus BC quadrans, ergo per propositionem XLI huius tertii libri duo latera BD et DC liquida fiunt. De duobus semicirculis ABD et ACD reliqua segmenta AB, AC cognoscuntur.

Ergo in triangulo cognitis duobus angulis, uno acuto et altero obtuso, atque latere, quod quadrans existat, obtusum subtendente, utraque reliqua latera patebunt; q. erat o.

Propositio XLVII.

In triangulo duobus angulis perspicuis, altero quidem acuto, altero autem obtuso, atque latere, quod quadrantem excedit, obtusum angulum subtendente, erunt duo [reliqua] latera manifesta.

In triangulo itaque ABC angulus BAC sit obtusus, et angulus ACB acutus, et uterque manifestus, et latus BC quadrante maius atque cognitum. Dico, quod reliqua duo latera AB, AC perspicua quoque fient.

147ʳ Duo itaque latera[1] | AB et AC in concursum producantur super signo D. Et quia in triangulo BCD duo anguli BCD et BDC[2] sunt obtusi atque cogniti, et BC latus cognitum quadrantem exuperans, ergo per propositionem XLII huius tertii libri duo latera BD, CD liquida sunt. Quare de duobus semicirculis ABD et ACD reliqua segmenta AB et AC perspicua fiunt.

In triangulo igitur ABC duobus angulis perspicuis, altero quidem ACB[3] acuto, et altero BAC obtuso, atque latere BC, quod quadrantem exuperat, perspicua sunt reliqua latera AB, AC; quod oportuit ostendere.

Propositio XLVIII.

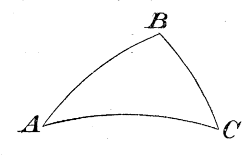
In triangulo duobus acutis angulis perspicuis atque latere eis[4] adiacente, quod quadrante minus existat, reliquus angulus perspicuus fiet.

147ᵛ In triangulo itaque ABC duo anguli ACB et BAC | sint acuti atque noti, et eisdem latus adiacens AC quadrante minus existat notumque. Dico, quod reliquus angulus ABC perspicuus fiet.

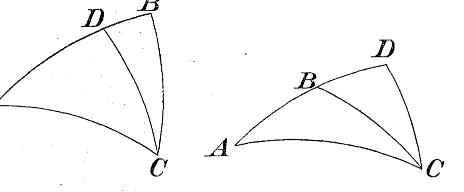
---

1) AB, AC . . . *itaque latera* hat die Hs. bis. 2) Hs. hat BCD *et* BCD. 3) Hs. hat ACD. 4) Hs. hat *quod eis* statt *eis*.

Per signum C super AB latus perpendicularis sectio CD scribatur, quae cognitis AC latere atque angulo BAC per propositionem XVII [secundi] perspicua sit. Et per propositionem XX secundi libri AC, CD segmentis liquidis cognoscitur AD peripheria. Rursus per propositionem XVIII eiusdem libri secundi duabus circumferentiis AC, AD cognitis angulus ACD patet. Qui si fuerit aequalis angulo ACB angulus ABC rectus est et idcirco cognitus.



At si angulus ACD minor[1]) extiterit angulo ACB, ergo ACD angulus auferatur ex angulo ACB, et constabit angulus BCD, quo atque perpendiculari sectione CD perspicuus erit angulus CBD [II, 19].



Postquam autem angulus ACD superat angulum ACB, minore igitur ablato maiori cognitus residet angulus BCD, quo rursus et perpendiculari sectione CD[2]) cognitus prodibit angulus CBD extrinsecus, quare et de binis rectis reliquus interior angulus | ABC manifestus erit. 148r

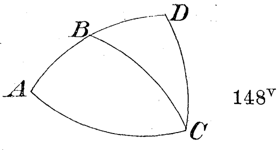
In triangulo igitur binis acutis angulis perspicuis, atque latere eisdem adiacente, quod quadrante minus existat, reliquus angulus manifestabitur; q. e. o.

Propositio XLIX.

In triangulo duobus acutis angulis manifestis atque inter eos latere, quod quadrans existat, reliquus angulus manifestabitur.

In triangulo itaque ABC duo anguli ACB et BAC uterque sit acutus atque cognitus, at latus AC quadrans. Dico, quod angulus ABC perspicuus fiet.

Et quia per propositionem XLI[3]) primi utraque duo latera AB, BC quadrante sunt minora, et angulus ABC obtusus, igitur alterum duorum laterum AB, BC in partem B producatur, donec quadrans existat. Esto itaque AB productum usque in D, ita ut ABD quadrans existat, et descripta super polo A circumferentia CD erit uterque duorum angulorum | ad C, D signa rectus.[4]) Et quia per hipothesim angulus ACB cognoscitur, ergo ex recto angulo ACD reliquus angulus BCD innotescit. At circumferentia CD cognita est — nam magnitudo perspicui anguli BAC[5]) [I, def. 4] —, igitur acutus [angulus] CBD constabit. Quare de duobus rectis reliquus obtusus angulus ABC manifestus est. 148v



In triangulo igitur, et sequentia ut supra; q. e. o.

---

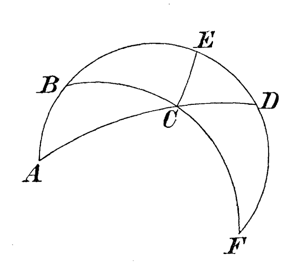
1) Hs. hat *minus*. 2) Hs. hat BD. 3) Hs. hat XL.
4) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15. 5) Hs. hat BAE.

Propositio L.

In triangulo duobus acutis angulis cognitis atque latere eis adiacente, quod quadrante maius est, reliquus angulus fit manifestus.

In triangulo itaque ABC duo anguli ACB et BAC sunt acuti notique, et latus AC quadrante maius atque perspicuum. Dico, quod angulus ABC quoque manifestus fiet.

Ergo bina latera AB, AC in concursum producantur super D signo, 149r et per signum C super circumferentiam BD ad angulos | rectos describatur CE sectio. Et quia DC segmentum quadrante inferius est atque cognitum, et angulus CDE acutus est atque perspicuus — aequalis enim noto et acuto angulo BAC —, igitur per propositionem XVII secundi perpendicularis sectio CE[1]) manifesta est. Et quia CD segmentum per hipothesim quadrante est inferius atque maius perpendiculari sectione CE — maiori enim angulo maius subtenditur latus[2]) —, ergo peripheria CE multo minor est quadrante. Et cognitis duobus segmentis CD, CE acutus angulus DCE ab eis comprehensus per propositionem XXI[3]) secundi libri manifestabitur. Obtusus autem angulus BCD perspicuus est — nam ex hypothesi de duobus rectis reliquus angulus ACB acutus[4]) innotescit —, ergo angulus BCE manifestus fit. Et quoniam per propositionem XLV primi libri contingit, duo latera AB, BC varia esse genere — nam utrumque aliquando quadrans est, nonnunquam quadrante minus, quandoque quadrante maius —, idcirco et angulo BCE accidit esse vario.



In primis igitur angulus BCE rectus existat. Et quoniam per con- 149v structionem angulus BEC | quoque rectus existit, igitur per propositionem primam libri primi utrumque duorum segmentorum BC, BE quadrans est, et signum B polus circumferentiae CE.[5]) Igitur peripheria CE per diffinitionem anguli sphaerici [I, def. 4] magnitudo est anguli CBE. At CE segmentum iam patuit; ergo et angulus CBE manifestus est. Quare de duobus rectis reliquus angulus ABC obtusus perspicuus erit.

Rursus BCE angulus subiiciatur acutus. Et quia perpendicularis peripheria CE atque acutus angulus BCE ex iam ostensis cognoscuntur, ergo per propositionem XIX secundi libri acutus angulus CBE manifestus fiet. Ergo de duobus rectis angulis reliquus obtusus angulus ABC perspicitur.

Deinde BCE angulus existat obtusus. Ergo duo segmenta BC, BD in concursum agantur super signo F. Et quia in triangulo CEF latus CE cognitum est atque quadrante minus, et ECF angulus acutus manifestus, ergo per propositionem XIX secundi libri acutus angulus CFE perspicuus | 150r fit. At angulus CBD aequalis est angulo CFD; ergo angulus CBD perspicuus est. Quare de duobus rectis reliquus angulus ABC manifestus est.

Igitur in triangulo duobus angulis cognitis, et sequentia ut supra; q. o. o.

1) Hs. hat CD. 2) Menelai *sphaerica* I, 7. 3) Hs. hat XLI.
4) Hs. hat *acutus* korr. aus *angulus*.
5) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 16 inv.

Lemma.

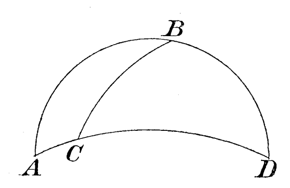
In duobus triangulis BCE et CEF duos angulos CBE et CFE per propositionem XXXIV primi libri constat esse acutos atque singula eorundem triangulorum latera quadrante minora, si duo anguli BCE et ECF acuti fuerint.

Propositio LI.

In triangulo duobus notis angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere eis adiacente, quod quadrante inferius existat, reliquus angulus perspicuus erit. |

In triangulo itaque ABC angulus ACB sit obtusus, et BAC acutus, et uterque cognitus, et latus AC quoque cognitum et quadrante minus. Dico, quod reliquus angulus ABC manifestus fiet. 150v

Duo itaque latera AB, AC in concursum protrahantur super signo D. Et quoniam in triangulo BCD duo acuti anguli BCD et BDC manifesti sunt, et CD latus manifestum atque quadrante maius, igitur per propositionem L huius libri tertii angulus CBD manifestus fiet. Ergo reliquus ABC liquet.



Igitur in triangulo duobus perspicuis angulis, uno acuto altero obtuso, et reliqua ut supra; q. o. o.

Propositio LII.

In triangulo duobus liquidis angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere eis adiacente, quod quadrans sit, reliquus angulus manifestabitur.

In triangulo itaque ABC angulus BAC sit acutus, et ACB obtusus, atque uterque liqui|dus, et latus AC quadrans. Dico, quod angulus ABC perspicuus fiet. 151r

Duo itaque latera AB, AC in concursum producantur super signo D. Et quoniam in triangulo BCD bini[1]) anguli BCD et BDC acuti sunt atque noti, et latus CD quadrans, igitur per propositionem XLIX huius tertii angulus CBD patebit, quare de binis rectis reliquus angulus ABC.

In triangulo igitur binis liquidis angulis, uno acuto altero obtuso, atque latere eis adiacente, quod quadrans sit, reliquus angulus manifestabitur; q. o. o.

Propositio LIII.

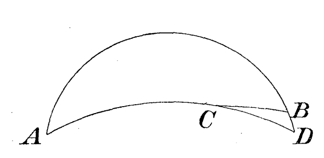
In triangulo duobus perspicuis angulis, altero acuto altero obtuso, et latere inter eos quadrantem excedente, reliquus angulus perspicuus fiet.

---

1) Hs. hat *mi* [d. h. ?].

In triangulo itaque ABC angulus ACB sit obtusus, et BAC acutus, et uterque eorum cognitus, et latus AC quoque manifestum atque quadrante 151ᵛ maius. Dico, quod reliquus angulus | ABC constabit.

Bina itaque latera AB et AC in concursum agantur super signo D. Et quoniam in triangulo BCD duo anguli BCD et BDC[1]) acuti sunt atque cogniti, et latus CD quoque perspicuum atque quadrante minus, ergo per propositionem XLVIII huius tertii libri reliquus angulus CBD patebit. Quare de duobus rectis residuus angulus ABC manifestus fiet.



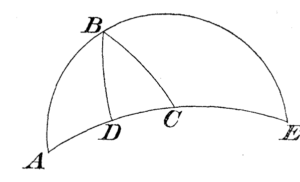
In triangulo igitur perspicuis duobus angulis, et sequentia ut supra; q. o. o.

Propositio LIV.

In triangulo duobus acutis angulis perspicuis, atque latere alterum eorundem subtendente, quod quadrante minus existat, reliquus angulus perspicuus fiet, si genus lateris eundem reliquum angulum subtendentis innotescat. Verumtamen si idem latus quadrante maius extiterit, tunc oportebit et ipsius magnitudinem agnoscere. |

152ʳ In triangulo itaque ABC duo anguli ACB et BAC sunt acuti atque noti, et latus BC notum atque quadrante minus. Dico, quod angulus ABC perspicuus fiet.

Per signum B igitur perpendicularis sectio BD describatur, quae intra triangulum ABC cadet. Et quia BC latus notum ex hipothesi quadrante minus est, atque angulus BCD acutus et cognitus, igitur per propositionem XVII secundi libri perpendicularis sectio BD perspicua fit. Ergo duobus segmentis BC et BD cognitis angulus CBD innotescit per propositionem XXI secundi libri. Rursus quoniam in triangulo rectangulo ABD duo latera AD, DB rectum angulum ADB comprehendentia utraque quadrante minora sunt, ergo per tertiam primi AB latus quadrante inferius existit. Et quoniam acutus angulus BAD eique latus subtensum BD patent, igitur per propositionem XXVII secundi libri angulus ABD constat. Sed et angulus CBD iam manifestus fuit, ergo totus angulus ABC innotescit.



152ᵛ Haec ita se habent, si latus AC aut quadrans | aut quadrante minus fuerit. At ubi latus idem AC quadrantem exuperat, ergo necesse erit quantitatem AC lateris agnoscere. Et quoniam per iam ostensa et hipothesim atque per XX secundi CD segmentum liquet, ergo AD sectio nota erit. Quae si quadrans extiterit, ergo A signum polus erit circumferentiae BD, et angulus ABD rectus. At prius innotuit angulus CBD, igitur totus angulus ABC perspicuus est. Postquam autem AD segmentum quadrante inferius extiterit, ergo duobus peripheriis AD, BD per XXV secundi angulus ABD perspicietur; ergo totus angulus ABC notus est. Ubi tandem AD

1) Hs. hat DBC.

segmentum quadrantem excesserit, ergo per propositionem VII primi angulus ABD obtusus est, et angulus BAD acutus, atque latus AB quadrante maius. Est autem et AD ex hipothesi quadrante superius. Igitur duo segmenta AB, AD in concursum protrahantur super signo E. Et quia in triangulo rectangulo BDE unumquodque | latus quadrante minus est, et duo latera BD, DE rectum angulum continentia utraque cognita, igitur per propositionem XXV secundi libri angulus EBD innotescit. Ergo de duobus rectis reliquus angulus ABD patebit. At prius angulus CBD patefactus est; quare totus angulus ABC innotescet. 153r

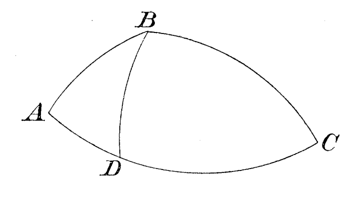
In triangulo igitur duobus acutis angulis perspicuis, atque latere alterum eorum subtendente, quod quadrante minus existit, reliquus angulus patuit; q. e. o.

Propositio LV.

In triangulo duobus acutis angulis manifestis, atque latere, quod quadrans est[1]), [alterum angulum] acutum subtendente, reliquus angulus perspicuus fiet.

In triangulo itaque ABC duo anguli ACB et BAC sint acuti atque noti, et latus BC quadrans. Dico, quod reliquus angulus ABC innotescit.

Et quia per propositionem LIII primi libri latus AC | quadrante maius est, et angulus ABC obtusus, igitur ex latere AC quadrans CD auferatur, et descripta BD circumferentia ipsa erit nota; nam magnitudo est anguli BCD [I, def. 4]. Et quia signum C polus est circumferentiae BD[2]), igitur angulus CBD rectus est. Rursus in triangulo[3]) [rectangulo] ABD angulus BAD eique subtensum latus BD constant; ergo per propositionem XXVII secundi libri angulus ABD manifestus est. At iam patuit, angulum CBD esse rectum; ergo totus angulus ABC manifestus est. 153v



In triangulo igitur duobus angulis [manifestis] atque latere, quod quadrans est, reliquus angulus perspicuus fiet; q. o. demon[strare].

Propositio LVI.

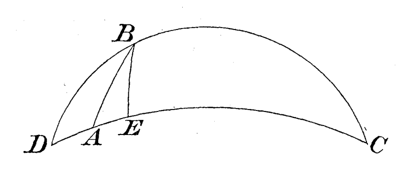
In triangulo perspicuis duobus acutis angulis, atque latere, quod quadrantem excedit, alterum acutum angulum[4]) subtendente, reliquus angulus liquebit. |

In triangulo ABC duo anguli ACB et BAC sint acuti perspicuique, et latus BC quadrante maius atque cognitum. Dico, quod angulus ABC quoque manifestabitur. 154r

Duo ergo latera BC, AC in concursum producantur super signo D; et per B signum ipsi AC lateri ad rectos angulos describatur BE peripheria. Et quoniam in triangulo rectangulo BDE latus BD quadrante minus

1) *Est* über die Zeile mit 1. Hand.
2) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 16 inv.
3) Nach *triangulo* hat die Hs. das Wort *rectilineo* gestrichen.
4) Hs. hat *excedit, unum acutum alterum angulum.*

est atque cognitum, et angulus acutus BDE notus, igitur per propositionem XVII secundi libri perpendicularis circumferentia BE constabit, et per propositionem XXVII eiusdem secundi libri bis repetitam duo anguli DBE et ABE manifesti erunt. Ergo partilis angulus ABD perspicitur. Quare de duobus rectis angulis reliquus [angulus] ABC manifestus est.



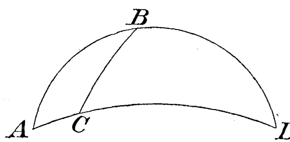
Igitur in triangulo perspicuis duobus acutis angulis, et sequentia ut supra; q. e. o.

Propositio LVII.

In triangulo duobus angulis notis, uno acuto altero obtuso, 154v atque latere, | quod quadrante minus est, acutum subtendente, erit reliquus angulus perspicuus. Haec propositio varie determinatur, veluti ex demonstratione propositionis LIV patet huius tertii.

In triangulo itaque ABC angulus ACB sit obtusus, et BAC acutus, et uterque manifestus; et latus BC quoque liquidum et quadrante minus. Dico, quod angulus ABC manifestabitur.

Ergo duo latera AB et AC producantur in concursum super signo D. Et quia in triangulo BCD duo anguli BCD et BDC acuti sunt atque cogniti, et latus BC liquidum et quadrante minus, igitur per propositionem LIV huius tertii libri angulus CBD manifestus fit. Ergo de duobus rectis reliquus angulus ABC constabit.



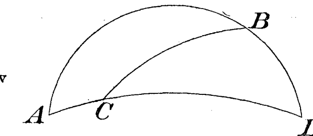
In triangulo igitur [duobus] angulis notis, 155r altero acu|to altero obtuso, atque latere, quod quadrante minus est, acutum angulum subtendente, reliquus erit angulus perspicuus; q. e. o.

Propositio LVIII.

In triangulo duobus notis angulis, altero acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrans est, acutum subtendente, erit reliquus angulus manifestus.

In triangulo itaque ABC angulus ACB sit obtusus, et angulus BAC acutus, et uterque perspicuus, et latus BC quadrans. Dico, quod reliquus angulus ABC liquebit.

Duo igitur latera AB et AC in concursum agantur super signo D. Et quia in triangulo BCD duo anguli BCD et BDC acuti sunt et noti, atque latus BC quadrans, ergo per propositionem LV huius 155v tertii libri angulus | CBD constabit, ergo de duobus rectis residuus ABC.

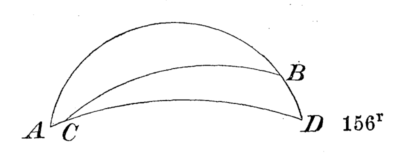


Igitur in triangulo duobus notis angulis, altero acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrans est, acutum subtendente, reliquus angulus manifestabitur.

Propositio LIX.

In triangulo duobus notis angulis, altero acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrante maius existat, acutum subtendente, reliquus cognoscitur angulus.

Velut in praecedenti figura sit BC iam latus quadrante maius; et quoniam [in] triangulo BCD duo anguli BCD et BDC sunt acuti atque cogniti, et latus BC quadrante maius, igitur per propositionem LVI huius tertii libri angulus CBD innotescit. Ergo | de duobus rectis reliquus ABC manifestus est. 156r

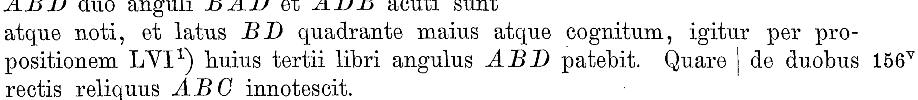


In triangulo igitur duobus notis angulis, et sequentia ut supra; q. o. o.

Propositio LX.

In triangulo duobus notis angulis, altero acuto altero obtuso, atque latere, quod quadrante minus est, obtusum subtendente, reliquus patebit angulus.

In triangulo itaque ABC angulus ACB sit acutus, et BAC obtusus, et uterque cognitus, et latus BC quadrante minus notumque. Dico, quod angulus ABC quoque perspicietur.



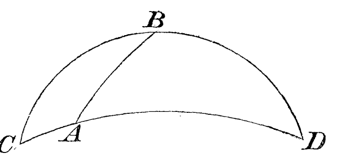
Ergo bina latera AC, BC agantur ad concursum in signo D. Et quia in triangulo ABD duo anguli BAD et ADB acuti sunt atque noti, et latus BD quadrante maius atque cognitum, igitur per propositionem LVI[1]) huius tertii libri angulus ABD patebit. Quare | de duobus rectis reliquus ABC innotescit. 156v

In triangulo igitur duobus perspicuis angulis, et reliqua ut supra; q. o. demon[strare].

Propositio LXI.

In triangulo duobus perspicuis angulis, altero acuto et altero obtuso, atque latere, quod quadrans existat, obtusum angulum subtendente, reliquus manifestabitur angulus.

Velut in praecedenti figura latus BC quadrans existat. Et quoniam in triangulo ABD duo anguli ADB[2]) et BAD acuti sunt et noti, et BD quadrans existit, igitur per propositionem LV[3]) huius tertii angulus ABD perspicuus fit. Quare de duobus rectis angulus ABC reliquus constabit.



In triangulo igitur binis perspicuis angulis, et reliqua ut supra; q. o. o.

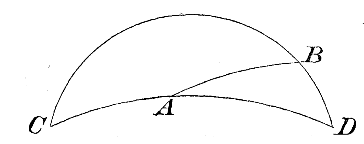
---

1) Hs. hat *LVII*. 2) Hs. hat *ABD*. 3) Hs. hat *LI*.

Propositio LXII. |

157r In triangulo duobus perspicuis angulis, altero acuto et altero obtuso, et quod quadrante maius est latere obtusum subtendente angulum, reliquus angulus patebit.

In eodem schemate BC segmentum quadrante maius existat. Et quoniam in triangulo ABD duo anguli ADB[1]) et BAD acuti sunt et noti, et BD latus quadrante minus, ergo per propositionem LIV angulus ABD manifestus est. Quare de duobus rectis reliquus ABC perspicuus existet.



In triangulo igitur duobus notis angulis, altero acuto et altero obtuso, et quod quadrante maius existit latere obtusum subtendente angulum, reliquus innotuit angulus; quod erat demonstrandum.

Finis tertii libri. |

157v vacat.

1) Hs. hat ABD.

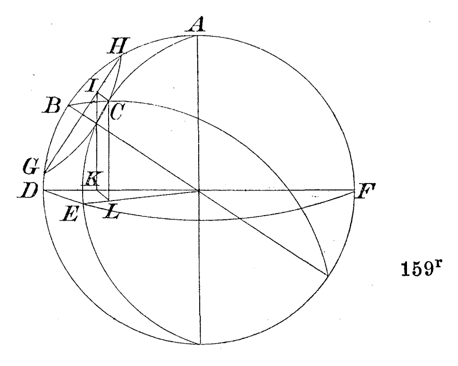
IOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS[1] 158r
DE TRIANGULIS SPHAERICIS.

LIBER QUARTUS.

Propositio prima.

In dato sphaerico triangulo duobus segmentis, quorum utrumque fuerit quadrante minus, propositum aliquem comprehendentibus angulum, si super [termino] unius eorundem segmentorum tanquam polo magnus scribatur circulus, et super altero quidem eiusdem segmenti termino, spatio autem alterius duorum iuxta eundem angulum segmentorum parvus describatur circulus, ex quo circumferentia proposito angulo similis auferatur, et a termino sinus | versi[2]) eandem subtendentis circum- 158v ferentiam perpendicularis ad magni circuli planum deducatur, erit eadem perpendicularis aequalis sinui recto complementi eius segmenti, quod in dato triangulo eundem propositum subtendit angulum.

In dato igitur sphaerico triangulo ABC duo segmenta AB, BC, quorum utrumque quadrante sit minus, propositum angulum ABC comprehendant; et circulus[3]) ipsius AB segmenti sit ABD; atque complementum AC segmenti angulum ABC subtendentis sit CE. Et super A quidem polo spatio autem AE magnus describatur circulus DEF, secans circulum ABD super D, F signis. Rursus super B polo intervallo autem BC parvus scribatur circulus GCH, secans eundem circulum ABD super G, H signis. Per constructionem autem | CH 159r circumferentia similis est angulo ABC proposito, cuius quidem circumferentiae sinus versus sit HI, a cuius termino I perpendicularis IK ad planum circuli DEF agatur; et sinus rectus ipsius CE segmenti sit CL. Dico, quod perpendicularis IK sit aequalis recto sinui CL.



1) Hs. hat *Verneri Nerinorimbergensis*. 2) Hs. hat *versus*.
3) Hs. hat *circulis*.

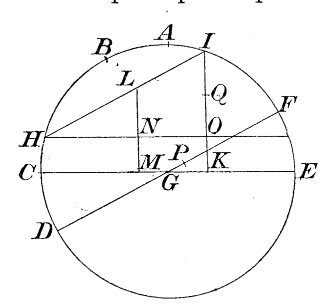
Coniunctis itaque CI, LK rectis, et quia planum quadrantis ACE erectum est ad planum circuli DEF[1]), igitur rectus sinus CL ad idem planum circuli DEF erigitur; nam rectus sinus CL perpendicularis est ad communem sectionem duorum planorum, quadrantis videlicet ACE et magni circuli DEF.[2]) Est autem IK per constructionem ad idem planum DEF perpendicularis; ergo perpendicularis IK et sinus rectus CL sunt paralleli per propositionem sextam libri undecimi *elementorum* Euclidis. Et quia per diffinitionem [II, def. 2] CI rectus est sinus segmenti HC[3]), et planum parvi circuli GCH erectum est plano circuli ABD[4]), igitur duorum angulorum CIK et IKL uterque rectus per | tertiam diffinitionem eiusdem libri 159ᵛ undecimi[5]); nam HI pars est communis sectionis duorum planorum circuli magni ABD et circuli parvi GCH. Et quia utraque rectarum linearum CI, KL in eodem sunt plano IK, CL rectarum linearum per septimam propositionem eiusdem libri undecimi, igitur per XXVIII[6]) libri primi eorundem *elementorum* duae rectae CI, KL sunt parallelae. Igitur quadrilaterum $CIKL$ est parallelogrammum.[7]) Ergo IK perpendicularis aequalis est sinui recto CL; nam per XXXIV propositionem primi libri eorundem *elementorum* „parallelogramorum locorum latera, quae ex opposito, et anguli, aequalia sunt adinvicem".

Igitur in dato sphaerico triangulo duobus segmentis, etc.; quod oportuit demonstrare.

Propositio secunda.

Datis tribus lateribus propositi trianguli sphaerici angulum 160ʳ datum efficere duobus | contentum segmentis, quorum utrumque quadrante minus extiterit.

Sit ergo alterum segmentorum, quae[8]) propositum continent angulum, AB; atque maximus circulus, cuius segmentum AB portio existit, sit $ABCDEF$. Et descripti super A polo maximi circuli dimetiens sit CE, atque super B polo maximi descripti circuli dimetiens sit DF.



Hi duo dimetientes se invicem secabunt in centro sphaerae, quod sit G. Sit autem reliquum segmentorum, a quibus propositus angulus continetur, aequale segmento BH, quod subiiciatur esse maius circumferentia AB, minus autem complemento eiusdem circumferentiae AB. Igitur punctus H necessario cadet inter B, C signa. Et a puncto H ipsi DGF dimetienti parallela agatur HI. Atque segmenti IFE sinus rectus sit IK; et ipsius 160ᵛ parallela sit acta LM aequalis sinui recto comple|menti tertii lateris, quod in proposito triangulo sphaerico subtenditur ei angulo, quem datum oportet

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15.
2) Kein euklidischer Satz scheint hier direkt anwendbar. 3) Hs. hat AC.
4) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15.
5) Nach Zamberti; in Heibergs Ausgabe XI, def. 4. 6) Hs. hat XXIX.
7) Hs. hat *parallelogen: minum* [!]. 8) Hs. hat *qui*.

efficere. Deinde CGE diametro parallelus agatur HNO, secans LM super N et IK super O signo.

Et quia per constructionem duae rectae lineae IK[1]) et LM sunt parallelae, igitur per XXIX propositionem libri primi *elementorum* anguli ad N, O signa sunt aequales, videlicet angulus HNL aequalis angulo[2]) NOI; uterque enim rectus. Et quoniam duobus triangulis IHO, LHN[3]) communis angulus est NHL, igitur duo trianguli IHO, LHN sunt aequianguli et similes. Ergo per propositionem quartam libri sexti *elementorum* ratio ipsius ILH ad HL datur; est enim sicut IO ad LN ratio data. Et quia IH magnitudine datur — est enim dimetiens paralleli super B polo et secundum BH datam sectionem descripti —, igitur et HL, item et reliqua IL magnitudine datur. Est autem IL per ea, quae prius [IV, 1] ostensa sunt, sinus versus circumferentiae in parallelo IH similis | angulo proposito, **161r** quem datum oportebat efficere.

Datis igitur tribus lateribus propositi trianguli sphaerici, etc.; quod oportuit demonstrare.

Lemma sive assumptum.

Quod autem IO et LN rectae lineae datae sint, sic perspicuum fiet. Nam IOK datur; est enim IOK sinus IEF[!] segmenti per constructionem quoque dati; nam ipsum componitur ex segmento EF aequali ipsi AB segmento, et FI segmento, quod aequale est DH complemento segmenti BH, quod ex hypothesi aequatur alteri laterum angulum subiectum ad B continentium. Et LM quoque datur; nam ipsa aequalis est sinui recto complementi circumferentiae propositum ad B angulum subtendentis. Sunt autem et OK, NM rectae datae; utraque enim aequalis est sinui recto circumferentiae HC, quae complementum existit per constructionem ABH segmenti. Igitur ex IOK et LNM sublatis OK, NM erunt reliquae IO, LN datae; quod oportebat manifestum perspicuumque efficere. |

Correlarium. **161v**

Hinc etiam erit perspicuum, [quod] in subiecto triangulo sphaerico trium datorum segmentorum, quorum duo propositum angulum, quem datum efficere oportet, continentia utraque sint quadrante minora, propositus ad B angulus unica fiet perspicuus proportione, in qua primus terminus sit dimidium ipsius IO, secundus terminus LN, tertius terminus FG semidiameter sphaerae sive sinus totus, quartus ipsius DGF[4]) dimetientis particula DP existens sinus versus circumferentiae maximi circuli, cuius dimetiens DGF[5]), quae quidem circumferentia similis est in parallelo IH circumferentiae, cuius versus sinus est HL, qua quidem circumferentia ex semicirculo dempta remanebit segmentum maximi circuli aequale proposito ad B angulo sphaerico.

Et ut liquidius fiat, quod illatum fuit correlarium, sit igitur IO ad NL, seu sicut IH ad HL, sic etiam fiat DF ad DP; et dimidium ipsius

1) Nach IK hat die Hs. das Wort *elementorum* gestrichen.
2) Hs. hat *anguli*. 3) Hs. hat LHH. 4) Hs. hat DGT.
5) Hs. hat DGE.

IO sit IQ; et quia IQ ad IO est sicut GF ad FD, et IO ad LN sicut
162r FD ad DP, | igitur ex aequali IQ ad LN erit sicut FG semidiameter sphaerae, seu sinus rectus integer, ad DP. Sed DP sinus versus est circumferentiae, qua maximo semicirculo sublata relinquitur circumferentia aequalis sphaerico angulo ad B proposito.

Igitur in triangulo sphaerico trium datorum segmentorum, quorum duo propositum angulum includant, et cetera; quod est correlarium inferendum.

Propositio tertia.

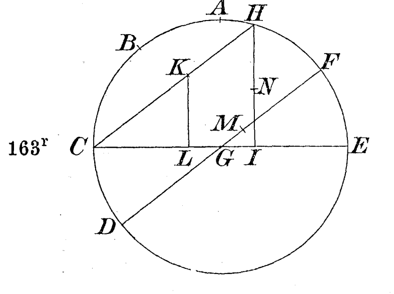
Si autem in dato triangulo sphaerico trium datorum segmentorum duo segmenta propositum [angulum] continentia fuerint aequalia, idem propositus angulus datus angulus[1]) erit.

Haec propositio per praemissam et subsequentes quoque ostendi poterit. Nam si uniuscuiusque aequalium segmentorum complementum maius fuerit octava parte circuli magni, id est maius gradibus XLV, ipsa propositio fiet
162v per praecedentem pro|positionem; sin autem aequale, per sequentem propositionem; aut [si] minus octava parte maximi circuli, sive grad[ibus] XLV, problema fiet per quintam propositionem.

Propositio quarta.

At si alterum duorum segmentorum, quae propositum ad B angulum comprehendunt, aequale fuerit complemento circumferentiae AB, id est segmento BC,

Igitur ex C puncto ipsi DGF parallelus agatur CH, secans circulum $ABCDE$ ad H signum. Et super CGE dimetientem perpendicularis agatur HI. Et complementi circumferentiae subtendentis ad B angulum propositum sit KL sinus.



Et quia, velut prius ostenditur, triangulus CKL[2]) similis triangulo CHI, ergo per propositionem quartam libri sexti *elementorum* ratio
163r HI ad KL erit sicut ratio ipsius HC | ad CK. Et ex dimetiente FD auferatur DM secundum rationem HI ad KL. Igitur HI ad KL est sicut FD ad DM. Et dimidia ipsius HI sit HN. Et quia per constructionem FG dimidium est ipsius DGF dimetientis, ergo HN ad HI est sicut FG ad FGD. Igitur ex aequali HN ad KL est sicut FG ad DM. In hac autem proportione tres priores termini dati sunt. Nam HN dimidium est ipsius HI, quae rectus est sinus circumferentiae EFH per constructionem quoque datae; nam ipsa componitur ex duplo circumferentiae EF, id est ex duplo ipsius circumferentiae AB. Et KL aequalis est sinui recto complementi circumferentiae per hypothesim datae

1) Hs. hat *angulum*. 2) Hs. hat CHL.

et subtendentis angulum ad B propositum. Et FG sinus totus. Ergo et quartus terminus DM datus est. Et quoniam per constructionem ratio FD ad DM est sicut ratio ipsius HC [ad] CK — est autem CK sinus versus circumferentiae in parallelo HC similis segmento magni circuli, [quo maximo semicirculo sublato] | relinquitur circumferentia aequalis angulo ad B proposito 163v [IV, 1] —, igitur FM sinus versus est propositi anguli ad B.

Ergo angulus ad B propositus est datus; quod oportuit demonstrare.

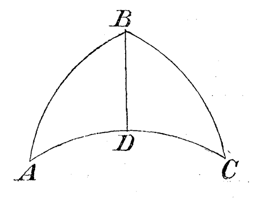
Correlarium.

Inde perspicuum fit, quod hoc modo propositus ad B angulus dabitur una proportione, cuius primus terminus est dimidium recti sinus duplae circumferentiae minoris duorum laterum propositum angulum comprehendentium. Secundus terminus est sinus rectus complementi circumferentiae propositum subtendentis angulum. Tertius terminus est sinus totus, id est dimidium dimetientis maximi circuli. Quartus terminus est versus sinus circumferentiae, qua sublata ex semicirculo propositus relinquitur angulus. Prioribus autem terminis per prius ostensa datis, et quartus terminus datur, videlicet versus sinus circumferentiae, qua ex semicirculo dempta propositus relinquitur angulus.

Aliter propositio haec ostenditur.[1] |

In dato igitur sphaerico triangulo ABC trium datorum laterum, 164r habente duo latera AB, BC aequalia, propositum sit angulum ABC datum efficere.

Igitur per [XXX] propositionem[2] libri III *elementorum* Euclidis AC segmentum angulo ABC subtensum bifariam secetur in puncto D; et per B, D signa magni orbis sectio BD describatur.[3] Et quia duo maximorum in sphaera orbium segmenta AB, BC ex hypothesi sunt aequalia, et duobus partilibus triangulis ABD, CBD commune existit segmentum BD, et AD basis basi CD aequalis, igitur per primum Menelai *de sphaericis*[4] duo anguli ADB, BDC sunt aequales, et uterque eorum per definitionem [I, def. 5] rectus. Eodem quoque modo patet, duos angulos ABD, DBC esse aequales. Et quia, ut in[5] libro secundo [II, 11] fuerat ostensum, ratio recti sinus segmenti BC ad segmenti CD rectum sinum est, sicut ratio sinus totius ad rectum sinum anguli CBD seu aequalis ABD, et per hypothesim in hac proportione priores termini dantur, ergo et | quartus, rectus videlicet sinus anguli CBD, datur. Quare 164v per tabulas rectorum sinuum angulus CBD datur; ex hipothesi igitur totus ABC angulus datus est.



Dati ergo trianguli sphaerici trium datorum laterum, et reliqua ut supra; quod oportuit demonstrare.

---

1) Dieser aliter-Beweis gehört zu IV, 3 und ist also in der Hs. versetzt worden.
2) Hs. hat *propositionis.* — Euclidis *elementa* III, 30 auf die Kugel übertragen wird schon von Menelaos vorausgesetzt.
3) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 20.
4) Menelai *sphaerica* I, 4.
5) Hs. hat *uti* statt *ut in.*

Propositio quinta.

Si vero alterum duorum segmentorum, quae propositum ad B continent angulum, maius fuerit complemento circumferentiae AB,

Quod quidem complementum existit BC circumferentia, sitque illud aequale BCH segmento; itaque H punctus cadet inter C, D signa. Et ab H signo ipsi DGF dimetienti parallelus HKI agatur, secans dimetientem CGE super K signo. | 165r Rursus ipsi CGE dimetienti parallelus agatur HL. Et circumferentiae EFI sinus rectus sit IM.

His itaque dispositis, si circumferentia propositum ad B angulum subtendens quadrante minor extiterit, ergo parallela ipsius IM sinus recti aequalis recto sinui complementi circumferentiae ad B propositum angulum subtendentis cadet inter K signum et IM rectum sinum segmenti EFI. Sitque talis parallela NO; et productis IM et NO in partes[1]) M, O, donec occurrant ipsi HL, IM quidem in P, NO autem super Q.

Igitur, ut prius, erit ratio ipsius INH ad HN sicut IMP ad NOQ. Et sicut est IH ad HN, sic fiat FD ad DR. Et dimidia ipsius IMP sit IS. Igitur, ut prius ostensum fuit, ex aequali erit ratio ipsius IS ad NOQ sicut ratio ipsius FG ad DR. In hac autem proportione priores tres termini dati sunt; ergo et quartus terminus DR datus erit. Nam IS dimidium est ipsius IMP datae, quae componitur ex recto | 165v sinu IM segmenti EFI dati per constructionem et MP aequali recto sinui segmenti CH similiter dati. Pari ratione NOQ recta probatur esse data. Et FG datur; est enim totus sinus ex hypothesi. Igitur DR recta datur, quae est sinus versus seu sagitta propositi ad B anguli [IV, 1].

Propositus ergo ad B angulus datur; quod oportuit demonstrare.

Circumferentia deinde, quae propositum ad B angulum subtendit, aequante quadrantem, igitur HK erit sinus versus circumferentiae in parallelo HI, qua[2]) sublata ex semicirculo relinquitur circumferentia in eodem parallelo ad B angulo [subtensa]. Et super HL perpendicularis KA agatur; ergo iterum ratio ipsius IMP ad KA erit sicut IH[3]) ad HK. Et sicut IH ad HK sic fiat FD ad DT. Igitur, ut prius, ex aequali IS ad KA erit sicut FG ad DT. Est autem KA data; aequalis enim existit recto sinui seg|166r menti CH per constructionem. In eadem ergo proportione datis tribus prioribus terminis et quartus terminus DT datur, sinus scilicet versus circumferentiae circuli magni, qua sublata ex semicirculo relinquitur circumferentia aequalis ad B angulo proposito.

Igitur propositus idem ad B angulus erit iterum datus.

At circumferentia, quae propositum ad B angulum subtendit, quadrantem superante, igitur per superius ostensa sinus versus subtendentis in

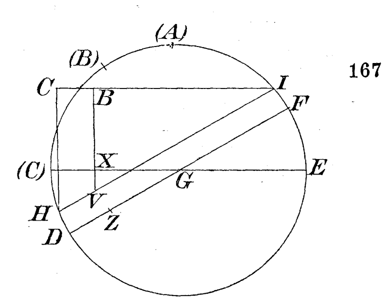
1) Hs. hat *partem*. 2) Hs. hat *que*. 3) Hs. hat IH korr. aus IN.

parallelo HI circumferentiae[1]), qua dempta semicirculo eiusdem paralleli relinquitur circumferentia similis proposito ad B angulo, erit minor quam HK recta. Sit itaque talis sinus versus HV; et per V ipsi IMP parallelus agatur XVY, secans dimetientem CGE super X, et HL super Y. Et quia ratio ipsius IMP ad VY est sicut IH ad HV, sit igitur FD ad DZ sicut $I|H$ ad HV; ergo ex aequali IS ad VY erit sicut FG ad DZ. At huius 166v proportionis tres termini priores dati sunt; ergo et quartus terminus videlicet DZ datus erit. Nam YV reliqua est, si VX detrahatur sinui recto segmenti CH. Est autem XV aequalis sinui recto circumferentiae remanentis[2]), si circumferentiae ad B angulo subtensae quadrans auferatur[3]); ergo et VX datur; quare etiam VY dabitur. Et quoniam ratio ipsius IH ad HV est sicut FD ad DZ, ergo DZ datur, et erit sinus versus circumferentiae magni circuli, qua dempta ex semicirculo eiusdem circuli magni relinquitur circumferentia aequalis proposito ad B angulo.

Igitur idem propositus ad B angulus iterum datus erit; quod oportuit, ostendere.

Haec tertia particula huius quintae propositionis aliter fieri poterit,

Ex primo videlicet signo si dimetienti CGE parallelus agatur IBC, atque ad eam actis perpendicularibus | duabus VXB, HC. 167



Harum autem perpendicularium utraque datur. Nam VXB componitur ex VX per hypothesim[3]) data [et] ex XB aequali recto sinui circumferentiae EFI datae.[4]) Et HC componitur ex eodem sinu circumferentiae EFI recto et recto sinu segmenti HC. Igitur ut ante DZ versus sinus datus esse concluditur.

Correlarium.

Hinc etiam manifestum fit, quod in triangulo sphaerico trium notorum laterum si propositum angulum, quem datum efficere oporteat, duo continent segmenta, quorum utrumque quadrante minus, et maius horum duorum laterum excedat complementum minoris, et circumferentia eidem proposito angulo subtensa quadrante inferior extiterit, propositus angulus dabitur una proportione, habente in primo termino dimidium aggregati ex sinu recto segmenti compositi ex minore circa propositum angulum circumferentia cum complemento ma|ioris circumferentiae circa angulum eundem, atque eo seg- 167v mento[5]), quod relinquitur complemento eiusdem minoris circumferentiae detracto maiori circumferentiae circa eundem angulum, quod quidem seg-

---

1) Hs. hat *circumferentiam.* 2) Hs. hat *remanenti.*
3) Folge von dem in IV, 1 fehlenden Fall, daß $AC > 90^{\circ}$.
4) Hs. hat *datur.* 5) Soll heißen: *atque ex sinu recto eius segmenti.*

mentum discretionis et brevitatis gratia propositi anguli argumentum appellare duxi, atque eiusdem argumenti sinu recto; secundum terminum compositum ex sinu recto complementi circumferentiae[1]) propositum subtendentis angulum atque sinu recto eiusdem argumenti; tertium terminum sinum totum; et quartum terminum sinum versum eius circumferentiae, qua dempta ex semicirculo relinquitur circumferentia aequalis proposito angulo.

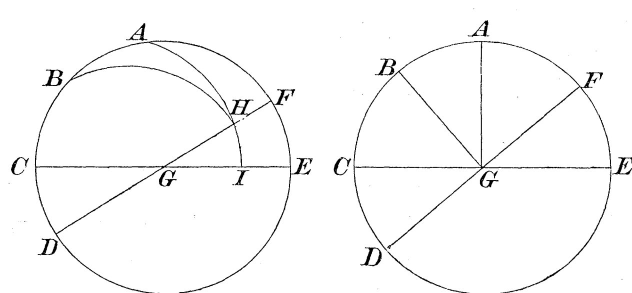
Sin autem subtensa proposito angulo circumferentia quadrans extiterit, ergo propositus angulus rursum dabitur una proportione, quae habet in primo dictum dimidium, secundum terminum sinum rectum eiusdem argumenti, 168r tertium terminum sinum totum, et quartum terminum sinum | versum eius circumferentiae, qua detracta ex semicirculo circumferentia iterum relinquitur aequalis proposito angulo.

Si vero circumferentia proposito subtensa angulo quadrante maior fuerit, idem angulus iterum dabitur unica proportione, quae habeat eosdem terminos praeter tertium[2]), qui reliquus est, si quadrans subtensae dicto angulo circumferentiae detrahatur, et residui sinus rectus ex sinu recto memorati argumenti dematur, quod itaque hac sublatione remanserit tertius[3]) proportionis terminus erit.

Propositio sexta.

In sphaerico triangulo trium datorum segmentorum propositum angulum circumferentia quadrante minore atque quadrante contentum datum efficere. |

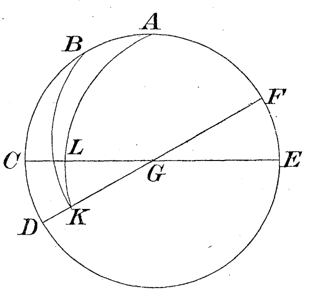
168v Sit igitur eadem circumferentia minor quadrante AB, cuius circulus $ABCDEF$. Et supra A polo circulus magnus descriptus sit CGE. Rursus super polo B descriptus magnus circulus sit DGF. Et esto inprimis circumferentia proposito ad B angulo subtensa AH quadrante minor, quae agatur in partem H, donec secat circulum CGE super I signo.



Et quia circuli CGE per constructionem polus est A signum, igitur anguli ad I recti sunt.[4]) Et quia in sphaerico triangulo GHI rectangulo angulus HGI acutus datus est — eius enim magnitudo circumferentia FE data, aequalis namque ipsi AB segmento —, igitur per secundum librum [II, 26] HG segmentum recto angulo GIH oppositum datur; ergo[5]) et eius complementum FH datur, quod magnitudo existit propositi ABH anguli [I, def. 4]. Datus igitur est propositus ad B angulus. |

1) Hs. hat *minoris circumferentiae circa* statt *circumferentiae.*
2) Soll heißen *secundum.* 3) Soll heißen *secundus.*
4) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 15.
5) Vor *ergo* hat die Hs. das Wort *et* gestrichen.

At circumferentia proposito subtensa ad B angulo quadrantem aequante, 169r quod accidit, si quadrans circa B propositum angulum in communem G sectionem duorum CGE et DGF circulorum inciderit, et quia duae AG, BG circumferentiae quadrantes existunt, ergo in triangulo per librum primum [I, 1 inv. cfr. I, 65] ABG uterque duorum ad AB angulorum rectus est. Datus igitur est propositus ad B angulus.



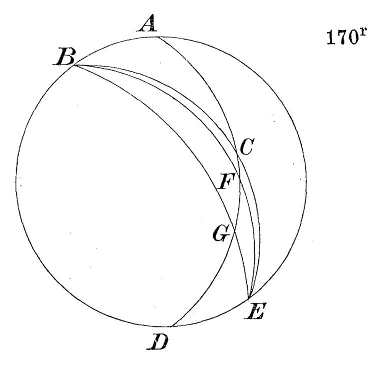
Sit denique circumferentia ad B subtensa angulo maior quadrante. Sitque ipsa AK secans circulum CGE super L signo. Rursus quia in triangulo GKL angulus ad L rectus est[1]), et acutus angulus KGL datus — aequalis enim circumferentiae CD datae, quae aequalis est ipsi AB segmento —, et LK segmentum dato angulo KGL subtensum datum — relinquitur enim, si quadrans AL dematur dato segmento ALK —, igitur | per ea, quae ostensa fuerunt in libro secundo [II, 26], segmentum 169v GK datum, quod cum quadrante FG aequale est proposito ad B angulo. Igitur idem ad B angulus datur.

Ergo in sphaerico triangulo trium datorum segmentorum, et reliqua ut supra; quod oportuit demonstrare.

Propositio septima.

In sphaerico triangulo trium datorum segmentorum angulum duobus contentum segmentis, quorum unum quadrante[2]) minus alterum quadrante maius, datum efficere.

Sit ergo sphaericus triangulus ABC trium datorum segmentorum AB, BC, CA; et esto propositum angulum ABC datum efficere contentum duobus segmentis AB et BC datis, AB quidem minore quam sit quadrans|, BC vero quadrantem superante. 170r



Igitur segmenti AB circulus compleatur, sitque ille $ABDE$; punctumque D sit e diametro A signi, et E ex diametro signi B. Et per polos A, D descriptus sit circulus ACD; et per B, E polos circulus BCE. Et quia DE circumferentia aequalis est AB segmento, igitur DE circumferentia minor est quadrante. Et quia BC segmentum per constructionem maius est quadrante, igitur reliquum de semicirculo CE segmentum quadrante inferius est.

Esto deinde AC circumferentia angulo ABC subtensa quadrante minor, ergo et reliqua CD de semicirculo ACD quadrante maior est. In triangulo itaque sphaerico CDE trium per constructionem datorum segmentorum, quorum duo DE, CE quadrante sunt minora, et tertium CD quadrante

1) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 15.   2) Hs. hat *segmente*.

maius et subtensum angulo CED, idem angulus CED per prius ostensa [IV, 5] dabitur; ergo de duobus rectis reliquus AEC datur. Igitur suus aequa|lis ABC datus erit. 170v

Praeterea ex ACD semicirculo quadrans auferatur ACF. Sitque per B, F, E semicirculus descriptus BFE. Et propositum esto in triangulo ABF trium datorum segmentorum AB, AF, BF angulum ABF datum efficere. Et quia in triangulo EFD per prius ostensa [IV, 5] angulus DEF datur contentus duobus per constructionem datis segmentis DE, EF, cui quidem angulo quadrans DF subtenditur, ergo de duobus rectis reliquus ABF dabitur.

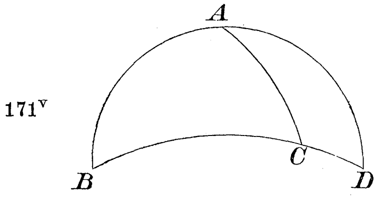
Rursus ex semicirculo $ACFD$ auferatur datum segmentum $ACFG$ quadrante maius. Et per B, G, E signa semicirculus scribatur BGE; et sit BG segmentum quoque datum et quadrans maius. Propositumque sit angulum ABG notum datumque efficere. Et quoniam in triangulo ABG tria segmenta AB, AG et BG[1]) [data sunt, et tria segmenta DE, DG] et EG trianguli DEG data, et quodlibet eorum quadrante minus, ergo per prius ostensa [IV, 2—5] angulus DEG datus erit; ergo et reliquus de duobus rectis ABG datus | erit. 171r

In sphaerico igitur triangulo trium datorum segmentorum angulum duobus contentum segmentis, quorum unum quadrante minus alterum quadrante maius, datum fecimus; quod oportuit efficere.

Propositio octava.

In sphaerico triangulo trium datorum segmentorum angulum duobus contentum segmentis, quorum alterum quadrans alterum quadrante maius extiterit, datum constituere.

In triangulo itaque ABC trium datorum segmentorum propositum sit angulum ABC datum efficere, AB quadrante, et BC segmento quadrantem superante.



Duo igitur segmenta AB, BC agantur, donec in oppositum partem concurrant super D signo. Et quia utraque dua|rum circumferentiarum BAD et BCD semicirculus est[2]), igitur segmentum AD quadrans erit, [et] DC segmentum quadrante minus. Ergo per prius ostensa [IV, 6] in triangulo ADC trium per hipothesim datorum segmentorum angulus ADC dabitur; ergo et suus aequalis ABC datus erit. 171v

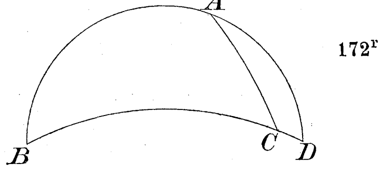
Igitur in sphaerico triangulo trium datorum segmentorum, et reliqua ut supra; quod oportuit efficere.

Propositio nona.

In sphaerico triangulo trium datorum segmentorum angulum duobus contentum segmentis, utrisque quadrantem superantibus, datum notumque constituere.

1) Hs. hat BC. 2) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 11.

Sit igitur, ut in priore figura, datus triangulus ABC trium datorum segmentorum; et propositum sit angulum ABC dare duobus contentum segmentis AB, BC, quorum utrumque quadrante maius extiterit.



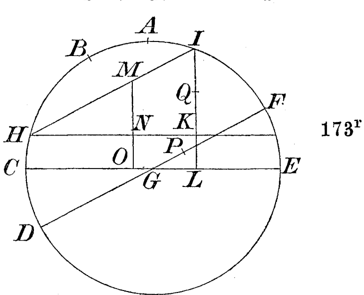
Ergo per prius | ostensa [IV, 2—5] angulus ADC dabitur duobus AD, DC segmentis contentus, quorum utrumque quadrante inferius est; ergo et suus aequalis angulus ABC datur. 172r

In sphaerico igitur triangulo, et reliqua ut supra; quod oportuit efficere.

Propositio decima.

In dato triangulo sphaerico datis duobus segmentis datum angulum continentibus, quorum utrumque quadrante minus existat, maius quoque horum segmentorum inferius complemento alterius segmenti, tertium eiusdem trianguli segmentum, dato videlicet angulo subtensum, datum erit.

Sit itaque in dato triangulo minus duorum segmentorum AB, datusque angulus ad B signum, perficiaturque ipsius AB segmenti circulus, qui sit $ABCDEF$.[1]) Et super A polo ma|gni circuli scripti sit dimetiens CGE; 172v et super B polo circuli magni diameter sit DGF; et maius segmentum circa datum angulum sit minus complemento segmenti AB, aequale videlicet segmento BH. Et a puncto H ipsis CGE et DGF diametris duae parallelae agantur HI, HK, HI quidem ipsi DF, HK vero ipsi CGE dimetienti. Atque segmenti EFI rectus sinus sit IKL, secans parallelam HK in puncto K. Et in parallelo per IH scripto sit IM sinus versus eius segmenti, quod simile est dato ad B angulo; atque ab M signo super CGE dimetientem perpendicularis agatur MNO, secans parallelam HK super N[2]) signo. Erit itaque per ea, quae prius ostensa fuerunt [IV, 1], MNO perpendicularis aequalis recto sinui complementi circumferentiae dato ad B angulo subtensae. Et quia duo triangula IHK et MHN sunt similia, igitur ratio ipsius IK ad MN est si|cut IH ad HM.[3]) Est autem ratio ipsius IH ad HM data; ex hipothesi namque est sicut dimetiens magni circuli ad sinum versum eius circumferentiae eiusdem magni circuli, qua[4]) quidem circumferentia deducta semicirculo relinquitur segmentum dato ad B angulo subtensum. Fiat igitur FD dimetiens ad DP sicut IH ad HM aut sicut IK ad MN; et divisa IK bifariam in puncto Q[5]) erit igitur ex aequali ratio ipsius GF semidiametri orbis AB ad DP sicut IQ ad MN. In hac autem proportione prioribus terminis tribus datis dabitur et quartus 173r



1) Hs. hat $ADCDEF$.
2) N über die Zeile mit 1. Hand.
3) Euclidis *elementa*, ed. Heiberg VI, 4.
4) Hs. hat *que*.
5) Euclidis *elementa*, ed. Heiberg I, 10.

terminus MN. Data quoque existit NO; nam ipsa aequalis est recto sinui dati segmenti HC, quod ex hipothesi differentia est inter maius ad B angulum segmentum et inter complementum segmenti AB. ⟨Et quia tota MNO datur, ergo et reliqua MN; quia⟩[1] per constructionem recta MNO aequalis est recto sinui complementi circumferentiae dato subtensae ad B angulo.

Igitur in sphaerico triangulo datis duobus segmentis atque angulo ab eis con|[173v]tento, quorum quidem segmentorum utrumque quadrante inferius existat, atque longius eorundem segmentorum minus complemento brevioris segmenti, tertium eiusdem trianguli segmentum dato subtensum angulo dabitur; quod oportuit demonstrare.

Lemma sive assumptum.

At IQ dimidiam ipsius IK datam esse sic patet. Nam per constructionem tota IKL sinus rectus est segmenti EFI, quod datum est; nam ipsum componitur ex segmento EF aequali ipsi AB et FI complemento segmenti BH ex hipothesi dati. Est autem CH reliquum longiore circa datum ad B angulum segmento detracto ex complemento BC ipsius AB brevioris circa eundem ad B angulum segmenti.[2] Igitur et sinus rectus [174r] IKL dato eidem subtensus segmento EFI datus est. Sed KL data | est; aequalis enim recto sinui CH segmenti; igitur et reliqua IK recta datur; ergo et dimidia IQ data erit; quod oportuit perspicuum facere.

Correlarium.

Hinc manifestum erit, quod in triangulo sphaerico, qualis proponitur, circumferentia dato subtensa angulo dabitur una proportione, quae pro primo termino habeat sinum totum, pro secundo termino sinum versum eius circumferentiae, qua ex semicirculo dempta relinquitur segmentum dato angulo aequale. Tertius terminus constituetur, si complementum longioris circa datum angulum segmenti breviori circa eundem angulum segmento adiiciatur; huius itaque aggregati sinui recto si sinus rectus differentiae longioris segmenti et complementi brevioris iuxta eundem | [174v] angulum segmenti dematur, remanentis rectae dimidium tertius erit terminus. Quartus autem terminus erit quaedam recta, cui si componatur eiusdem sinus rectus differentiae, rectum conflabimus sinum complementi quaesitae circumferentiae, quae dato subtenditur angulo.

Propositio undecima.

Si duo circa datum segmenta angulum aequalia fuerint, et utriusque complementum minus existat octava [parte] circuli magni, id est grad[ibus] XLV minus, propositio haec per praemissam fiet. Si vero idem complementum octavam magni partem circuli, id est gradus XLV, aequaverit aut superaverit, propo|[175r]sitio[3] haec fit per sequentes propositiones.

---

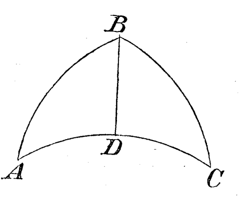
1) Die. Worte in ⟨ ⟩ sind zu ersetzen durch folgende: *Et tota MNO datur, quia et reliqua MN; sed.*

2) Der Satz *Est autem CH . . . segmenti* war offenbar ursprünglich eine Randnote, die an einer falschen Stelle in den Text hineingekommen ist.

3) Hs. hat *propositionem.*

Aliter propositio haec ostenditur.

Esto itaque in triangulo ABC data duo latera AB, BC datum continentia angulum ABC aequalia, et propositum sit AC segmentum dato ABC subtensum angulo datum efficere.



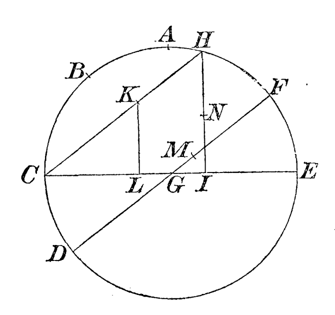
Intelligatur itaque idem angulus ABC segmento BD bifariam divisus.[1]) Igitur uterque ad D angulus rectus est.[2]) Et quia in partili triangulo DBC habente duos datos angulos, videlicet CBD per constructionem acutum et BDC rectum, et oppositum eidem recto angulo segmentum BC quoque datum, igitur per secundum librum *de triangulis sphaericis* [II, 17] CD segmentum dato et acuto angulo CBD oppositum erit datum. Per praesentes autem hypotheses et primum librum Menelai *in sphaericis*[3]) CD | segmentum aequale est ipsi AD segmento. 175ᵛ Igitur totum segmentum AC dato ABC angulo subtensum datum erit.

Ergo si in sphaerico triangulo duo data et aequalia [fuerint] segmenta datum comprehendentia angulum, segmentum eidem dato subtensum angulo datum erit.

Propositio XII.

Si vero circa datum angulum B longius segmentum aequale fuerit complemento brevioris AB segmenti,

Longius igitur idem segmentum, uti in subiecta figura, aequale erit BC segmento. Ergo a puncto C ipsi DGF parallelus agatur CH. Et segmenti EFH rectus sinus sit HI. Dato deinde ad B [angulo] in parallelo per CH scripto similis circumferentiae versus sinus sit HK. Et a puncto K ipsi HI recto sinui paralle|lus agatur KL. Et secundum rationem 176ʳ ipsius HK ad KC secetur DGF dimetiens in puncto M.



Et quia duo trianguli HCI et CKL similes sunt, ergo ratio ipsius HC ad CK, seu ipsius FD ad DM, est sicut HI ad KL. Ipsa deinde HI bifariam secetur super N signo[4]); igitur ex aequali ratio ipsius FG ad DM erit sicut HN ad KL. In hac autem proportione priores termini tres dantur. Est enim FG sinus totus per diffinitionem; DM vero versus sinus eius segmenti, quo dempto ex semicirculo segmentum relinquitur aequale dato ad B angulo; HN denique dimidium ipsius HI recti sinus segmenti EFH per constructionem similiter dati — nam ipsum duplum AB dati segmenti —, ergo et quartus terminus KL datur. Est autem KL aequalis recto sinui com-

1) Euclidis *elementa,* ed. Heiberg I, 9 auf die Kugel übertragen & Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 20. Die Winkelteilung auf der Kugel setzt schon Menelaos als bekannt voraus. 2) Menelai *sphaerica* I, 4.

3) Menelai *sphaerica* I, 4. — Hs. hat *sphaericis* korr. aus *sphaericisnis* [d. h. sphaericis triangulis]. 4) Euclidis *elementa,* ed. Heiberg I, 10.

plementi circumferentiae, quae in subiecto triangulo datum ad B angulum subtenditur[1]) [IV, 1].

176v Ergo si circa datum angulum longius segmentum | fuerit aequale complemento brevioris segmenti, circumferentia dato subtensa angulo data erit; quod oportuit demonstrare.

Ista denique propositione propositio generaliter conficitur, quando alterum segmentum circa datum angulum aequale fuerit complemento alterius segmenti circa eundem angulum, si AB segmentum brevius extiterit sive longius altero.

Correlarium.

Inde etiam perspicuum fit, quod si datis duobus segmentis, quorum utrumque quadrante inferius extiterit, datum continentibus angulum alterum eorundem segmentorum aequale fuerit complemento alterius segmenti, datum eundem circumferentia subtendens angulum unica dabitur proportione, in qua primus terminus est sinus totus; secundus terminus sinus versus eius | 177r segmenti, quod detractum semicirculo relinquit segmentum aequale dato ad B angulo; tertius est dimidium sinus recti[2]) dupli alterius segmenti circa datum angulum, cuius quidem segmenti complementum aequale fuerit alteri segmento circa eundem angulum; quartus denique terminus sinus rectus complementi circumferentiae, quae datum subtendit angulum.

Propositio XIII.

Si denique circa datum angulum B longius segmentum exsuperaverit complementum alterius circa eundem angulum segmenti,

Igitur, ut prius, descriptus esto circulus $ABCDEF$ duoque dimetientes CGE et DGF. Et longius duorum segmentorum datum ad B angulum comprehendentium sit aequale BH segmento; et quia ex hypothesi idem 177v segmen|tum exsuperat complementum segmenti AB, ideo H punctus cadit inter C, D signa. Deinde a signo H dimetienti DGF parallelus agatur HIK, secans CGE dimetientem super I signo et circumferentiam $ABCDEF$ super K puncto. Rursus ipsi CGE dimetienti ab eodem signo H parallelus agatur HL. Et circumferentiae EFK sinus rectus[3]) sit KM, qui producatur in partem M, donec secet HL super N signo. Et sit KO sinus versus circumferentiae in parallelo HK similis angulo ad B signum dato.

Sit autem primum angulus ad B datus quadrante inferior. Ergo signum O cadit inter I, K signa[4]); et a signo O ipsi KMN recto sinui parallelus agatur OPQ, secans dimetientem CGE super signo P et parallelam HL super Q signo.

Et quia ex hypothesi ratio ipsius KH ad HO data est, igitur propter 178r similes triangulos[5]) KHN, OHQ ratio[6]) | KMN ad OPQ data erit.

1) Hs. hat *subtendenti* korr. aus ? 2) Hs. hat *rectus*. 3) Hs. hat *rectus* bis.
4) Unrichtige Distinktion. Nicht die Größe des Winkels B, sondern die der gegenüberliegenden Seite entscheidet über die drei Fälle des Satzes. Vgl. unten.
5) Hs. hat *angulos*. 6) Hs. hat *ratio* korr. aus *ratio ipsius*.

Est enim ratio ipsius KMN ad OPQ sicut ipsius KH ad HO.[1]) Et secundum rationem ipsius KO ad OH secetur DGF dimetiens super signo R. Erit igitur per constructionem FD ad DR sicut KMN ad OPQ. Secetur deinde KMN bifariam super S signo.[2]) Ex aequali igitur erit sicut FG ad DR sic KS ad OPQ. In hac autem proportione priores termini tres dati sunt. Est enim per constructionem FG sinus totus; DR sinus versus circumferentiae, qua semicirculo sublata relinquitur circumferentia aequalis dato ad B angulo; KS quoque data; nam dimidium est ipsius rectae KMN, quae componitur ex KM sinu recto dati segmenti EFK et sinu recto segmenti CH per constructionem quoque dati; ergo et KS data; igitur et quartus terminus, videlicet OPQ recta, datur. Et quia per constructionem PQ datur, ergo et reliqua OP data erit. Est autem OP sinus rectus com|plementi circumferentiae, quae dato ad B angulo subtenditur [IV, 1]. 178ᵛ

Sin autem praemissae proportionis quartus terminus aequalis fuerit sinui recto segmenti CH, quemadmodum est ipsa IT, igitur circumferentia ad B angulo subtensa quadrans est.

At ubi idem quartus terminus minor extiterit sinu recto eiusdem segmenti CH, velut est XY, erit itaque punctus X inter H, I puncta; et secundum rationem ipsius KH ad HX sit FGD ad DV. Et XY in partem X agatur, secans CGE dimetientem super puncto Z. Erit itaque perspicuum, circumferentiam dato ad B angulo subtensam maiorem esse quadrante, atque datam fieri unica proportione, in qua primus terminus est FG sinus totus; secundus terminus DV, sinus videlicet versus eius segmenti, quo ex semicirculo magni circuli sublato segmentum relinquitur aequale dato ad B angulo; tertius terminus KS per prius ostensa datus; | et quartus 179ʳ terminus XY per eandem proportionem datus, quo dempto ex[3]) recta YZ, seu ex sinu recto segmenti CH, relinquitur XZ data, quae aequalis est per constructionem[4]) sinui recto cuiusdam segmenti, quo addito ad quadrantem circumferentia[5]) magni conflabitur[6]) circuli, quae datum ad B angulum subtendit.[7])

In sphaerico igitur triangulo datis duobus segmentis datum continentibus angulum, quorum utrumque quadrante minus, longius vero exsuperet complementum alterius circa eundem angulum segmenti, tertium quoque in eodem triangulo segmentum datum erit.

Correlarium.

Hinc perspicuum est, quod in triangulo sphaerico, qualis proponitur, dato angulo duobus contento datis segmentis, qualia proponuntur, subtensum segmentum unica datum sit proportione, in qua primus terminus est sinus totus; secundus terminus sinus versus eius circumferentiae, qua se|micirculo 179ᵛ detracta segmentum relinquitur dato aequale angulo; tertius terminus efficietur,

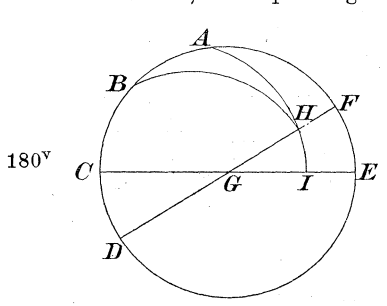
1) Euclidis *elementa*, ed. Heiberg VI, 4. 2) Ibid. I, 10.
3) Hs. hat *est ex* statt *ex*.
4) D. h. als Folge von dem in IV, 1 fehlenden Fall, daß $AC > 90°$.
5) *Circumferentia* ist von jüngerer Hand mit roter Tinte in *circumferentiæ* korrigiert. 6) Ebenso *conflab.'* [= conflabitur] in *conflab.'t*, [= ?].
7) Ebenso *subtendit* in *subtendet*.

si circumferentiae conflatae ex breviore circa datum angulum segmento atque ex complemento longioris iuxta eundem angulum segmenti rectus sinus addatur recto sinui differentiae eiusdem longioris et complementi brevioris circa eundem datum segmenti; nam horum sinuum aggregati dimidium tertius erit terminus; quartus terminus erit recta quaedam, qua superante rectum sinum praedictae differentiae, eodem sinu ex ea dempto relinquitur sinus rectus complementi circumferentiae dato angulo subtensae, quae ex consequenti data erit. Si vero idem quartus terminus aequaverit praedictae sinum rectum differentiae, igitur circumferentia dato subtensa angulo quadrans erit. At eodem quarto termino existente minore quam sit rectus sinus eius-180r dem | differentiae, igitur idem quartus terminus, sublatus ex saepius memoratae differentiae recto sinu, relinquit rectum sinum cuiusdam segmenti, quo ad quadrantem congregato circumferentia constituetur datum subtendens angulum.

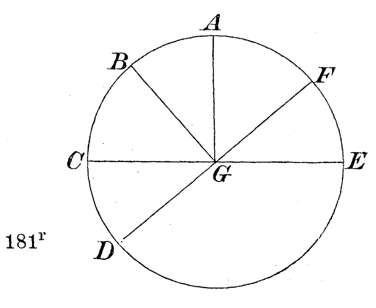
Propositio XIV.

Dato angulo duobus datis comprehenso segmentis, quorum alterum quadrans sit, alterum vero minus quadrante, subtensum segmentum esse datum ostendere.

Minoris itaque AB circa datum angulum segmenti circulus sit $ABCDEF$, datusque angulus sit iuxta B signum. Et super A polo circulus magnus scribatur [CGE; et super B polo magnus scribatur] circulus DGF; eorundem magnorum circulorum communis sectio sit G punctus.



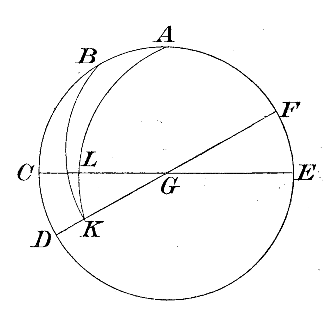
180v Estoque primum datus ABH angulus segmento AB et | quadrante BH comprehensus acutus, productoque segmento AH in partem H, donec quadrans fiat AHI. Et quia circuli CGE polus est A punctus, per constructionem igitur anguli ad I recti sunt.[1]) In triangulo quoque sphaerico GHI, cuius quaelibet tria segmenta quadrante minora existunt, acutus angulus HGI datus est — aequalis enim AB segmento dato —, et GIH angulus datus — nam per constructionem rectus —, eique oppositum segmentum GH datum; complementum namque est FH dati segmenti seu anguli ABH. Igitur per ea, quae in secundo libro [II, 17] demonstrata fuerunt, HI segmentum acuto angulo HGI obiectum erit datum. Ergo et eius complementum AH, quod dato ABH angulo subtenditur, datum erit; quod oportebat ostendisse.



Rursus datus angulus ABG segmento[2]) AB et quadrante BG contentus rectus | sit. 181r Ergo per ea, quae in primo libro [I, 23] demonstrata fuerunt, segmentum AG dato ABG[3]) angulo subtensum quadrans est atque idcirco datum.

1) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 15.
2) Hs. hat *duo segmento* statt *segmento.* 3) Hs. hat AGB.

Sit denique ABK datus angulus, quem segmentum AB quadrante minus atque quadrans BK comprehendant, subtensumque ei segmentum AK, secans CGE magnum circulum super L signo. Et quia eiusdem magni circuli[1] CGE polus est A signum, ergo in triangulo GKL angulus GLK[2] rectus est, atque angulus KGL[3] datus — aequalis enim per constructionem dato AB segmento —, [atque segmentum GK etiam datum, quia subtractum ex segmento dato KF seu angulo ABK relinquit quadrantem]; igitur segmentum KL eidem acuto angulo KGL obtensum datum existit [II, 17]. Datur autem segmentum AL; nam per constructionem quadrans est. Ergo totum segmentum ALK datum erit, quod dato ABK angulo subtenditur.



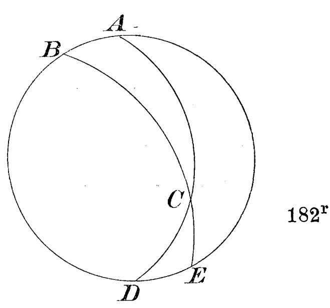
Ergo dato angulo duobus datis comprehenso segmentis, quorum alterum quadrans alterum quadrante minus existat, subtensum quoque eidem angulo segmentum datum est; q. o. d. |

Propositio XV.

181v

In sphaerico triangulo duobus datis segmentis datum continentibus angulum, quorum alterum quadrante minus, alterum quadrante maius, circumferentia eidem dato subtensa angulo data erit.

Sit ergo super sphaerica superficie datus triangulus ABC duo data possidens segmenta AB, BC datum angulum ABC continentia, quorum alterum AB sit quadrante minus, alterum vero BC quadrante maius. Et propositum esto circumferentiam AC dato angulo ABC subtensam datam ostendere.



Segmenti igitur AB circulus sit $ABDE$; et producatur circumferentia AC in partem C, donec eundem circulum $ABDE$ secet super D. Similiter BC in partem C producatur, quousque circulum $ABDE$ etiam secet super E[4] signo. Et quia per constructionem BCE semicirculus | est[5], et per hipothesim BC segmentum [quadrante] maius atque magnitudine datum, igitur reliquum segmentum CE quadrante minus erit atque magnitudine datum. Et quia DE segmentum per constructionem aequale est ipsi AB segmento, quod ex hipothesi quadrante minus atque datum est, ergo aequale segmentum DE[6] quadrante minus atque datum existit. Et quoniam per constructionem angulus AEC datus existit — aequalis enim dato angulo ABC —, igitur de duobus rectis angulis reliquus CED datus. Et quia, velut patuit, duo segmenta DE, CE circa eundem datum angulum CED data sunt, atque utrumque quadrante

182r

1) Hs. hat *circulo*. 2) Hs. hat GLK korr. aus GFK.
3) Hs. hat GKL 4) Hs. hat F.
5) Theodosii *sphaerica*, ed. Nizze I, 11. 6) Hs. hat BE.

minus, ergo per praecedentes propositiones[1]) [IV, 10 — 13] segmentum CD dato CED angulo subtensum datum erit, quo ex semicirculo ACD sublato segmentum AC dato subtensum angulo ABC datum quoque relinquitur.

Ergo in sphaerico triangulo, etc.; q. o. d. |

182v

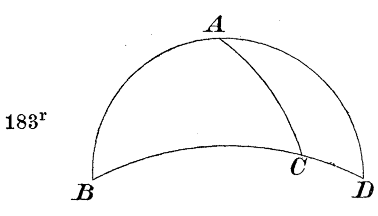
Propositio XVI.

In sphaerica superficie duobus datis segmentis datum continentibus angulum, quorum alterum quadrans alterum quadrante maius extiterit, circumferentia[2]) eidem dato subtensa angulo dabitur.

Sint ergo in sphaerica quapiam superficie data duo segmenta AB, BC datum continentia[3]) angulum ABC, cui subtendatur AC circumferentia. Dico, quod eadem circumferentia data sit.

Producantur duo segmenta AB, BC, donec in partem A, C concurrant super D puncto. Et quoniam BAD circumferentia semicirculus est[4]), et AB segmentum quadrans, ergo et reliquum segmentum AD quadrans erit. Rursus quia circumferentia BCD semicirculus est, et BC segmentum quadrante maius atque datum, ergo reliquum seg|mentum CD quadrante minus erit atque datum. Est autem angulus ADC aequalis angulo ABC dato per constructionem. Ergo per decimam quartam propositionem circumferentia AC dato angulo ADC subtensa data erit.

183r



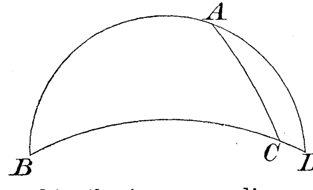
In sphaerica igitur superficie duobus datis segmentis AB, BC datum angulum ABC continentibus, quorum alterum quadrans alterum quadrante maius existat, circumferentia AC eundem subtendens angulum ABC data est; q. o. d.

Propositio XVII.

In sphaerica quapiam superficie datis duobus segmentis datum continentibus angulum, quorum utrumque quadrante maius existat, circumferentia eidem dato subtensa angulo data erit.

183v

Sint igitur in data sphaerica superficie data | duo segmenta AB, BC datum continentia angulum ABC, quorum quidem segmentorum quadrante maius utrumque existat. Sitque dato angulo ABC subtensa circumferentia AC. Dico, quod eadem circumferentia AC[5]) data erit.



Et quoniam manente proxima figura utraque duarum circumferentiarum BAD et BCD semicirculus est, et utrumque duorum segmentorum AB, BC quadrante maius atque datum ex hipothesi, ergo reliqua duo segmenta AD, DC data sunt, et utrumque

1) Hs. hat *prepositiones.*
2) Hs. hat *circumferentie.* 3) Hs. hat *continentie.*
4) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze I, 11.
5) AC über die Zeile mit 1. Hand.

minus quadrante; et angulus ab eis comprehensus ADC datus — aequalis enim per constructionem ABC dato angulo —, igitur aut per X vel XI aut XII vel etiam XIII propositionem circumferentia AC dato subtensa angulo ABC data erit.

In sphaerica igitur quapiam superficie duobus datis, etc.; quod o. ostendere. |

Correlarium generale cuilibet propositioni huius libri serviens. 184r

Perspicuum etiam est, quodlibet praeceptum huius libri confici posse unica tantum vel divisionis aut multiplicationis operatione, flocipensis[1]) numerorum additionibus et subtractionibus, quibus in eisdem propositionibus nonnunquam opus erit, quoniam ipsae additiones et subtractiones nullo paene fiunt negotio, tabulis videlicet rectorum habitis sinuum, in quibus maximus sinus rectus subiicitur partium 10000000. | 184v vacat.

1) Hs. hat *floccipensis* korr. aus *flocipensis* mit jüngerer Hand.

ANHANG.[1]

1. Zitate des Textes.

Euclidis *elementa* p. 3, 43, 47—57, 62—66, 68—69, 74, 116—119.

Aus den Zitaten S. 49, 53, 54, 62, 64—66, 68, 69, 116 erhellt, daß die in Venedig 1505 zum erstenmal erschienene Übersetzung des Bartholomeo Zamberti (*1473) *wörtlich* zitiert wird.

Geber Arabs p. 61.

Das Zitat bezieht sich auf die Astronomie des Ǧâbir ben Aflaḥ (12. Jahrh.). Die lateinische Übersetzung durch Gherardo Cremonese (1114—1187), die in zahlreichen Handschriften vorliegt, wurde erst 1534 in Nürnberg, sechs Jahre nach Werners Tod gedruckt, und zwar als Anhang zu Peter Apians (1495—1552) *Instrumentum primi mobilis.*

Georgius Purbachius p. 62, 65.

Die beiden Zitate beziehen sich auf den Kommentar zu Ptolemaios' *Syntaxis,* der unter dem Titel *Epytoma in Almagestum Ptolemœi* 1496 in Venedig gedruckt wurde. Neudrucke unter anderen Titeln erschienen nach Werners Tod in Basel 1543 und Nürnberg 1550. Die sechs ersten Bücher verfaßte Georg von Peurbach (1423—1461), die letzten sieben nach seinem Tod sein Schüler Regiomontan (1436—1476), was aus der Vorrede des letzteren an den Kardinal Bessarion hervorgeht.

Menelai *de sphaericis* p. 2, 4—6, 12, 17—18, 23, 58—59, 61, 119, 127.

Nach dem Zitat S. 58 besaß Werner eine Handschrift von Menelaos' Sphärik, d. h. von der nie gedruckten lateinischen Übersetzung durch Gherardo Cremonese (1114—1187) mit dem Titel Milei *de sphaericis.* Aus den S. 58 und 61 zitierten Satznummern geht hervor, daß die von Werner benutzte Handschrift den anonymen Kommentar des Giovanni Campano (13. Jahrh.) enthielt, und daß diese Handschrift vielleicht identisch ist mit einer der zwei Handschriften Cod. Palat. lat. 1351 und Cod. S. Marc. Venet. VIII. 32 (Valentinelli XI, 90), die in den *Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften XIV* bzw. S. 145—146 und

1) Im Anhang bedeuten zwei Zahlen mit Strich dazwischen, wie z. B. 97, 14, Seite und Zeile, zwei Zahlen, die eine hoch, wie z. B. 121[4], Seite und Note in der Textausgabe.

151—152 beschrieben sind. Gedruckt wurde Menelaos' Sphärik erst 30 Jahre nach Werners Tod, Messina 1558, in einer neuen Übersetzung durch Francesco Maurolico (1494—1575).

Theodosii *de sphaericis* p. 4—8, 11, 18, 36, 57, 60, 63, 79—80.

Aus der S. 5, 11, 60, 80 zitierten Satznummer ersieht man, daß die benutzte Übersetzung die längere der beiden mittelalterlichen lateinischen aus dem Arabischen geflossenen Übersetzungen ist, d. h. die mit 32, 31 und 10 Sätzen, die in den beiden oben erwähnten Menelaoshandschriften neben dem Menelaostexte steht und gleichfalls einen diesmal dem Giovanni Campano (13. Jahrh.) ausdrücklich beigelegten Kommentar enthält. Noch zu Werners Lebzeit wurde diese Theodosiosübersetzung gedruckt, und zwar zweimal in Venedig im Jahre 1518 in Sammelbänden mit dem Titel *Sphaera cum commentis,* die von Boncompagni in seinem Buche *Delle Versioni fatte da Platone Tiburtino,* Roma 1851, beschrieben sind. Schon im Jahre 1529, also gleich nach Werners Tod, wurde die Übersetzung wieder von Johs. Vögelin († 1549) in Wien gedruckt. Ob diese Übersetzung wirklich dem Platone Tiburtino (11—12. Jahrh.) gehört, ist noch unsicher.

---

2. Sachwörter des Textes.

(Bei Worten, die nur einmal, oder nur einmal in einer bestimmten Bedeutung vorkommen, ist die Zahl der betreffenden Seite in ( ) hinzugefügt.)

abscindere = abschneiden, ausschneiden, abtragen.
accipere = nehmen, setzen, annehmen.
„ pariter = zusammen nehmen.
„ simul = „ „
acutus = spitz.
addere = addieren, hinzufügen, zusammenzählen.
additio = Addition, Zusammenzählen.
adiacere = anliegen.
adiacens = anliegend, Neben-.
adiicere = hinzufügen, addieren.
adiungere = „ „
adversari = entgegen sein, entgegensprechen.
aequalis = gleich.
per aequalia secare = halbieren, zweiteilen.
„ „ dividere = „ „
aequaliter = gleichmäßig, gleichartig.
aequare = gleichmachen, gleichkommen.
aequari = gleich werden, gleich sein.
aequiangulus = gleichwinklig.
aequus = gleich.
afferre = subtrahieren, abziehen.
agere = ziehen, verlängern, multiplizieren, vervielfältigen.
aggregatum = Summe.
agnitus = bekannt.
agnoscere = kennen.
altitudo = Höhe.
ambiguus = verschiedenartig, variabel, veränderlich.
anceps = verschiedenartig, variabel, veränderlich.
angulus = Winkel.
apertus = bekannt.
appositus = anliegend, Neben-.
argumentatio = Schlußfolgerung, Beweisführung.
argumentum anguli B trianguli ABC = BC — (90°—AB) (121).
assumere = nehmen, annehmen, setzen, ansetzen, anwenden.
assumptum = Hülfsatz, Lehnsatz, Lemma.
aufferre = subtrahieren, abziehen, abschneiden (118).
axis = Achse.

basis = Basis, Grundlinie.
bidui = duo.
bifariam dividere = halbieren, zweiteilen.
„ secare = „ „
bini = duo.

cadere = fallen.
centrum = Zentrum, Mittelpunkt.
circulus = Kreis.
„ magnus = Größter Kreis, Großkreis.
„ maximus = „ „ „
„ minor = Kleinkreis.
„ parvus = „
circumferentia = Kreisumfang, Peripherie, Kreisbogen.
clarescere = offenbar werden, offenbar sein, bekannt werden, bekannt sein.
clarus = bekannt.
claudere = enthalten, einschließen.
coalternus d.h. anguli coalterni = Wechselwinkel (bei Parallelen).
cognitus = bekannt, klar, offenbar.
cognoscere = finden, bekannt machen.
cognosci = bekannt werden, bekannt sein.
cohaerere = anliegen.
communis = gemeinschaftlich, gemeinsam.
compar = entsprechend, homolog, gleichliegend.
comparare = vergleichen, paaren.
compingere = zusammensetzen, bilden.
complecti = einschließen, umschließen.
complementum = Komplement.
complere = ausfüllen.
completio = Komplement.
componere = zusammensetzen, bilden.
comprehendere = einschließen, umschließen.
concinnare = einschließen, umschließen, zusammensetzen, bilden.
concludere = schließen.
concurrere = zusammenlaufen, zusammentreffen, sich schneiden, sich treffen.
concurs(s)us = Schnitt, Treffpunkt, Zusammentreffen.
conficere = erfüllen, erledigen, dartun.
conflare = erzeugen, hervorbringen (durch Zusammensetzung oder Addition).
congredi = zusammenlaufen, zusammentreffen, sich treffen, sich schneiden.
congregare = hinzufügen, zusammenlegen.
coniungere = verbinden.
connectere = „
consistere = bestehen, stehen, feststehen, sein, liegen, belegen sein.
conspicuus = bekannt, klar, offenbar.
constare = bekannt sein, feststehen, bestehen, sein.

constituere = bilden, machen, anbringen.
constructio = Konstruktion, Zeichnung (einer Figur).
construere = zusammensetzen, bilden.
conterminus = anstoßend, benachbart.
continere = einschließen, umschließen, enthalten.
contingere = schneiden, treffen.
contingi = zusammentreffen, zusammenlaufen, sich schneiden, sich treffen.
continuus = kontinuierlich, fortlaufend.
continui anguli = Nebenwinkel.
conversio = Umkehrung, Konversion, Inversion.
convertere = umkehren.
correlarium = Korollar, Folgesatz, Zusatz.
creare = hervorbringen, bilden, herstellen, erzeugen.
crescere = wachsen, zunehmen.
crus = Schenkel (auch eines sphärischen Winkels).
cuspes = sin. vers. (47).

dare = bekannt machen, finden.
dari = bekannt sein, gegeben sein.
datus = bekannt, gegeben.
declarare = beweisen, zeigen.
deducere = ziehen, abziehen.
deffinire = bestimmen, definieren.
deffinitio = Definition, Begriffserklärung.
demere = subtrahieren, abziehen.
demonstrare = beweisen, zeigen.
demonstratio = Beweis.
deprehendi = sich befinden (9).
descendere = fällen, fallen (d. h. die Senkrechte, das Lot).
describere = zeichnen, beschreiben.
desiderare = suchen, verlangen.
determinare = bestimmen, auflösen.
detrahere = subtrahieren, abziehen.
diameter = Diameter, Durchmesser.
e(x)diametro = diametral entgegengesetzt.
differentia = Differenz, Unterschied.
diffinitio = Definition, Begriffserklärung.
dimetiens = Diameter, Durchmesser.
dimidia = dimidium = Hälfte.
dimidius = halb, Halb-.
in duo dimidia dividere (oder secare) = halbieren, zweiteilen.
ad directum = in Verlängerung (einander).
in „ = „
dispescere = schneiden, treffen.
disponere = einrichten (120).
dispositio = Anordnung, Gattung (1).
disquirere = suchen, verlangen.
diversificari = verschiedenartig sein, veränderlich sein, variieren.
diversitas = Verschiedenartigkeit, Variabilität, Veränderlichkeit.
diversus = verschiedenartig, variabel, veränderlich.
dividere = teilen, dividieren, zerlegen.
„ bifariam = halbieren, zweiteilen.
„ in duo dimidia = „ „
„ per aequalia = „ „
divisio = Division, Teilung.
doctrina = Satz, Lehrsatz, Lehre.
dubius = verschiedenartig, variabel, veränderlich.
ducere = ziehen, multiplizieren, vervielfältigen.
ductus = Multiplikation, Vervielfältigung.
duplus = doppelt.

educere = ziehen, ausziehen.
efficere = vollführen, machen, bilden.
eiicere = verlängern, ausziehen.
elucescere = bekannt werden, bekannt sein, offenbar werden, offenbar sein.
erectus = senkrecht, vertikal.
erigere = senkrecht errichten, errichten.
erigi = senkrecht stehen.
excedere = größer sein, länger sein, überragen, überschreiten.
excitare = senkrecht errichten, errichten.
exire = hervorkommen, herauskommen.
exsuperare = größer sein, länger sein, überragen, überschreiten.
exterior = äußerer, Außen-.
extrinsecus = „ „
exuperare = größer sein, länger sein, überragen, überschreiten.

figura = Figur.
figuratio = Figur, Gebilde.
finis = Endpunkt, Ende.
„ = terminus = Glied (einer Proportion) (51).
flocipendere = gering schätzen (133).
forma = Figur, Fall.

geminare = verdoppeln, duplieren.
genus = Art, Gattung.

habitudo = Gestalt, Verhalten.
hipothesis = Hypothese, Voraussetzung.
hypothesis = „ „

iacere = liegen, belegen sein.
non ignorari = bekannt werden, bekannt sein.
inaequalis = ungleich.
inaequaliter = ungleichartig.
incertus = verschiedenartig, variabel, veränderlich.
incidere = begegnen, treffen, schneiden in, fallen auf.
includere = einschließen, umschließen.
incognitus = unbekannt.
inducere = ziehen.

inferior = kleiner, kürzer.
inferre = schließen (28), erweisen (117—118).
infinitus = unendlich.
innotescere = bekannt werden, bekannt sein.
inquisitio = Nachforschung.
interior = innerer, Inner-.
intervallum = Zwischenraum, Entfernung, d. h. Zirkelöffnung.
isoscheles = gleichschenklig.
iungere = verbinden, ziehen (als Verbindungslinie).

non latet = ist bekannt.
latus = Seite.
lemma = Hülfsatz, Lehnsatz, Lemma.
linea = Linie.
linea recta = recta = Gerade.
liquescere = bekannt werden, bekannt sein.
liquet = es zeigt sich, ist klar, wird klar, erhellt.
liquidus = bekannt, klar, offenbar.
locus (d.h. χωρίον) = geometrische Figur [in Euklidzitat nach *Zamberti* S. 116].

magnitudo = Größe.
manifestare = finden, bekannt machen, dartun.
manifestus = bekannt, klar, offenbar.
medius = mittler, als mittlere Proportionale.
multiplex = Multiplum, Vielfaches.
multiplicare = multiplizieren, vervielfältigen.
multiplicatio = Multiplikation, Vervielfältigung.

noscere = kennen.
notus = bekannt.
numerus = Zahl, Anzahl.

obiectus = gegenüberliegend, gegenliegend, entgegengesetzt, Gegen-.
obiici = gegenüberliegen.
obtendi = „
obtusus = stumpf.
obtusiangulus = stumpfwinklig.
obversus = gegenüberliegend, gegenliegend, entgegengesetzt, Gegen-.
obverti = gegenüberliegen.
oc(c)urrere = begegnen, treffen, schneiden.
operatio = Operation (133).
opponi = gegenüberliegen.
oppositus = gegenüberliegend, gegenliegend, entgegengesetzt, Gegen-.
ex opposito (latera) = Gegen(seiten) [in Euklidzitat nach *Zamberti* S. 116].
orbis = Kreis.
„ magnus = Größter Kreis, Großkreis.
ostendere = beweisen, zeigen.

palam fit = zeigt sich, ist klar, wird klar, erhellt.
pangere = zusammensetzen, bilden.
parallelogram(m)um = parallelogram(m)a = Parallelogramm, Zeileck.
parallelogramus = parallelogrammisch [in Euklidzitat nach *Zamberti* S. 116].
parallelus = parallel, Parallele, Parallelkreis.
pars = Teil, Richtung.
particula = Teil, Teilchen.
partilis = Teil-, Partial-.
patefacere = finden, bekannt machen.
patens = bekannt.
patescere = patefieri = bekannt werden, bekannt sein, offenbar sein, sich zeigen, erhellen.
patet = zeigt sich, erhellt, ist klar, wird klar, ist bekannt, wird bekannt.
perficere = hervorbringen, bilden, herstellen, erzeugen, vollführen.
peripheria = Peripherie, Kreisumfang, Kreisbogen.
permeare = durchgehen, passieren.
permutare = permutieren, vertauschen (die Glieder einer Proportion).
permutatio = Permutation, Vertauschung (der Glieder einer Proportion).
perpendicularis = Senkrechte, Lot.
perpendiculariter = perpendikular, senkrecht, lotrecht.
perspicere = bekannt machen, finden.
perspici = bekannt werden, bekannt sein, erhellen.
perspicuus = bekannt, klar, offenbar.
perturbare = vertauschen (63).
planum = Plan, Ebene.
polus = Pol.
ponere = annehmen, voraussetzen, nehmen, setzen, abtragen.
portio = Teil, Stück, Abschnitt (eines Kreisbogens).
praeceptio = Lehrsatz, Vorschrift, Regel.
praeceptum = „ „ „ (133).
praecipere = lehren, zeigen, weisen.
probare = beweisen, zeigen.
problema = Satz.
prodire = hervorkommen, herauskommen, werden.
producere = verlängern, ausziehen, ziehen, bilden, erzeugen.
productum = Produkt.
proponere = verlangen, vorlegen.
proportio = Proportion.
proportionalis = proportional.
proportionaliter = proportional.
propositio = Satz, Lehrsatz.
propositus = vorliegend.
protrahere = verlängern, ausziehen, ziehen.
punctum = Punkt.

quadrans = Quadrant, Viertelkreis.
quadratum = Quadrat.
quadrilaterum = Viereck (116).
quaerere = suchen, verlangen.
quantitas = Größe.

ratio = Verhältnis, Beziehung.
recta = recta linea = Gerade.
rectangulum = Rechteck.
rectangulus = rechtwinklig.
rectilineus = geradlinig.
rectus, subst. = Rechter (Winkel).
" adj. = recht, senkrecht.
relinquere = übrig lassen, erübrigen.
relinqui = restieren, übrig bleiben, erübrigen.
reliquum = Rest.
reliquus = restierend, übrig.
remanere = restieren, übrig bleiben, erübrigen.
repetere = wiederholen.
resecare = abschneiden, ausschneiden.
residere = übrig bleiben, restieren, erübrigen.
residuum = Rest.
residuus = übrig, restierend.
revelatus = bekannt, gefunden (97).

sagitta = sin. vers. (47), (120).
schema = Figur.
scindere = schneiden, abschneiden, zerschneiden.
scire = kennen.
scribere = zeichnen, beschreiben.
secare = schneiden, zerschneiden.
" bifariam = halbieren, zweiteilen.
" per aequalia = " "
" in duo dimidia = " "
" aequaliter " "
sectio = Kreisbogen, Stück, Abschnitt (eines Kreisbogens), Schnitt.
sector = Sektor, Ausschnitt (eines Kreises) (1).
segmentum = Kreisbogen, Stück, Abschnitt (eines Kreisbogens).
semibasis = sin. (rect.).
" maxima = sin. (rect.) 90°.
semicirculus = Halbkreis.
" maximus = Größter Halbkreis.
semidiameter = Radius, Halbmesser.
sententia communis = Grundsatz, Axiom.
signum = Punkt.
similis = ähnlich.
sinus (rectus) = sin. (rect.).
" (rectus) maximus = sin. (rect.) 90°.
" " integer = " " (118).
" totus = " "

sinus (e)versus = sin. vers.
situs = Lage.
spatium = Zwischenraum, Entfernung, d. h. Zirkelöffnung.
species = Art, Fall, Gattung.
sphaera = Kugel, Sphäre.
sphaeralis = sphärisch, Kugel-.
sphaericus = " "
subiectio = Voraussetzung, Annahme.
subiicere = voraussetzen, annehmen, vorliegen.
sublatio = Subtraktion, Abziehen.
subtendi = gegenüberliegen, unterspannen.
subtractio = Subtraktion, Abziehen.
subtrahere = subtrahieren, abziehen.
sufferre = " "
sumere = nehmen, annehmen, setzen, ansetzen.
sumere simul = zusammennehmen, addieren.
superare = größer sein, länger sein, überragen, überschreiten.
superficies = Fläche, Oberfläche.
supplementum = Komplement.
suppletio = "
supponere = voraussetzen, annehmen.
suscipere = nehmen, annehmen, setzen, ansetzen.

tabula = Tafel.
tangens = sich treffende, sich schneidende, zusammenlaufende (Linie).
tangere = schneiden, treffen
" se = zusammentreffen, zusammenlaufen, sich schneiden, sich treffen.
terminare = beenden, begrenzen, Abschluß bilden.
terminus = Endpunkt, Glied (einer Proportion).
tradere = erklären, zeigen, beweisen, darlegen, erweisen.
transire = durchgehen, passieren.
triangulum = Dreieck.
triangulus = "
trigonus = "

universaliter = allgemein, in allen Fällen.

variare = variari = verschiedenartig sein, variieren, veränderlich sein.
varius = verschiedenartig, variabel, veränderlich.
venire = fallen, gehen.
vertex = Scheitel, Spitze.
vincere = größer sein, länger sein, überragen, überschreiten.

3. Herausgeberbemerkungen.

Die vorliegende Textausgabe beruht auf einer einzigen Handschrift, dem Codex Reginensis latinus 1259, d. h. Nr. 1259 der Regina Sveciae-Sammlung der Vatikanischen Bibliothek zu Rom. In dem handschriftlichen Katalog über diese von Gustaf Adolfs Tochter, Königin Christina von Schweden, der päpstlichen Bibliothek geschenkte Sammlung hat die Handschrift folgende Bezeichnung: „Nr. 1259. Joannis Verneri Norimbergensis, de triangulis sphaericis libri IV. Cod. ex papyro 4to, anno 1495.“ Die Handschrift ist aus Papier von einer recht dünnen und durchsichtigen Qualität; sie ist in klein Quarto mit ca. 21×16 cm Blattfläche und besteht aus 495 oben rechts numerierten und mehreren (leeren) unnumerierten Blättern. Der ganze Text ist von einer Hand geschrieben, dem Anschein nach der eines professionellen Schönschreibers aus dem Anfang des 16. Jahrhunderts. Die von dieser Hand angebrachten Kustoden und Bogennummern (Buchstaben) zeigen, daß die Handschrift vollständig ist, und daß die leeren unnumerierten Blätter für spätere Eintragungen bestimmt waren und also Textlücken bedeuten. Damit paßt es auch, daß die Foliierung von neuerer Hand herstammt. Am breiten Rande kommen außer Textkorrekturen der ersten Hand kritische Randnoten einer zweiten gleichzeitigen Hand vor, die offenbar keinem Schönschreiber gehört. Randnoten und Textkorrekturen von ein paar jüngeren Händen findet man auch; sie sind aber sehr selten. Figuren fehlen ganz und ebenso Datierungen, so daß die in dem alten handschriftlichen Katalog angeführte Jahreszahl 1495 keinen Anknüpfungspunkt im Texte hat.

Der Inhalt ist:

I. Joannis Verneri *Norimbergensis de triangulis sphœricis* (fol. 1^r—184^r) in vier Büchern[1]) ohne Sondertitel und ohne leere Blätter; am Ende der drei ersten Bücher steht *Finis . . . libri,* und am Ende des vierten findet sich ein *correlarium generale cuilibet propositioni huius libri serviens.* Es scheint also eine vollständige Abschrift eines vollständigen Werkes vorzuliegen.

Dieser Text ist der oben S. 1—133 gedruckte. Darauf folgt:

II. Joannis Verneri *Norimbergensis de meteoroscopiis* (fol. 185^r—495^v) in sechs Büchern, alle mit Sondertiteln, wie folgt:

Buch 1 (fol. 185^r—217^v): *Designatio circulorum saphoeae per demonstrationes* (10 Sätze). Anfang: „Propositio prima. Qualem sphaericae designationis inscriptionem saphaeae instrumentum in supposito plano figuret ostendere . . .“

„ 2 (fol. 218^r—228^r): *Primi meteoroscopii constructio* (5 Sätze).

„ 3 (fol. 229^r—420^v): *Primi meteoroscopii usus* (91 Sätze).

---

1) Über den Seiten steht in der Handschrift wie in der gegenwärtigen Ausgabe: *Liber primus, Liber secundus* usw.

Buch 4 (fol. 421^r-428^r): *Secundi meteoroscopii constructio* (6 Sätze).
„ 5 (fol. 428^r-443^v): *Tertii meteoroscopii constructio* (11 Sätze).
„ 6 (fol. 444^r-495^v): *Quarti meteoroscopii constructio et usus* (30 Sätze). Ende: „... per theorema tertium regionis latitudo *HF* [?] prope grad[us] XLIX, quod erat manifestandum."

Das Werk ist eine allgemeine Beobachtungslehre oder praktische Astronomie, und an den Stellen, wo die leeren unnumerierten Blätter vorkommen, sieht man, daß sie für Eintragungen von trigonometrischen oder astronomischen Tafeln bestimmt waren.

Trotz Nachforschungen ist es nicht gelungen, andere Abschriften von diesen beiden Arbeiten des Johannes Werner zu finden, und es dürfte mehr als zweifelhaft sein, ob solche überhaupt existieren; es sollte denn sein, daß das Originalmanuskript des Autors in irgendeiner Bibliothek verborgen läge; denn der Cod. Regin. 1259 ist eine Abschrift. Nicht nur ist die Hand, wie gesagt, die eines professionellen Schreibers, sondern, was mehr bedeutet, die Schrift ist eine ganz andere als die des Cod. Aug. 17. 6. 4⁰ in Wolfenbüttel, welcher Codex ein Wernerautograph sein soll.[1]) Übrigens kommen vollauf von typischen Abschreiberzeichen im Cod. Regin. 1259 vor: erstens Zeilen, welche überschlagen und entweder später am Rande hinzu-

1) Nach Heinemann, *Die Handschriften der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel,* 2. Abt., IV, S. 206, Nr. 3096, ist diese Handschrift ein von Werner selbst geschriebener *Historicus diarius inde ab anno 1506—1521 Johannis Verneri presbiteri Bambergensis diocesis et vicarii seu rectoris cappelle beatorum Johannis baptiste et Johannis evangeliste Norinbergensis.* Die Schrift dieser Handschrift wurde von Herrn Oberbibliothekar Milchsack gütigst mit Aufnahmen des Cod. Regin. 1259 verglichen, und zwar mit negativem Resultat, sowohl was die erste als die zweite Hand dieses Codex betrifft. Übrigens finden sich zerstreut in den Bibliotheken Europas mehrere unedierte Arbeiten von Werner, von denen jedoch die meisten Abschriften sein dürften. Nur der hochinteressante Cod. Digbeanus 132 ist möglicherweise ein Autograph, jedenfalls ist er von einem Fachmanne geschrieben, der den Text kritisch korrigiert hat und dessen Hand mit der Werners gleichzeitig ist. Da die Beschreibung dieser Handschrift in *Catalogi codicum manuscriptorum bibliothecae Bodleianae, Pars IX, confecit G. D. Macray,* Oxonii 1883, col. 138 recht mangelhaft ist, folgt hier eine genauere Inhaltsangabe:

Fol. 1^r-^v, 14^r-^v, 27^r-^v enthalten Ausrechnungen.

Fol. 26^v ist leer.

Fol. 2^r-12^v, 15^v-26^r, 28^r-28^v enthalten Tafeln über Planetenbreiten.

Fol. 12^v-13^v enthalten einen zu denselben gehörigen Text:

„Praemissae latitudinum tabulae, saturni videlicet, jovis, martis, veneris et mercurii, compositae fuerunt a me Joanne Vernero Nurembergensi anno domini 1521: — In quas quidem tabulas intratur in fronte quidem cum vero planetae argumento, in latere autem sinistro [korr. aus *dextro*] cum vero centro planetae. — His denique tabulis latitudinum palam fit, quantum veteres illae latitudinum tabulae, nescio quo authore compositae, a veritate atque a Ptolomaei Alfonsique fundamentis sint alienae. Quamquam hac aetate non [*non* am Rande mit erster Hand] desint, qui affirment, eas a Georgio Purbachio editas esse, quod ob excellentem huius viri in mathematicis doctrinam verum [!] nunquam [korr. in *neunquam*] concedo . . . haud aliter pro latitudine mercurii erit agendum. Τέλος 1521 die 11 Martii hora tertia post meridiem minutiis primis unius horae 8 horoscopante gradu 29 Leonis, ☉ primum gradum ♈, ☽ septimum gradum ♉ occupante, per Joannem Vernerum, sacellanum divorum Joannis Baptistae Joannisque Evangelistae in suburbio Nurembergensi computus praemissarum tabularum latitudinis planetarum consumatus scriptusque fuit."

gefügt worden sind (88^3) oder noch fehlen (13, 28; 20, 1; 22, 20; 59, 24; 87, 37; 91, 25; 105, 24)[1]); ebenso eine Zeile, die zweimal geschrieben wurde (106^1); endlich verkehrte und wieder gestrichene Anfänge, die davon herrühren müssen, daß ein Abschreiber beim Übergang von Zeile zu Zeile zuerst auf eine unrichtige geraten ist (49^3, 72^5, 88^4, 102^1, 117^1, 128^6). Ganz allgemeine Dittographien, die beim Abschreiben so oft vorkommen, finden sich auch (24^7, 52^{6-7}, 128^3), und ebenso Dittographien wegen Laut-

Fol. 29r — 38v: „Joannis Verneri Nurembergensis compositiones et usus organorum latitudinum lunae et quinque planetarum. — Organum latitudinis lunae describere . . . mercurii latitudinem idem Joannes Justingensis numeravit [?] in sua ephemeride. Expliciunt compositiones et usus instrumentoris latitudinum lunae et quinque planetarum a Joanne Vernero Nurembergense editae scriptaeque anno reconciliationis 1521 die Mercurii vigesima quarta mensis Aprilis horoscopante gradu septimo Scorpii."

Fol. 39r—64r: Figuren, welche die verschiedenen „organa" zur Auffindung der Breiten darstellen. Diese Figuren sind fein gezeichnet und mehrfarbig. Neben ihnen befinden sich größere Textstücke, einzelne Notizen, Erklärungen der Konstruktionen, Ausrechnungen, Streichungen und Hinzufügungen, Tafeln usw. Auch kritische Notizen kommen vor, alle der ersten Hand. Zu bemerken sind: fol. 39v: „1521 die 9 aprilis" bei einer Berechnung.— fol. 43r: Neben einer ausgestrichenen Tafel über „latitudo Veneris meridionalis" steht „haec tabula latitudinis φ [d. h. Veneris] hinc usque ad finem eius satis mendosa est." — fol. 57v: Mit roter Tinte und erster Hand: „Reflexio φ fideliter per eundum Joannem Vernerum numerata Anno domini 1520 in mense novembris completaque die 27 eiusdem mensis novembris." — fol. 60v: Bei einer ausgestrichenen Zeichnung: „hinc inest falsitas." — fol. 61v: Mit roter Tinte: „1513 die 30 octobris Joannes Werner hoc organum excogitavit hortante Joanne Stabio."— Am Ende des Textes: „haec Veneris latitudo computata est pro die 22 aprilis anni currentis 1521 iuxta computum vero Joannis Justingensis, qui huius temporis ephemerides edidit, eadem φ latitudo inuenitur gradus . . .".

Wären nur die Texte dieser Handschrift, deren Hand in keiner Beziehung der des Cod. Regin. 1259 ähnlich ist, immer in Ich-Form geschrieben, würde man unbedingt den Codex für ein mit Werners Hand geschriebenes Arbeitsmanuskript halten.

Andere Wernermanuskripte, die doch nicht Autographe sein dürften, sind nach den betreffenden Handschriftenkatalogen:

Cod. Vindob. lat. 4756, fol. 143r—146v: Johannes Werner, Judicium de cometa anni 1500 ad Sebaldum Clamosum alias Schreyer civem Nurembergensem: „Superioribus his diebus . . . anno salutis nostrae MD 15 [d. h. 1515] kl. Aug."

Cod. Vindob. lat. 5002, fol. 104r—111v: Johannes Verner, Duo nativitatis iudicia.

Cod. Vindob. lat. 5212, fol. 5v—6v: Johannes Werner, Regula aurea de aëris dispositione diiudicanda singulis diebus: „Hic iudicandi modus... maxime 5e mangni (!) Zut in II."

Cod. Vindob. lat. 10650, fol. 43v: Johannes Werner, Nativitas *Ursulae Gundelfinger* natæ anno 1483. — fol. 44r—45r: Idem, „Prognosticon Schewrleins" nempe nativitas eiusdem. — fol. 47r—63v: Johannes Werner, Revolutiones quarundam nativitatum partim latino partim germanico sermone consignatae: „Et quia secundum sydera . . . gluck vnd geschighlichheit dem gut in septentrione 0—7." — fol. 81r—87r: Johannes Werner, Judicium de nativitate Erasmi Doppler ecclesiae S. S. Petri et Sebaldi Norimbergae pastoris, scriptum anno 1498. 14. Februarii.

Cod. Monac. lat. 27083, fol. 1r—8v: Computus (de genitura Bilibaldi Pirckheimer) a Joanne Werner anno 1513 factus. Am Schluß steht, wie Prof. A. v. Braunmühl gütigst mitgeteilt hat: „Anno domini 1513 die ultima Augusti computum hunc Joannes Werner explevit." Dieses „Pirkheimersche Horoskop" ist nach v. Braunmühls Untersuchung eine Schönschreiberabschrift.

1) An fast allen diesen Stellen kann auch wegen Wortgleichheit nicht gerade eine Zeile, sondern ein kleines Textstück überschlagen worden sein, wie es offenbar S. 62, 27 und 130, 21 der Fall ist. Auch dann sind aber die Stellen sichere Abschreiberzeichen.

ähnlichkeit wie *obtusumque notumque* (81^{3}) für *obtusum notumque* oder *et eorumque utrumque* (86^{3}) für *et eorum utrumque*. Der Cod. Regin. 1259 ist also sicher eine Abschrift.

Daß der Abschreiber recht gedankenlos abschrieb, zeigen viele kleine sprachliche Fehler, wie z. B. an mehreren Stellen *duobus* statt *duabus* (nämlich rationibus) (52^{5}, 55^{4}, 56^{6}, 57^{2}, 63^{5}, 64^{2}), namentlich aber ein Fehler wie *Ver*neri Neri*norimbergensis* für *Verneri Norimbergensis* (115^{1}). Daß der Abschreiber eine in der Mathematik ganz unkundige Person war, erhellt nur allzu deutlich aus Fehlern wie *signum* für *sinum* (56^{5}), *communem scientiam* für *communem sententiam* (59^{6}), *sinuum* für *numerus* (68^{2}), *sinus* für *suus* (89^{3}, 90^{2}), *parallelogen : minum* für *parallelogrammum* (116^{7}). Wenn unter den zahlreichen, in einem Originalmanuskript wenigstens in solchem Umfang undenkbaren Fehlern in den Figurenbuchstaben, auch viele offenbare mathematische Sinnlosigkeiten vorkommen, wie *segmentum* BB (12^{6}), *angulus* AG (14, 9), *segmentum* DDC (84^{5}), *angulus* AB (96^{1}), *duo anguli* BCD *et* BCD (106^{2}), *triangulus* LHH (117^{3}), so zeigt dies deutlich, daß die Unkundigkeit des Abschreibers eine ganz durchgreifende war. Hier und da ahnt man auch, daß er wegen Gedankenlosigkeit und Unwissenheit ein falsches Wort eingeführt hat; z. B. werden die „Glieder" einer Proportion einmal *fines* statt *termini* (51, 3) genannt. Mitunter muß man annehmen, daß er seine Vorlage überhaupt nicht lesen konnte. Solche Stellen kommen S. 59^{8} *(per I)*, 70^{4} *(latus A)*, 109^{1} *(mi)* vor; an derartigen Stellen ist es deshalb auch sehr zweifelhaft, ob der Herausgeber die richtige Lesart geraten hat.

Obwohl der Text, so wie er im Cod. Regin. 1259 vorliegt, wie oben bemerkt, dem äußeren Anschein nach vollständig und abgeschlossen ist, tauchen doch bei einer genaueren und kritischen Besichtigung viele Anzeichen auf, die direkt darauf deuten, daß unser professioneller Abschreiber keine druckfertige Reinschrift, sondern vielmehr eine noch nicht abgeschlossene und abgeschliffene Arbeitshandschrift des Autors vor sich hatte.

Es findet sich nämlich in dem Werk eine recht bedeutende Anzahl von Mängeln und Fehlern, an denen der Abschreiber nicht schuld sein kann Mitunter sind Sätze oder Beweise direkt falsch (16^{1}, 22^{3}, 29^{5}, 30^{2-4}, 34^{2}, 34^{4}, 39^{1}, 90^{4}), oder aber ruhen sie auf falschen Voraussetzungen (39^{3}), oder die Beweise befriedigen nicht (25^{3}, 42^{2}). Mitunter findet man auch falsche Anwendungen von Sätzen älterer Autoren ($50^{3} = 51^{3}$, 82^{1}). Hier und da kommen auch in den Einzelheiten der Beweise Fehler vor, so daß ein Textstück mathematisch betrachtet falsch wird (66^{1-2}, 126^{1}). Eigentliche Sinnlosigkeiten, auch im mathematischen Sinn des Wortes, kommen öfters sporadisch vor, wenn z. B. ein größter Kreisbogen ins Unendliche *(in infinitum)* verlängert (77^{4}), oder ein einem Satze ganz widersprechender Hülfsatz (Lemma) ihm beigesellt wird (101^{1}). Ein Fehler anderer Art, welcher wiederholt vorkommt, ist, daß der Satz so abgefaßt ist, daß er mehrere Fälle in sich schließt, von denen nur der eine richtig ist und bewiesen wird (17^{5}, 20^{1}, 21^{1}, 22^{1}, 23^{3}, 24^{9}, 25^{4}). Es passiert auch, daß Sätze oder Fälle eines Satzes, die an den betreffenden Stellen fehlen, dennoch später benutzt werden (84^{3}, 121^{3}, 129^{4}). Grammatikalische Ungenauigkeiten, von denen die meisten kaum Abschreibefehler sind, kommen öfters vor (79^{2}, 99^{1}, 99^{3}); in der Regel ist die Ursache, daß der Satzbau während

des Schreibens geändert und die Aussage deshalb falsch oder gar unlogisch geworden ist (54[4], 63[1], 64[4], 71[2], 82[7], 106[4], 122[1]).

Fehler einer ganz besonderen Art sind die falschen Verweise. Die meisten von ihnen lassen sich wohl als zufällige Irrtümer des Autors oder Schreibfehler erklären (z. B. 19[3], 67[4], 71[3], 72[4], 91[2], 94[3], 103[3], 107[3], 108[3], 113[1], 113[3], 116[6]), obwohl es keineswegs feststeht, daß diese Erklärung immer die richtige ist; denn eine Reihe von Doppelverweisen zeigt, daß sie nicht immer paßt. Wenn z. B. die Handschrift mehrmals auf *diffinitionem quintam septimam huius secundi libri* (49[1], 49[5], 50[2]) und daneben richtig auf *diffinitionem quintam* (54, 4), sowie auf *diffinitionem quintam [korrigiert aus septimam]* (63[7]) verweist, so deutet das bestimmt darauf, daß II, def. 5 des uns bekannten Textes früher II, def. 7 war, und daß Werner deshalb in seinem Arbeitsmanuskript mehrmals ein *septimam* in ein *quintam* korrigiert hat, mitunter deutlich, meistens aber undeutlich, indem er nur über *septimam* ein *quintam* geschrieben hat, welche letzte Zahl der Abschreiber dann neben *septimam* in den Text einfügte. Sichergestellt wird diese Annahme dadurch, daß die Handschrift auch mehrmals auf *diffinitionem sextam octavam huius secundi libri* (49[2], 49[6], 50[1], 51[1], 63[8]) und daneben auch auf *diffinitionem octavam* statt auf *sextam* (57[4]) verweist. Es kommen auch Verweise auf *propositionem tertiam quartam (primi libri)* (41[6]) und auf *XXV tertii quarti elementorum (Euclidis)* (43[1]) vor, und bei allen diesen Doppelverweisen ist die erstgenannte Zahl die richtige. In allen diesen Fällen hat der Abschreiber also Korrekturen über der Zeile als Einschiebsel im Texte aufgefaßt und sie vor dem annullierten Wort in den Text eingefügt.

Müssen wir es also als festgestellt betrachten, daß der Schreiber des Cod. Regin. 1259 eine durchkorrigierte Kladde, ein Konzept, kurzum keine Reinschrift vor sich hatte, so werden uns viele andere Merkwürdigkeiten des aufbewahrten Textes auf einmal klar. Wir verstehen, daß im Satz IV, 5 der Buchstabe A zweimal auf derselben Figur vorkommt, und daß auf der Figur des zu demselben Satze gehörigen aliter-Beweises sogar drei Figurenbuchstaben (A, B, C) als Dubletten auftreten.[1]) Aller Wahrscheinlichkeit nach ist dieser aliter-Beweis am Rande des Wernerschen Manuskriptes hinzugefügt worden, oder er befand sich sogar auf einem los hineingelegten Blatt; denn dadurch erklären wir uns am besten, daß kurz vorher der aliter-Beweis zu IV, 3 falsch angebracht ist (119[1]). Wir verstehen auch, daß von S. 76 an, d. h. vom Anfang des dritten Buches, immer wieder auf Buch I statt auf Buch II verwiesen wird, und finden, daß diese Tatsache uns zu der Annahme berechtigt, daß Buch I erst geschrieben wurde, nachdem Buch II und III ausgearbeitet waren. Da zweimal fälschlich auf I, def. 14 statt auf I, def. 10 verwiesen wird (55[5], 56[7]), so ist es erlaubt zu vermuten, daß I, def. 10 ursprünglich I, def. 14 gewesen ist. Da in I, 12 mit dem Wort *praecedens* auf I, 13 verwiesen wird, so stand I, 13 wohl früher vor I, 12. Leider erhalten wir durch die doppelten und falschen Verweise keine weiteren Anhaltspunkte zur genaueren Erörterung der Entstehungsgeschichte des Werkes. Dagegen begreifen wir nun leicht die vielen sonderbaren und

1) Auch in den besten Euklidüberlieferungen kommt übrigens eine solche Dublette von Figurenbuchstaben vor. Siehe Heibergs Euklidausgabe, Buch II, Satz 5. In Zambertis Übersetzung findet sich die Dublette auch.

ganz sinnlosen Dittographien, wie z. B. *recto acuto* für *recto* (36[3]), *semibasim circulum* für *semibasim* (71[1]), *lateribus angulis* für *lateribus* (92[3]), *per doctrinam huius secundi libri ex secundo libro* statt *per doctrinam huius secundi libri* (75[2]), *unum acutum alterum angulum* statt *unum acutum angulum* (oder statt *alterum acutum angulum*) (111[4]); denn ganz offenbar stand überall das richtige Wort oder Stück, das zuerst kommt, in Werners Manuskript über dem nachfolgenden falschen von ihm selbst kassierten Wort oder Stück. Weshalb Randnoten an falscher Stelle in den Text hineingeschlüpft sind (126[2]), warum ein ganzes Stück zweimal, in nur leidlich veränderter Redaktion, geschrieben wird (29[2]), wie logische Dittographien sich haben einschleichen können (26[3]), und weshalb hier und da die Wortfolge ganz verrückt scheint (95[2]), das alles erklärt sich ebenfalls leicht. Endlich begreifen wir auch, daß ganz wilde Wörter oder Wortfolgen mitten in einem ordentlichen Text auftauchen können und gestrichen werden müssen (20[2], 24[4], 25[5], 31[3], 63[1]). Es kommt alles daher, daß der Cod. Regin. 1259 ganz unkritisch nach einem in Kladdenform vorliegenden Arbeitsmanuskript abgeschmiert ist.

Werners Manuskript enthielt sicher mathematische Figuren. In jedem Satz des uns überlieferten Textes bezieht sich ja der Beweis auf eine Figur, und an vielen Stellen verweisen auch die Worte des Textes direkt auf die zugehörigen Figuren, die *schemata, figurae, formae* oder *figurationes* heißen (14, 2—3; 65, 30; 66, 18; 69, 25; 85, 12; 86, 19; 100, 17; 100, 35; 104, 16; 113, 5; 113, 33; 114, 5; 125, 1; 132, 37). Der Umstand, daß im Cod. Regin. 1259 alle Figuren fehlen, kann als eine einfache Unfertigkeit des Manuskriptes, wo ja auch für Eintragung von Tafeln Platz offen steht, betrachtet werden, um so mehr als der Codex einen breiten Rand mit Platz für viele Figuren hat. Dieser Mangel könnte aber auch dahin gedeutet werden, daß wir hier eine speziell für den Druck angefertigte Handschrift vor uns haben[1]); ihr ganzer Charakter als Schönschreiberabschrift würde am besten mit dieser letzten Auffassung übereinstimmen.

Ohne Rücksicht auf geschichtliche Nachrichten u. dgl., ausschließlich durch kritische Betrachtung des überlieferten Textes und der ihn enthaltenden Handschrift läßt sich also feststellen, daß Werners *de triangulis sphaericis* in einer Abschrift vorliegt, die von einem professionellen, in der Mathematik ganz unkundigen Schönschreiber herrührt, daß dieser ohne Kritik und Interesse seine Vorlage nicht allzu genau kopiert hat, ferner daß diese Vorlage ein durchkorrigiertes, mit Randnoten und wahrscheinlich auch mit losen Beilagen versehenes, noch nicht abgeschlossenes oder für den Druck fertiggestelltes Arbeitsmanuskript des Verfassers war, endlich daß dieses Manuskript wenigstens einmal umgearbeitet und das erste Buch des Werkes nach dem zweiten und dritten geschrieben worden ist. Verschiedenes deutet darauf, daß die wegen der Unkundigkeit des Abschreibers und des unfertigen Zustandes seiner Vorlage vielfach verdorbene Abschrift für den Druck bestimmt war.

---

1) Vgl. *Bibliotheca Mathematica* **3**$_3$, Leipzig 1902, S. 243.

Die Tätigkeit des Herausgebers ergab sich teils durch den eben geschilderten Charakter der Handschrift, teils auch dadurch, daß die Ausgabe mehr für Mathematiker als für Philologen eingerichtet werden sollte. Der Umstand, daß nicht ein Originalmanuskript, sondern eine Abschrift eines recht unfertigen Konzeptes die einzige Grundlage der Ausgabe bildete, ermöglichte eine für die Fachleute leidlich praktische und zugängliche Wiedergabe des Textes, ohne daß dadurch etwas von der Originalität des Werkes verloren ging.

In der Handschrift alternieren nach damaligem Gebrauch *c* und *t*, *e* und *ae* (*ę*), *u* und *v*, *i* und *j*. Z. B. findet man:

circumferen*t*ia	neben	circumferen*c*ia,
ac*c*ipere	„	ac*t*ipere,
sph*ę*ra (sph*ae*ra)	„	sph*e*ra,
*u*terque	„	*v*terque,
di*v*isio	„	di*u*isio,
ali*i*s	„	ali*j*s.

Wir wissen aus Werners anderen Werken, daß er wie seine Zeitgenossen die genannten Buchstaben untereinander benutzt hat; es ist aber ganz unsicher, ob unsere Handschrift die Wernersche Orthographie treu wiedergibt. Jedenfalls genügt es für den Philologen, ein für allemal auf diese gewöhnliche orthographische Inkonsequenz aufmerksam gemacht zu werden, und für den nicht philologisch geschulten Leser ist es eine wahre Erleichterung, nicht unnotwendigerweise nachdenken zu müssen über Worte wie: *actidit, forcius, toci, coheret, eedem, sepe, queuis, vsuj, vnaqueque, due, adijcit* usw.

Was die genannten Buchstaben betrifft, ist deshalb die Orthographie der Ausgabe modernisiert. *Alle* anderen orthographischen Unregelmäßigkeiten oder Inkonsequenzen sind dagegen unverändert geblieben; deshalb findet man, wie in der Handschrift, z. B. „h*i*pothesis“ neben „h*y*pothesis“, „e*x*uperare“ neben „e*xs*uperare“, „o*cc*urrere“ neben „o*c*urrere“, „concur*s*us“ neben „concur*ss*us“, „d*e*ffinitio“ neben „d*i*ffinitio“, „cons*i*stere“ neben „cons*y*stere“ usw. Nur bei den lateinischen Zahlwörtern ist IV statt IIII, IX statt VIIII, XL statt XXXX eingesetzt, während sonst die inkonsequente Anwendung von lateinischen, arabischen und mit Buchstaben geschriebenen Zahlen untereinander beibehalten ist. Die Interpunktion, die Einteilung der Beweise in Abschnitte, sowie die konsequente Anwendung von großen Buchstaben ist modern. Modern sind notwendigerweise auch die Figuren, und zwar sind sie den Anforderungen des modernen Lesers angepaßt, ohne Rücksicht darauf, ob dadurch stellenweise mehr oder weniger Figuren, als Werner selbst benutzte, vorkommen möchten. Deshalb stimmen die Verweise auf die Figurenzahl desselben Beweises im Texte nicht immer mit den Figuren der Ausgabe.

Ein eigentlich kritischer Apparat ist nur notwendig, wenn mehrere Handschriften benutzt werden. Kann man sich wie hier, weil nur eine Handschrift da ist, mit einem allen Lesern sogleich verständlichen Notensystem behelfen, so ist dies unbedingt vorzuziehen, dann aber auch die Anwendung einer modernen Sprache praktisch und, wenn auch einem Philologen anstößig, gut geeignet, die Zugänglichkeit zu steigern.

Abgesehen von Verweisen auf andere Werke (jedoch nur solche, die Werner bekannt gewesen sind) und kritischen oder erklärenden Bemerkungen des Herausgebers, enthalten die Noten sämtliche Randnoten und Textkorrekturen der verschiedenen Hände. Wenn keine andere Hand genannt ist, so rühren die Korrekturen von der ersten Hand her; die der zweiten Hand, die sich als solche feststellen ließen, sind nur drei (15^3, 15^4, 31^3); dagegen hat diese Hand nicht wenige Randnoten hinzugefügt, die sich alle auf den mathematischen Inhalt beziehen, indem sie denselben kritisieren, vermehren oder gruppieren (9^4, 15^1, 16^2, 19^1, 27^2, 32^5, 34^6, 41^3, 41^4). Die Hinzufügungen der dritten Hand und die der jüngeren Hände sind sehr selten und ohne Bedeutung. Drei Korrekturen einer jüngeren Hand sind besonders bemerkenswert, weil sie mit roter Tinte ausgeführt sind (129^{5-7}).

Die Textkorrekturen des Herausgebers sind entweder Einschiebsel, die *alle* in [ ] stehen, oder Änderungen des überlieferten Textes, die *alle,* mit Ausnahme der oben genannten orthographischen Modernisierungen, in den Noten angegeben werden. An Stellen, wo Absonderlichkeiten vorkommen, die der Herausgeber nicht zu korrigieren wagte, ist ein [!] beigefügt, damit der Leser sehe, daß hier nicht irgendwelche Ungenauigkeit oder Unachtsamkeit des Herausgebers vorliegt. Textstücke, die wegen Dittographien oder irgendwelcher anderen Unregelmäßigkeiten in den Noten näher erklärt werden müßten, stehen in ⟨ ⟩.

Es war die Absicht, so wenig wie möglich am Texte sprachlich zu ändern, so steif, unklassisch und unabgeschliffen er auch sein mag, weil die Sprache im Gegensatz zur Orthographie sicher Werners eigene ist. Alle falschen Sätze, Beweise oder Ausdrücke, die offenbar vom Verfasser herrühren, blieben natürlich ebenfalls unverändert. Detailfehler in den Figurenbuchstaben sind dagegen überall berichtigt worden; denn es wurde ja oben nachgewiesen, daß viele mathematische Sinnlosigkeiten vorkommen, die auf Abschrift beruhen müssen; also können *alle* solche Fehler auf dieselbe Weise erklärt werden. Ebenso sind die falschen Verweise korrigiert, wenn sie als Abschreibefehler erklärt werden konnten. An allen den Stellen, wo der Abschreiber, wie oben dargelegt, irgendeine Korrektur des Verfassers mißverstanden hat, ist die Stelle so korrigiert, daß der Text die Gestalt erhalten hat, die Werner ihm durch die Korrektur geben wollte.

Eine mehrmals (4^3, 6^4, 12^7, 17^1, 18^4, 18^7, 23^2, 57^1, 58^3, 60^2, 61^7, 63^2, 79^1, 80^2, 127^3) vorkommende Konjektur ist die Änderung von *nis* in *triangulis.* Sie kommt an Stellen vor, wo die sphärischen Werke des Theodosios und Menelaos mit den Worten *de* (oder *in*) *sphaericis nis* zitiert werden, wo *nis* in der Ausgabe dann immer als Abschreibefehler für *3is* (d. h. *triangulis*) verstanden ist. Daß diese Konjektur die richtige ist, läßt sich sicherlich bestreiten; erlaubt ist sie aber, weil die anderen möglichen Konjekturen *nis* = *3^is^* = *tribus; nis* = *nīs* = *nobis*; *nis* = *ms.* = *manuscriptis; nis* = *[trigo]nis* offenbar weniger leicht zu verteidigen sind. Es ist aber keineswegs ausgeschlossen, daß dieses Wort *nis* in Werners Originalmanuskript irgendeine Erinnerungsnotiz oder ein Vermerk am Rande oder über der Zeile gewesen ist, die nur durch Versehen des in dieser Beziehung recht schuldbelasteten Abschreibers in den Text hineingekommen sind; dann wäre vielleicht doch die Konjektur *nis* = *ms.* = *manuscriptum* die richtige.

Das Bild von Werner, das der Ausgabe vorangeht, ist das einzige bekannte und findet sich in mehreren Exemplaren im Germanischen Museum und in der Stadtbibliothek zu Nürnberg, bald mit, bald ohne Umrahmung von Säulen und Blumen. Nach der Auffassung des Herrn Dr. Schulz im Germanischen Museum ist diese Ausschmückung im Schluß des 16. Jahrhunderts hineingraviert worden; darauf, daß sie jünger ist als das Bild, deutet in hohem Grad der Umstand, daß die Jahreszahl 1490 auf dem Bild mit Einrahmung fehlt, also wegradiert ist. Zu der gegenwärtigen Ausgabe wurde deshalb das beste Exemplar ohne Umrahmung benutzt, nämlich der Stich in der Merkelschen Sammlung im Germanischen Museum. Das Bild ist wohl kaum gleichzeitig mit Werner, vielleicht ist es überhaupt nur ein Phantasiebild; verdächtig ist jedenfalls nicht nur die Jahreszahl 1490 — Werners 22. Lebensjahr —, sondern noch mehr die Ähnlichkeit mit einem alten und sicher echten Stich, der den mit Werner gleichzeitigen Astronomen Johs. Stöffler (1452—1531) darstellt. Dieser Stich findet sich im Berliner Kupferstichkabinett P. III p. 392, 61 und ist in den „Monographien zur deutschen Kulturgeschichte", Bd. 7: E. Reicke, *Der Gelehrte in der deutschen Vergangenheit*, Leipzig 1900, S. 95 publiziert.

Daß die Ausgabe Herrn Prof. Dr. Anton v. Braunmühl gewidmet ist, hat seine Ursache nicht nur darin, daß der Herausgeber sein Schüler und v. Braunmühl unter den Landsleuten Werners einer der eifrigsten und anregendsten Pfleger der Geschichte der Mathematik ist, sondern vielmehr darin, daß Werners Buch zum Bereich der sphärischen Trigonometrie gehört und v. Braunmühl nicht nur der Geschichtschreiber, sondern der erste und einzige Geschichtschreiber der Trigonometrie ist, und dank der Gewissenhaftigkeit und Nüchternheit seiner Arbeitsmethode lange der einzige und immer der Gründer bleiben wird. Dazu kommt noch, daß v. Braunmühl sich eingehend mit Werner beschäftigt hat, indem er im Jahre 1896, zu einer Zeit, da man noch allgemein meinte, Werners Sphärik sei verschollen[1]), bewies[2]), daß er der Erfinder der prosthaphäretischen Methode sei; und nun bildet eben die gegenwärtige Textausgabe die Bestätigung von der Richtigkeit dieses Beweises. In den vom Herausgeber besuchten Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie, die v. Braunmühl im Wintersemester 1899—1900 auf der Technischen Hochschule zu München hielt, wurde stark hervorgehoben, wie sehr der Verlust von Werners Buch zu bedauern sei. Als sein Zuhörer und Schüler im Jahre 1901 nach Italien ging und bald in Rom das Wernermanuskript fand, war er also, was Werner betrifft, sozusagen für den

1) Vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II, 2. Aufl., Leipzig 1900, S. 454. — A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 133—134. — Erst nachdem der Herausgeber die Wernerhandschrift gefunden hatte, bemerkte zufälligerweise G. Eneström, daß schon Heilbronner in seiner *Historia matheseos*, Leipzig 1742, unter den vatikanischen Hss. auch S. 543: *„Joannis Vornerii* (!) Neuburgensis (!) de Triangulis Sphaericis & Meteoroscopiis" aufführt, womit offenbar der Cod. Reg. 1259 gemeint ist. Vgl. *Bibliotheca Mathematica* $\mathbf{5}_3$, Leipzig 1904, S. 215.

2) *Bibliotheca Mathematica* $\mathbf{10}_2$, Stockholm 1896, S. 105—108. Vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, S. 134—137. Schon bei Montucla, *Histoire des mathématiques* I, Paris 1758, S. 584 und 617—619, wurde die Vermutung ausgesprochen, Werner habe die Prosthaphärese gekannt.

Fund präpariert, und dieser geschah unter den Auspizien des Forschers, dem die Ausgabe des neugefundenen Textes nun gewidmet ist.

Eine Pflicht des Herausgebers ist es auch, denen zu danken, die ihm bei der Arbeit beistanden, zuvörderst dem Präfekten der Vatikanischen Bibliothek Herrn Pater Fr. Ehrle, der sich gleich für den Fund interessierte und dem Herausgeber auf alle Weise die Arbeit erleichterte, demnächst Herrn Unterbibliothekar Sigfús Blöndal an der Königl. Bibliothek zu Köbenhavn, der bereitwillig eine kritische und absolut notwendige Korrektur der Ausgabe las, sowie Herrn Oberbibliothekar Milchsack zu Wolfenbüttel, den Direktionen der Universitätsbibliotheken zu Krakow und Königsberg und den Kollegen in der Stadtbibliothek und im Germanischen Museum zu Nürnberg, bei denen der Herausgeber Aufschlüsse über Werner suchte, endlich Herrn Gustaf Eneström, welcher in seiner Zeitschrift eine kurze Mitteilung über den Fund publizierte (*Bibliotheca Mathematica* $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242—243) und daran die wichtige Mitteilung über die Vorrede des Rheticus knüpfte, wodurch die Aufnahme derselben vor dem Texte ermöglicht wurde.

Die zur Vollführung der Arbeit nötigen Mußestunden erhielt der Herausgeber durch eine mehrjährige Unterstützung der Carlsbergstiftung.

4. Textgeschichte.

Johannes Werner ward am 14. Februar 1468 zu Nürnberg geboren, absolvierte die gelehrte Schule seiner Vaterstadt und begab sich, nachdem er sich auf mehreren deutschen Universitäten theologischen Studien gewidmet hatte, im Alter von 25 Jahren 1493 nach Italien.[1]) Er bezeugt selber, daß er im Jahre 1493 nach Rom kam[2]), und es geht aus seinen Schriften hervor, daß er sich noch zu Anfang des Jahres 1497 dort aufhielt.[3]) Im Schluß des Jahres 1497 oder im Anfang von 1498 muß er jedoch nach Nürnberg zurückgekommen sein; denn im Jahre 1514 sagt er, daß er sein Amt als Priester daselbst seit ungefähr 16 Jahren bekleide.[4]) Auch besitzen wir ja eine von ihm den 14. Februar 1498 verfaßte Nativität des Nürnberger Priesters Erasmus Doppler (vgl. oben S. 141, Note 1). In Nürnberg lebte er nun 30 Jahre bis zu seinem im Jahre 1528 erfolgten Tode, stets

---

1) Zitat nach Siegm. Günther, *Johann Werner aus Nürnberg und seine Beziehungen zur mathematischen und physischen Erdkunde*, Halle a. S. 1878 = *Studien zur Geschichte der mathematischen und physischen Geographie*, Heft 5. — In diesem Werk werden Werners geographische und meteorologische Arbeiten eingehend und mit großem Erfolg erörtert, und zugleich wird über Werners Leben neues Licht verbreitet. — Ausführliche und wichtige Aufschlüsse über Werner findet man auch in Doppelmayr, *Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730, I, S. 31 ff. — Siehe auch *Allgemeine deutsche Biographie* unter Werner.

2) „Ego cum venissem Hromam anno domini 1493" schreibt Werner nämlich in einem Sammelband von geographischen und astronomischen Werken, teils von ihm selbst, teils von anderen, mit dem Titel: *In hoc opere haec continentur: Nova translatio primi libri geographiae Cl. Ptolomaei, quae quidem translatio verbum habet e verbo fideliter expressum Ioanne Vernero Nurenbergensi interprete. — In eundem primum librum geographiae Cl. Ptholomaei argumenta, paraphrases, quibus idem liber per sententias ac summatim explicatur, et annotationes eiusdem Ioannis Verneri. — Libellus de quatuor terrarum orbis in plano figurationibus ab eodem Ioanne Vernero novissime compertis et enarratis. — Ex fine septimi libri eiusdem geographiae Cl. Ptolomaei super plana terrarum orbis descriptione a priscis instituta geographis. Locus quidam, nova translatione, paraphrasi & annotationibus explicatus, quem recentium geographorum, ut ipsorum id pace dicam, nemo hucusque sane ac medullitus intellexit. — De his quae geographiae debent adesse Georgii Amirucii Constantinopolitani opusculum. — In idem Georgii Amirucii opusculum Ioannis Verneri Appendices. — Ioannis de Regiomonte epistola ad Reverendissimum patrem & dominum Bessarionem Cardinalem Nicenum ac Constantinopolitanum patriarcham de compositione et usu cuiusdam meteoroscopii,* Nürnberg 1514. Die zitierten Worte finden sich in Annotatio 14 in Cap. III libri I geogr. Ptolemaei (fol. c_5 v).

3) Werners Sammelband von 1514 fol. d_1 r: „Quemadmodum ego Hromae conspexi lunae deliquium, quod fuit anno domini 1497 post diem XVIII Ianuarii sub noctis principium. Eiusdem itaque lunaris defectus principium Hromae fuit a me visum post diem decimum octavum Ianuarii."

4) Werners Sammelband von 1514 fol. a_2 r—v (Vorwort).

als Pfarrer, zuletzt in den Jahren 1525—1528[1]) am Friedhof zu St. Johannes.[2]) Seine Grabstätte ist unbekannt.

Den mathematischen, astronomischen und geographischen Studien war Werner während seines ganzen Lebens sehr zugetan, und schon von Jugend an fühlte er sich zum Studium der exakten Wissenschaften hingezogen. War er doch ein Nürnberger Kind und zu der Zeit geboren, in welcher seine Vaterstadt durch den Einfluß von Regiomontan u. a. ein wissenschaftlicher Kulturmittelpunkt geworden war. Die Reise nach Italien hat er unternommen, weil er nicht mit Unrecht hoffte, daselbst Gelegenheit zu bekommen, seine Kenntnisse in den von ihm so geliebten Wissenschaften erweitern und Bücher und Handschriften erwerben zu können. Daß diese Erwartung erfüllt wurde, ersieht man daraus, daß er in seinen Schriften mehrmals erklärt, von den italienischen Gelehrten vieles gelernt zu haben. Wenn er in der gegenwärtigen Ausgabe S. 58 davon spricht, daß er eine Menelaoshandschrift besitzt, und wir aus seinen Zitaten (vgl. S. 134—135) sehen, daß er die damals noch ungedruckten Werke von Geber und Theodosios kannte, so läßt sich vermuten, daß er Handschriften aus Italien mit nach Hause gebracht hat. Seine genauen Kenntnisse der griechischen Klassiker und der griechischen Sprache, die ihm später so sehr zustatten kamen, verdankt er wohl auch dem Aufenthalt in Italien.

Inwiefern seine schriftstellerische Tätigkeit schon in Rom angefangen hat, ist uns nicht bekannt; denn aus dieser Zeit kennen wir nur einige seiner Beobachtungen. Von seinen Lehrjahren erfahren wir überhaupt nur, was er uns selber in seinem Sammelband vom Jahre 1514 erzählt. Eben aus der Vorrede dieser seiner ersten Publikation wissen wir aber mit Bestimmtheit, daß er in den Jahren 1498—1514 alle die Mußestunden, die ihm seine kirchlichen Pflichten gewährten, seinen Studien über die exakten Wissenschaften widmete. Fast rührend ist die Schilderung seiner innigen Liebe zur Mathematik: „[Ego] a primis fere, ut aiunt, ungviculis philosophiae ac bonarum artium studiis me libentius addixi, huius praesertim philosophiae, quae mathematica dicitur . . . Hanc demum mathematicam disciplinam successivis horis, quando alia studia magis necessaria ecclesiaeque ministeria et ceremoniae, quibus ante annos ferme sexdecim initiatus fueram et adscriptus, id permitterent, relaxandi potissimum animi causa declinandique illius scelestissimi otii gratia versavi didicique, disciplinae huius allectus praecipue delectatusque veritate et certitudine. Ipsa enim primum certitudinis gradum inter caeteras obtinet humanas scientias; ex primis namque

1) Vgl. *Diptycha ecclesiae Sebaldinae d. h. Verzeichniß und Lebensbeschreibungen der Herren Prediger etc. an der Haupt- und Pfarrkirche bei St. Seebald in Nürnberg.* Von C. C. Hirschen, Nürnberg 1766. Daselbst steht S. 467 unter St. Johannes: „Die Herren Pfarrer daselbst: 1. Johann Werner, kam an 1525, starb oder kam ab 1528."

2) Im Jahre 1521, den 11. März, bezeichnet er sich nach Cod. Digbean. 312 (vgl. oben S. 141, Note 1) als „sacellanus divorum Joannis Baptistae Joannisque Evangelistae in suburbio Nurembergensi" und nach Cod. Aug. 17. 6. 4° (Vgl. oben S. 141, Note 1) wohl in demselben Jahre als „presbiter Bambergensis diocesis et vicarius seu rector cappellae beatorum Johannis baptistae et Johannis evangelistae Norinbergensis".

ac imediatis atque per se notis emanat initiis, quae se aliter habere perpetuo nequeant."[1])

Wie umfangreich Werners schriftstellerische Tätigkeit schon vor dem Jahre 1514 war, erfahren wir aus dem Sammelband von diesem Jahre. Vorn in demselben ist nämlich ein Privilegium vom Jahre 1513 (Landau 19. Dezember) abgedruckt (fol. a_1^v), in welchem Kaiser Maximilian dem Werner — „capellanus noster" nennt er ihn — gnädigst gestattet, eine Reihe Werke drucken zu lassen, darunter auch die im Jahre 1514 erschienenen. Von den übrigen, und unter ihnen befindet sich auch eine Sphärik, geben uns nun nicht nur das Privilegium, sondern auch die nach demselben im Sammelband folgenden Werke mit ihren Vorreden und Dedikationen vielerlei Aufschlüsse. Werner setzt nämlich hier manchmal Sätze aus den damals noch nicht zum Druck beförderten Arbeiten voraus und verspricht, sie bald zu veröffentlichen. Diese Zitate sind um so wichtiger gewesen, weil bisher kein einziges dieser Bücher, die aus der Publikation von 1514 ausgeschlossen wurden, bekannt war. Allerdings erschien im Jahre 1522, sechs Jahre vor Werners Tod, noch ein Sammelband seiner Werke[2]); darunter war aber keins von den im Jahre 1513—1514 erwähnten, so daß der Sammelband von 1522 also aus Arbeiten zusammengestellt worden ist, welche erst nach dem Jahre 1513 fertig wurden; und ebenso verhält es sich mit den meteorologischen Canones, die nach Werners Tod im Jahre 1546 von seinem Landsmann Johannes Schöner (1477—1547) herausgegeben wurden.[3])

Es erhellt schon aus allen diesen Umständen, daß die Publikation von 1514 die Hauptquelle unserer Kenntnis der älteren Produktion und des Lebens Werners ist, und doch ist ihr Wert als Quelle damit bei weitem nicht erschöpft; denn sie gibt uns außerdem die wichtigsten, ja fast die einzigen Nachrichten von Werners Beziehungen zu seinen Zeitgenossen und Gönnern[4]), wie den Nürnbergern Willibald Pirckheimer (1470—1530) und Sebald Schreyer (1446—1520), dem Kardinal Matthäus Lang (1468—1540, Bischof von Gurk, später Erzbischof von Salzburg) und dem Wiener Mathematiker und kaiserlichen Historiographen Johannes Stabius († 1522), auf dessen Veranlassung der Sammelband vom Jahre 1514 erschien und das kaiserliche Privilegium ausgefertigt wurde. Hinzu kommt noch, daß wir in demselben Band hochinteressante Aufschlüsse über die Überlieferung von Regiomontans Dreiecksbüchern und über Werners Kenntnisse derselben erhalten.

---

1) Werners Sammelband vom Jahre 1514, Vorwort fol. a_2^{r-v}.

2) Der Sammelband vom Jahre 1522 hat den Titel: *In hoc opere haec continentur: Libellus Ioannis Verneri Nurembergen[sis] super vigintiduobus elementis conicis. — Eiusdem Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi eius Problematis, quod Cubi duplicatio dicitur. — Eiusdem Commentatio in Dionysodori problema, quo data sphaera plano sub data secatur ratione. — Alius modus idem problema conficiendi ab eodem Ioanne Vernero novissime compertus demonstratusque. — Eiusdem Ioannis, de motu octavae Sphaerae, Tractatus duo. — Eiusdem Summaria ennarratio Theoricae motus octavae Sphaerae,* Nürnberg 1522.

3) *Canones sicut, ita brevissimi etiam doctissimi, complectentes praecepta et observationes de mutatione aurae clarissimi mathematici Ioannis Verneri.* Ed. J. Schonerus, Nürnberg 1546.

4) Neue Aufschlüsse finden sich vielleicht in Werners kleineren astrologischen Arbeiten (vgl. S. 141, Note 1).

Die im erwähnten Privilegium vom Jahre 1513 genannten Wernerschen Arbeiten, die nicht im Jahre 1514 gedruckt wurden, sind folgende:

1. Libellus de constructione et utilitatibus meteoroscopii circularibus sectionibus in plano descripti.

2. Libellus de compositione et usu meteoroscopii rectis lineis et cylindricis segmentis in plano designati.

3. Libellus de concinnatione ac commoditatibus meteoroscopii, quod in plano triangulari figura rectisque lineis formatur.

4. Libellus de constructione et usu plani meteoroscopii ac rectilinei quadratam speciem habentis.

5. Libellus de compositione et utilitatibus meteoroscopii, quod in plano lineis rectis cylindricisque ac circularibus segmentis concinnatur.

6. Libri quinque de triangulis per maximorum segmenta circulorum constructis.

7. Liber de multimodis tam in astronomia quam in geographia problematis, quae ope arteque horum quinque librorum absolvuntur.

8. Opusculum de nonnullis scioteriis, quibus linea meridiana, sublimitas axis mundani et hora diei sub omni climate per umbram solis simul examinantur.

9. Tractatus resolutorius, qui prope pedissequus existit libris datorum Euclidis.

10. Libellus arithmeticus, qui complectitur quaedam commenta numeralia.

Während 1—5 offenbar Abhandlungen zur Beobachtungs- und Instrumentenlehre sind und 7 eine sphärische Astronomie ist, so ist 6 unzweifelhaft eine Sphärik oder vielmehr eine Lehre von Kugeldreiecken; 8 ist eine Gnomonlehre oder Lehre von Sonnenuhren, 9—10 mathematische Werke, die uns in diesem Zusammenhange nichts angehen.

Verglichen mit der obigen Beschreibung (S. 140—141) vom Cod. Regin. 1259 stimmen 1—6 offenbar inhaltlich genau mit den beiden Werken dieser Handschrift; dagegen stimmen weder Titel noch Bücheranzahl, indem das Privilegium nicht 4 Bücher *de triangulis sphaericis,* sondern 5 *de triangulis per maximormum segmenta circulorum constructis,* und statt 6 Bücher *de meteoroscopiis* 5 Libelli von 4 oder 5 verschiedenen Meteoroskopien nennt; auch stimmen die Überschriften dieser Libelli keineswegs mit denen der 6 Bücher im Cod. Regin. 1259 überein.

Untersuchen wir aber die Werke im Sammelband von 1514 und die darin befindlichen Zitate genauer, so werden wir uns bald davon überzeugen können, daß die Unübereinstimmung offenbar nur eine scheinbare ist. Sagt Werner doch in bezug auf die Meteoroskopien fol. $c_3{}^r$: „Igitur ego quaedam plana meteoroscopia excogitavi variis descriptionum figuris deformata. Nam unum est triangulum, alterum quadrangulum, et quoddam est circulorum segmentis, aliud vero rectis tantum lineis aut curvis quibusdam designatum. De huiusmodi itaque meteoroscopiorum compositione et utilitate librum unum scripsi, quem deo optimo maximoque opitulanti paulo post in publicum edam.“ Also spricht Werner ausdrücklich von „einem Buch“ über die Konstruktion und Anwendung der „vier“ von ihm erfundenen Meteoroskopien, was ja durchweg mit dem Cod. Regin. 1259 stimmt. Es ist also alle Ursache vorhanden, anzunehmen, daß die 5 Libelli und vielleicht

auch die als Nr. 7 im Privilegium genannte sphärische Astronomie mit den 6 Büchern im Cod. Regin. 1259 identisch sind. Möglicherweise sind mehrere kleinere Abhandlungen zu einem größeren Buch vereinigt worden; denkbar ist es aber auch, daß das Privilegium die anderen und genaueren Titel hat, damit der wirkliche Inhalt recht deutlich aus ihnen hervorgehe und Mißverständnisse vermieden würden.

Was den Titel der Sphärik betrifft, so war im Jahre 1513 der Begriff *triangulus sphaericus* nicht geläufig. Regiomontans Dreiecksbücher waren noch nicht bekannt, und in den alten Übersetzungen des Mittelalters findet man Umschreibungen wie z. B. *triangulus ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphaerae* oder *figura trilatera* = τρίπλευρον (beide in Gherardo Cremoneses Übersetzung von Menelaos' Sphärik) oder *triangulus ex arcubus circulorum magnorum* (Gebers Astronomie in Gherardos Übersetzung), ferner *trilaterum* oder *figura trilatera* in Georgs von Trapezunt (1396—1485) Übersetzung von Ptolemaios' Syntaxis und einfach *triangulus* in Gherardos Übersetzung desselben Buches. Erst in Georgs von Peurbach und Regiomontans Kommentar dieses Werkes (vgl. S. 134) findet man an einer Stelle (Buch II, Satz 19) die Bezeichnung *triangulus sphaeralis*. Werner hatte also Ursache, in dem Privilegium den Begriff näher zu erklären, und seine Erklärung *triangulum per maximorum segmenta circulorum constructum* stimmt gut mit der Definition im Cod. Regin. 1259 (I, def. 9): *triangulum . . . quod ex maximorum in sphaera concinnantur segmentis.*

Übrigens heißt Werners Sphärik in den Zitaten der Publikationen von 1514 und 1522 meistens *liber de triangulis sphaericis,* mitunter *liber sphaeralium triangulorum,* so daß der uns im Cod. Regin. 1259 begegnende Titel immer der vom Verfasser am meisten benutzte gewesen ist.

Es erhebt sich nun die Frage: Läßt sich aus diesen Zitaten in den beiden Wernerschen Publikationen schließen, inwiefern die Sphärik in den Jahren 1514 und 1522 die uns im Cod. Regin. 1259 überlieferte Gestalt hatte? Leider läßt sich das nur in den Hauptzügen feststellen; denn die Zitate nennen nur das betreffende Buch, nie den Satz.

Von besonderem Interesse ist es, ob die Auflösungen schiefwinkliger Dreiecke mit Hülfe der prosthaphäretischen Methode, aus welchen im Cod. Regin. 1259 das vierte Buch besteht, schon im Jahre 1514 erwähnt werden.

Da begegnet uns im Sammelband von diesem Jahre zuerst fol. k_5^r in Werners Kommentar zu Georgios Amirucios' Buch als „Problema tertium. Propositio undecima" folgendes Problem: „Datis duorum locorum latitudinibus itinerisque intervallo, eorundem differentiam longitudinum liquidam datamque facere", von welchem Werner sagt: „Ego denique idem problema . . . per verissima mathematicae artis principia et assumpta in subiectis demonstravi figuris, quas ex parte tertia libri, quem de multiplicibus scripsi sphaerae triangulis, fui mutuatus. Per hunc quoque de eisdem triangulis librum, deo optimo maximo suam gratiam opemve ac longiorem mihi vitam concedente, priusquam haud multi praetereant anni longe plura id genus una cum ipso triangulorum in publicum edam problemata, quae non tribus quatuorve multiplicandorum numerorum laboribus ac quadrati lateris inquisitione, interdum etiam divisione, veluti

in praesenti, sed unica tantum modo, vel divisionis aut multiplicationis operatione, duabusque ad maximum additionibus et unica sublatione, quae celeriter ac nullo pene fiunt negotio a me absolvuntur." Danach folgt dann eine durch Orthogonalprojektion erledigte Dreiecksauflösung, wo ein Winkel ($\lambda_1 - \lambda_2 =$ die Längendifferenz zweier Orte) eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch dessen drei gegebene Seiten ($90^0 - \beta_1$ und $90^0 - \beta_2 =$ die Komplemente der Breiten der beiden Orte, $\delta =$ die sphärische Entfernung derselben) gefunden wird.[1]

Also knüpft Werner an eine orthogonalprojektivische Lösung der im Cod. Regin. 1259 Buch IV, Satz 2—5 durch die prosthaphäretische Methode behandelten Dreiecksaufgabe eine Erklärung, die dem *Correlarium generale* am Ende des vierten Buches fast wörtlich gleichkommt. Im Jahre 1514 hatte Werner folglich die prosthaphäretische Methode und ihre Anwendung zur praktischen Umgestaltung des Cosinussatzes, d. h. des zweiten Hauptsatzes der sphärischen Trigonometrie $(\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c})$ schon vollständig ins reine gebracht. Zusammen mit dem *Corollarium generale* zeigt die oben zitierte wichtige Stelle des Sammelbandes, wie klar Werner die Bedeutung der prosthaphäretischen Methode begriff, und wie eifrig er deshalb war, durch die Publikation seiner Sphärik diese seine Erfindung bekannt zu machen.

In einer Beziehung stimmt das Zitat nicht mit dem überlieferten Text. Es verweist auf Buch III der Sphärik; im Cod. Regin. 1259 aber befindet sich die betreffende Dreiecksauflösung vorn im vierten Buche. Durch die übrigen uns zur Verfügung stehenden Zitate wird diese Unübereinstimmung in bezug auf die Bücherzahl nicht nur nicht beseitigt, sondern vielmehr bestätigt. Allerdings wird im Sammelband vom Jahre 1514 an einer Stelle (fol. d_1^r), wo dieselbe Aufgabe von der Auffindung des Längenunterschiedes zweier Orte behandelt wird, kein Buch genannt: „... his ita suppositis per librum de sphaericis triangulis differentia longitudinum urbis Hromae et Nurenbergae reperietur." Im Sammelband vom Jahre 1522 wird aber in Werners Buch *de motu octavae sphaerae,* Traktat 1, Prop. 2 (fol. $k_1^v - k_2^r$) im Dreieck Stern — Pol der Ekliptik — Nordpol die Länge des Sternes (λ) durch seine Breite (β), seine Deklination (δ) und die Ekliptikschiefe (ε), d. h. wie oben ein Winkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch dessen drei gegebene Seiten numerisch bestimmt, und da heißt es[2]: „Eorundem trium siderum ... veras in zodiaco longitudines muneratione datas exhibere.

1) Eine eingehende Erörterung dieser Aufgabe gibt Günther, *Johann Werner aus Nürnberg,* Halle a. S. 1878, S. 310—313. — Vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 135.

2) Vgl. A. v. Braunmühl, *Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie, Bibliotheca Mathematica* **10**$_2$, Stockholm 1896, S. 105—108. Hier benutzt v. Braunmühl diese Dreiecksauflösung und die daran geknüpften Bemerkungen des Jakob Christmann (vgl. S. 166), um nachzuweisen, Werner sei der Erfinder der prosthaphäretischen Methode. — Vgl. auch A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 135—136. — Gleichfalls A. v. Braunmühl, *Zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* Heft 9 (Cantor-Festschrift), Leipzig 1899, S. 17—18.

Iuxta praescriptionem itaque theorematum tertii libri, quem scripsi de triangulis sphaericis, pro quolibet trium horum siderum vero in longitudine zodiaci loco comperiendo inveniendi sunt numeri quattuor proportionales, quorum quartus est sinus versus seu iuxta alios sagitta sive cuspis distantiae sideris a capite seu initio cancri ... Igitur iuxta praeceptiones theorematum praedicti tertii libri sphaeralium triangulorum memoratae proportionis primus terminus invenitur 3981067, secundus 10000000 partium semidiametri zodiaci, tertius 5137615 ... Igitur praedictae proportionis secundo tertioque termino simul actis, et producto per primum diviso, dabitur eiusdem proportionis terminus quartus earundem partium 12905120, quarum semidiameter zodiaci subiicitur esse 10000000; dato itaque quarto termino sublatis 10000000 partibus diametri zodiaci, remanent partes 2905120, sinus videlicet rectus graduum et minutiarum, quibus Arista seu Spica ... removetur ab initio signi librae. Per tabulas itaque sinuum habentes sinum maximum partium 10000000[1]) praedicto sinui recto competunt gra[dus] 16, prima mi[nuta] 53 secunda 9 ... Per eadem denique theoremata eiusdem lib[ri] III sphaeralium triangulorum basiliscus seu cor leonis invenitur."

Hier wird somit dreimal deutlich auf Buch III verwiesen, und doch handelt es sich jedesmal um die im uns bekannten Texte Buch IV, Satz 2—5 behandelte Dreiecksauflösung, und zwar geht es aus dem obigen Zitat, wenn man es mit unserem Texte vergleicht, deutlich hervor, daß wir hier eine praktische Anwendung der in diesen Sätzen dargelegten prosthaphäretischen Methode vor uns haben, eine Anwendung, die der Benutzung der Formel $sin\ vers\ \lambda = \frac{sin\,\delta + sin\,(\varepsilon - \beta)}{\frac{1}{2}\{sin\,(\varepsilon + \beta) + sin\,(\varepsilon - \beta)\}}$ gleichkommt (vgl. v. Braunmühl). Es steht also fest, daß Werner sowohl im Jahre 1514 wie im Jahre 1522 die Sätze IV, 2—5 zum dritten Buch zählte.

Die zwei ersten Bücher dagegen scheinen im Jahre 1522 in der Hauptsache in Übereinstimmung mit dem überlieferten Texte gewesen zu sein; denn fol. $y_4{}^{r-v}$ zitiert Werner im Sammelbande dieses Jahres in bezug auf Dreieck *ach*: „igitur anguli ad *a, h* puncta recti sunt, et utrumque binorum segmentorum *ac, ch* quadrans per librum primum, quem scripsi de triangulis sphaericis", wo das Zitat auf Satz I, 1 des Textes im Cod. Regin. 1259 geht. Kurz danach heißt es wieder in bezug auf Dreieck *abd* mit der in *h* senkrecht auf *ab* stehenden Transversale: „Est enim per secundum librum, quem scripsi de sphaericis triangulis, velut rectus sinus ipsius *ad* segmenti ad rectum sinum *dh* segmenti ita sinus rectus ipsius *ab* segmenti ad rectum sinum segmenti *fh* ...", womit offenbar auf Satz II, 11—12 oder 25 unseres Textes hingewiesen wird. Wenn es weiter heißt: „Iuxta eundem autem librum secundum de sphaericis triangulis sinus rectus segmenti *ab* existit partium 1358926", so wird man dadurch nicht gezwungen, anzunehmen, daß im Jahre 1522 das zweite Buch der Sphärik in einer ganz anderen Gestalt als der uns bekannten vorlag — etwa mit Tafeln und numerischen Beispielen. Das Zitat braucht

---

1) Vgl. hiermit Werners Verweis auf die Sinustafeln mit *sin. max.*$=$10000000 in seinem *Correlarium generale* am Ende des vierten Buches, S. 133 der Ausgabe.

nichts anderes zu bedeuten, als daß in dem bei h rechtwinkligen Dreieck fhd der Winkel hdf (= Bogen ab) durch Satz II, 25 mit Hülfe der oben aufgestellten Proportion $\frac{\sin ad}{\sin dh} = \frac{\sin ab}{\sin fh}$, wo $ad = 90^0$, $\sin dh$ und $\sin fh$ bekannt, direkt gefunden werden kann.

Man könnte vielleicht wegen der Unübereinstimmungen in Bücherzahl und Inhalt des dritten und vierten Buches, die tatsächlich zwischen dem Cod. Regin. 1259 und den Zitaten aus den Jahren 1514 und 1522 bestehen, geneigt sein, die Hypothese aufzustellen, daß der Cod. Regin. 1259 eine Abschrift einer sehr alten Redaktion sei, vielleicht einer Redaktion aus der Zeit, als Werner noch in Rom war, z. B. aus dem Jahre 1495, welche Jahreszahl ja im handschriftlichen Katalog der Regina Sveciae-Sammlung angeführt wird (vgl. oben S. 140). Das geht aber nicht, da Werner in dem im Cod. Regin. 1259 überlieferten Texte wie in seinen gedruckten Publikationen immer die erst im Jahre 1505 bekannt gewordene Euklidübersetzung des Zamberti wörtlich zitiert.[1] Die uns überlieferte Redaktion ist also erst nach dem Jahre 1505 entstanden, und dann gehört sie wahrscheinlich dem Zeitraum 1522—1528, vorausgesetzt, daß sie nicht nach Werners Tod vorgenommen sei.

Aus dem, was wir von Werners Leben wissen und aus seinen eigenen Publikationen schließen können, geht also nur folgendes hervor: Vor dem Jahre 1513 und wahrscheinlich nach dem Jahre 1505 verfaßte Werner fünf Bücher über sphärische Dreiecke mit dem Titel *liber de triangulis sphaericis* oder *liber sphaeralium triangulorum.* Sowohl im Jahre 1514 als 1522 lag dieses Werk in einer Redaktion vor, in der die Sätze IV, 2—5 des Cod. Regin. 1259 zum dritten Buch gehörten, während wenigstens im Jahre 1522 die Bücher I—II dem Anschein nach den uns durch die Handschrift bekannten Inhalt hatten. Werner war sehr eifrig, das Werk zum Druck zu befördern, namentlich weil er sich bewußt war, daß die schon im Jahre 1514 daselbst klar dargelegte prosthaphäretische Methode von großem praktischen Wert sei.

Als Werner im Jahre 1528 starb, war also weder sein Werk über sphärische Dreiecke noch das über die Meteoroskopien gedruckt. Eine direkte Bestätigung davon gibt, was letzteres Buch betrifft, ein Brief, den Peter Apian vorn in seiner Neuausgabe des Jahres 1533 von Werners geographischen Werken abgedruckt hat.[2] In diesem Brief vom

1) Im Sammelband vom Jahre 1514 kritisiert Werner recht eingehend die Übersetzung des Zamberti, den er „novissimum interpretem“ nennt. Siehe Vorrede an Kardinal Matthäus Lang, fol. a_3r.

2) *Introductio Geographica Petri Apiani in doctissimas Verneri Annotationes continens plenum intellectum et iudicium omnis operationis, quae per sinus et chordas in Geographia confici potest, adiuncto Radio astronomico cum quadrante novo Meteoroscopii longe utilissimo. — Huic accedit Translatio nova primi libri Geographiae Cl. Ptolemaei, Translationi adiuncta sunt argumenta et paraphrases singulorum capitum: libellus quoque de quatuor terrarum orbis in plano figurationibus*

Jahre 1532 bittet und beschwört Johann Wilhelm von Loubemberg seinen Freund Peter Apian, da Werners *meteoroscopion planum* trotz allen Versprechungen nie erschienen sei, doch sein eigenes Buch von den Meteoroskopien erscheinen zu lassen.[1]) Dieser Bitte zufolge fügt Apian auch wirklich dem Abdruck der Wernerschen Werke seinen *Radius astronomicus cum quadrante novo meteoroscopii longe utilissimus* hinzu; aber, wie wir sehen werden, ist Apians Werk vermutlich nur eine Kompilation aus den zwei ersten Büchern Werners.

Die nächste Nachricht vom Schicksale der beiden Wernerschen Arbeiten gibt uns der Bibliograph Konrad Gesner (1516—1565). Er sagt im Jahre 1555, daß der Nürnberger Mathematiker und Mechaniker Georg Hartmann (1489—1564) die sechs (!) Bücher Werners über die Meteoroskopien vom Untergang rettete, und in den neueren 1574 und 1583 erschienenen Ausgaben von Gesners Bibliographie fügt Kaspar Wolf (1525—1601) hinzu, daß Georg Joachim Rheticus (1514—1576), wenn er sich nicht irre, sowohl diese sechs Bücher als die vier (!) Bücher *de triangulis* ediert habe.[2]) In diesen Nachrichten über Werners hinterlassene Arbeiten stimmt also die Bücherzahl der beiden Werke mit der im Cod. Regin. 1259 endlich überein.

Doppelmayr und nach ihm die neueren Forscher schließen aus diesen Notizen, daß Hartmann die schriftlichen Nachlässe Werners überkommen und sie Rheticus bei dessen Besuch in Nürnberg im Jahre 1542 über-

---

Authore Vernero. — Locus etiam pulcherrimus desumptus ex fine septimi libri Geographiae Claudii Ptolemaei de plana terrarum orbis descriptione iam olim etiam et a veteribus instituta Geographis una cum opusculo Amirucii Constantinopolitani de iis, quae Geographiae debent adesse. Adiuncta est etiam epistola Ioannis de Regio monte ad reverendissimum patrem et dominum Bessarionem cardinalem Nicenum ac constantinopolitanum Patriarcham de compositione et usu cuiusdam Meteoroscopii armillaris, Ingolstadt 1533.

1) Überschrift: *Ioannes Gulielmus a Loubemberg Petro Apiano Mathematico Ingolstadiano salutem dicit.* Unterschrift: *Ex arce Wagegg octavo Idus Decembris anno Christi nato 1532.* Im Briefe steht: . . . „Praeterea, quoniam Verneri Meteoroscopion planum quod post [?] obitum ab eo in libris suis promissum est, necdum in lucem prodiit aut a quoquam hucusque visum, peto imo flagito . . ., ut tuum nobis impartiri digneris . . . verum quia Meteoroscopii plani, quod Vernerus in suis libris a [?] morte habituros nos spopondit, neque illius copiam habemus, sive nonnullorum improbitate, qui hoc fortassis non secus ac draco vigil aureum vellus custodiunt nec emittunt unquam, sive quod temporum iniuria periit, quod saepe bonis rebus iniquum esse consvevit, rogo ac obtestor, ut tuum illud prodas . . . ne et Verneri et tuo . . . ex aequo carere cogamur."

2) Vgl. Conradi Gesneri *Pandectarum libri XXI*, Tiguri 1548, p. 78, col. 1: „Vuernerus: de triangulis"; p. 90, col. 4: „De Meteoroscopiis Joā. Vuerneri libri 6 non impressi, e Georgio Hartmanno Norimbergensi ab interitu vindicati." — *Appendix Bibliothecae universalis* Conradi Gesneri, Tiguri 1555, Artikel Werner: „Joannes Vuernerus: De Meteoroscopiis lib[*ri*] 6 nondum impressi per Georgium Hartmannum ab interitu vindicati." — Conradi Gesneri *Biblioteca universalis*, 2. Aufl. 1574, besorgt von Kaspar Wolf, p. 424 und 3. Aufl. 1583, p. 507: „Vuernerus: De Meteoroscopiis lib[*ri*] 6 nondum impressi per Georgium Hartmannum ab interitu vindicati. Eius libros 4 de Triangulis & sex de Meteoroscopiis Georgius Joch. Rheticus (ni fallor) edidit". — Gesner kennt also die Titel der beiden Werke Werners und weiß, daß die sechs Bücher *de meteoroscopiis* an Hartmann gekommen sind. Erst von Wolf wird, neun Jahre nach Gesners Tod, die Vermutung ausgesprochen, Rheticus habe die beiden Werke herausgegeben.

geben habe.[1]) Wolfs allerdings sehr bedingte Aussage von einer Edition der Wernerschen Arbeiten durch Rheticus hat man aber keine weitere Aufmerksamkeit geschenkt, um so mehr, weil keiner der Geschichtsforscher eine derartige Ausgabe angetroffen hat.

Sobald aber G. Eneström von dem Fund der Wernerschen Arbeiten Nachricht erhalten hatte, fand er, daß in mehreren modernen Bibliographien eine von Rheticus besorgte Ausgabe der beiden Werke aufgeführt war, die im Jahre 1557 in Krakow erschienen wäre.[2]) Und wieder war hier in sämtlichen Bibliographien von vier Büchern *de triangulis sphaericis* und von sechs Büchern *de meteoroscopiis* die Rede, in Übereinstimmung also mit Wolfs Angaben und den Texten im Cod. Regin. 1259.

Während es trotz umfassender Nachforschungen in den Hauptbibliotheken Europas nicht gelang, ein einziges gedrucktes Exemplar der Wernerschen Werke aufzufinden, ergab es sich nach einer Anfrage in Krakow, daß Zebrawski, der erste der genannten Bibliographen, dessen Arbeit natürlich die Quelle der anderen gewesen ist, in der Universitätsbibliothek zu Krakow eine dünne Broschüre von sechs Folioblättern gefunden hatte, welche auf dem Titelblatt die Titel der beiden Wernerschen Werke enthielt und als Herausgeber den Rheticus anführte. Außer diesem Titelblatt enthielt die Broschüre dagegen nur eine zehnseitige Vorrede (Prooemium) von Rheticus, welche dazu bestimmt war, die Wernerschen Arbeiten einzuleiten.[3]) Mit gütiger Erlaubnis der Direktion der Universitätsbibliothek zu Krakow ist ein Faksimile dieser Broschüre in der gegenwärtigen Ausgabe dem Texte vorangestellt, damit Vorrede und Text zusammen erscheinen, so wie es ursprünglich die Absicht war.

Für die Textgeschichte zeigt es sich gleich, daß diese Broschüre zur rechten Zeit gefunden worden ist; denn ihr Inhalt ermöglicht die Lösung fast aller Fragen in bezug auf das Schicksal der beiden Wernerschen Texte, die noch ungelöst waren. Der Titel *Ioannis Verneri mathematici Norimbergensis de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex, nunc primum studio et diligentia Georgii Ioachimi Rhetici in lucem editi, Cracoviae, Lazarus Andreae excudebat, anno MDLVII* zeigt gleich, daß sowohl Titel als Bücheranzahl (4 und 6) in der von Rheticus in Angriff genommenen Ausgabe mit dem Texte des Cod. Regin. 1259 genau übereinstimmen, ferner bestätigen die Worte „nunc primum editi", daß die Werke vor dem Jahre 1557 nicht publiziert waren. Demnächst findet sich

1) Doppelmayr, l. c. S. 33—34, Note (bb) und (cc); S. 59, Note (yy). — Cantor, l. c., 2. Aufl. II, S. 454. — A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 133.

2) Zebrawski, *Bibliografia pismiennictwa polskiego z dzialu matematyki i fizyki oraz ich zastosowan,* Krakow 1873, S. 140—141. — Estreicher, *Bibliografia polska* 8, Krakow 1882, S. 45. — Houzeau & Lancaster, *Bibliographie générale de l'Astronomie* I (1887), S. 561. Hier findet sich statt 1557 die notwendigerweise falsche Jahresangabe 1507. — Wenn B. Baldi in seiner *Cronica de Matematici,* Urbino 1707, S. 106 (Artikel Giovanni Vernero) sagt: „Scrisse anco un trattato de giudicii del vento, e de Meteoroscopici promessi alle luce da Giovanni Hermanno (!)", so dürfte das wohl auf irgendeinem Mißverständnis beruhen.

3) G. Eneström, *Über eine wiedergefundene Handschrift der Trigonometrie des Johannes Werner, Bibliotheca Mathematica* $\mathbf{3}_3$, Leipzig 1902, S. 242—243.

unten auf dem Titelblatt eine handschriftliche Notiz von Wichtigkeit: „Praefatio haec sola Cracoviae impressa, reliquum opus mittere in Germaniam proposuerat, ut ego intellexi ex quadam epistola manu ipsius Rhetici ad Wolfium scripta. An missum et impressum sit, nondum scio.“[1] Also ist die Drucklegung nach Beendigung der Vorrede unterbrochen worden, weil Rheticus die Texte in Deutschland statt in Krakow drucken zu lassen beabsichtigte, und diese Absicht hat er Wolf brieflich mitgeteilt. Dadurch finden auch dessen oben (S. 158, Note 2) zitierte Worte „Eius libros . . . Georgius Joch. Rheticus (ni fallor) edidit“ vom Jahre 1574 ihre natürliche Erklärung.

Die Vorrede ist an den Kaiser (damals König) Ferdinand I. gerichtet und enthält nach einer historisch-philosophischen Einleitung eine Lobrede und Inhaltsübersicht der sechs Bücher *de meteoroscopiis,* aus welcher herausgelesen werden kann, daß die im Privilegium vom Jahre 1513 (vgl. oben S. 153) aufgeführten fünf Libelli über Meteoroskopien mitsamt dem *Opusculum de nonnullis scioteriis etc.* (Nr. 8 des Privilegiums) und, wie es scheint, auch mitsamt dem *Liber de multimodis tam in astronomia quam in geographia problematis* (Nr. 7 des Privilegiums) zu den sechs Büchern *de meteoroscopiis* zusammengearbeitet worden sind.

Rheticus sagt weiter: „Hos de meteoroscopiis libros et de triangulis sphaericis Georgius Hartman mathematicus Noricus doctrina et virtute praestans post Verneri mortem tanquam ex naufragio dispersas tabellas hinc inde collegit, et ea, quae quasi foliis Sybillae descripta atque dispersa essent, concinnavit mihique ante quindecim annos dedit.“ Hier erhalten wir also durch Rheticus selbst eine ganz sichere Bestätigung davon, daß er, wie vermutet, die Werke im Jahre 1542 von Hartmann bekommen hat. Dazu erfahren wir, daß dieser die beiden Werke in mehreren Stücken erworben hat, und daß sie auf losen ungeordneten Blättern geschrieben waren, die Hartmann wie die Trümmer eines Schiffbruches sammelte. Das stimmt aber durchweg mit dem, was wir oben durch die kritische Behandlung des überlieferten Textes aus dessen schlechtem Zustand folgerten.

Weiterhin in der Vorrede sagt Rheticus: „His sex de meteoroscopiis libris praemisimus quatuor de sphaericis triangulis. Quinti materiam congesserat, sed ea in manus Hartmanni non venere. Annotaverat, quam doctrinae partem in eo tractasset, sed nos inchoatam optimi Appellis Venerem diversa manu non perficiendam statuimus.“ Hieraus ersehen wir, daß Hartmann und Rheticus nur die vier ersten Bücher und irgendeine Inhaltsangabe des fünften Buches der Sphärik überkommen haben, entweder weil die Redaktion von Buch V nie verwirklicht worden war, oder weil es nach Werners Tod von den vier ersten getrennt wurde und in andere Hände überging. Gleichzeitig erklärt sich auf die einfachste Weise der oben mehrmals erwähnte Widerspruch in den Angaben der Bücherzahl, und dazu wissen wir nun mit Bestimmtheit, daß der Cod. Regin. 1259 eine von Rheticus besorgte Abschrift ist, d. h. wie Eneström vermutete, sein Druckmanuskript; denn erst in seinen Händen kann die Sphärik die uns von dem Codex bekannte ge-

1) Vgl. G. Eneström, l. c.

sammelte und einheitliche Gestalt in vier Büchern erhalten haben, ohne freien Platz für oder Inhaltsangabe über das vermutlich für immer verschollene fünfte Buch. Cod. Regin. 1259 ist offenbar so entstanden, daß zuerst Hartmann und nach ihm Rheticus die glücklich erworbenen Entwürfe von Werners Büchern geordnet haben, so daß die losen Blätter in die richtige Ordnung kamen; und dann hat Rheticus einen Schönschreiber dafür bezahlt, das so geordnete, aber unvollständige und in vielen Einzelheiten unfertige Buch in einheitlicher Form abzuschreiben.

Bedauernswert ist es, daß wir gar nichts davon erfahren, was in dem fünften Buche gestanden hat oder stehen sollte; sicher ist jedoch hier die in den vorhergehenden Büchern noch nicht behandelte Aufgabe, die Seiten des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch die drei gegebenen Winkel zu finden, gelöst worden. Ausgeschlossen ist es nicht, daß Werner dann auch die noch fehlenden Hauptrelationen des schiefwinkligen Dreiecks[1]) implizite gefunden hat, und zwar in Verbindung mit der Prosthaphärese, oder daß er die prosthaphäretische Methode eingehender entwickelt und ihre weitere Anwendung auf mehrere Fälle der schiefwinkligen Dreiecksauflösungen ausgedehnt hat.[2])

Wenn man, was unter den vorliegenden Umständen recht nahe liegt, etwa befürchten möchte, daß der im Cod. Regin. 1259 vorliegende Text eine Bearbeitung oder neue Redaktion des Urtextes sein sollte, so erfährt man aus Rheticus' Vorrede, daß diese Furcht unbegründet sein dürfte. Die zitierten Worte: „sed nos inchoatam optimi Appellis Venerem diversa manu non perficiendam statuimus" zeigen klar, wie ängstlich Rheticus, der einzige, der nach Werners Tod Veranlassung hatte,[3]) an den Arbeiten zu korrigieren, eventuellen Textänderungen gegenüber war. Noch deutlicher kommt seine Pietät zum Vorschein in den Worten, mit denen er fortsetzt: „Porro eam Vernerus in his condendis libris viam est ingressus, ut doctrinae triangulorum sphaericorum a se traditae, nihil a quovis artifice addi, quod non redundaret, posset, nihil demi, sine noxa totius operis, cum nihil redundet." Aus einem anderen Passus der Vorrede, der eigentlich nur das Buch *de meteoroscopiis* gilt, erhellt auch deutlich, daß Rheticus einen offenen Blick dafür hatte, daß eine Bearbeitung von den Wernerschen Arbeiten, so unvollständig diese auch überliefert waren, sie sehr leicht verunstalten würde: „Virgilius sua Aeneida flammis potius absumi voluit, quam edi ultima manu non imposita, neque noster [d. h. Werner] sua, ut res exigebat, perpolire et perficere potuit morte praeventus. Ego in alieno

1) $\cot B = \dfrac{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A}{\sin b \sin A}$ mit seinem Analogon,
$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B$ und $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$. Letzterer Satz, der Sinussatz, war den Arabern bekannt und stand auch bei Regiomontan.

2) Vgl. A. v. Braunmühl, *Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie, Bibliotheca Mathematica* 10_2, Stockholm 1896, S. 108. — Derselbe, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, S. 136—137.

3) Die Vermutung lag unter diesen Umständen nahe, daß Rheticus' Hand mit der zweiten Hand des Cod. Regin. 1259 identisch sei. Durch einen Vergleich mit einem sicheren Rheticusautograph in der Universitätsbibliothek zu Königsberg wurde diese Vermutung jedoch hinfällig.

opere ingenium nostrum ostentare nolui, et ita qualia sunt imperpolita aut etiam imperfecta an ederem, dubitavi. Vicit tandem omnes deliberationes divi Augusti consilium. Aeneis, licet non sit, qua optasset Virgilius arte et diligentia exculta, tamen Divus Augustus his divini Virgilii laboribus totam posteritatem defraudari noluit. Videmus et simili consilio pleraque excellentissimi medici Montani scripta, dicta et facta in lucem prodire. Non igitur dubitemus et nos, Germani nostri mathematicum opus non omnibus modis excultum neque absolutum edere, quod tamen praestantius erit multorum aliorum perpolitis et magno apparatu scriptis voluminibus." Möchte auch jemand Rheticus' Worte als Phrasen auffassen, die darüber decken sollten, daß er nicht die Mühe haben wollte, die Wernerschen Werke fertig zu redigieren und das letzte verschollene Buch zu rekonstruieren, so verbürgen sie uns jedenfalls, daß er die beiden Texte hat abschreiben lassen, ohne sie irgendwie zu ändern oder zu verbessern. Wissentlich hat er sie, wie er sagt, „unpoliert ja sogar unvollendet", so wie sie vorlagen, zum Druck befördern wollen. Die vorliegende Textausgabe und die an dieselbe geknüpfte Kritik (vgl. oben S. 145) bestätigt in jeder Beziehung Rheticus' Äußerungen; auch ohne sie könnten wir den Text als einen „unpolierten ja sogar unvollendeten" charakterisieren.

Warum Rheticus 13 Jahre schwankte, ehe er die Drucklegung in Angriff nahm, erklärt er auch in der Vorrede: „Cur tam diu apud me latuerint, multae sunt causae. Primum et secundum meteoroscopium quidam pro suis ediderant; nam ut postea a Georgio [d. h. Hartmann] audivi, illi apud se conspecti operis rationem et formam expresserant. Sat sciebam, Bellerophontis fabulam lusuros, ut se quidem facti autores praedicarent; sed apud nos esse, qui monstro superato linguam haberet, qua facti autorem demonstraret. Dum dubitamus, nosterne [d. h. Werner] an illi meteoroscopiorum sint autores, nihil praeterea ea de re prodire videmus. Verneri igitur meteoroscopia amplius praemenda non duximus, maxime cum alia insuper duo meteoroscopia tradiderit prioribus longe praestantiora; quum praeterea muta illa sunt et absque lingua, nostra vero facunda et quae sua eruditione omnem posteritatem aluerint." Erst eine genaue Untersuchung des Buches *de meteoroscopiis* und eine Vergleichung mit den in den Jahren 1528—1557 publizierten astronomischen Werken wird ins reine bringen, wer diejenigen sind, die, wie Rheticus hier sagt, das Werk Werners bei Hartmann eingesehen und einen Teil desselben als eigene Arbeit herausgegeben haben. Wie oben (S. 158) angedeutet, läßt sich jedoch vermuten, daß mit der einen von diesen Personen Peter Apian gemeint ist.[1])

Wir möchten wissen, warum Rheticus, wenn er endlich nach langem Schwanken die Drucklegung in Angriff genommen hatte, doch nicht die Wernerschen Arbeiten drucken ließ, um so mehr, weil die Beantwortung dieser Frage sicherlich über die Entstehungsgeschichte von Rheticus' und

1) Von Apian hatte Rheticus keine gute Meinung. „Ejus artem saepe Rheticus, bonae memoriae, vocare solitus erat faden kunst" schreibt Thadd. Hayck (Hagecius) im Jahre 1588 an Tycho Brahe. Vgl. Tychonis Brahei *et ad eum doctorum virorum epistolae ab anno 1588,* ed. F. R. Friis, Havniae (Köbenhavn) 1900—1907, S. 28.

Othos *Opus palatinum*[1]) Licht verbreiten würde. Das *Opus palatinum* ist nämlich, nicht in den Einzelheiten[2]), sondern in der Anlage und Einteilung, und nicht zum mindesten in der Langatmigkeit und Unübersichtlichkeit die Vervollständigung von Werners Buch über die Kugeldreiecke und die eingehendere und methodischere Behandlung der diesem Werke zugrunde liegenden Ideen. Die drei Haupttheorien, die Werners Buch behandelte, erstens die Klarlegung der verschiedenen möglichen Dreiecksformen (Buch I), zweitens die Auflösung vom rechtwinkligen Dreieck (Buch II), drittens die des schiefwinkligen Dreiecks (Buch III—IV [und V?]), diese drei Haupttheorien bildeten auch den Inhalt vom *Opus palatinum*, insofern es von sphärischen Dreiecken handelte. Überall, wo Werners Buch unvollkommen ist, wo seine Einteilungsprinzipien nicht subtil genug sind, um alle möglichen Spezialfälle auszuscheiden, da erreicht es das *Opus palatinum*, alle einzelnen Fälle eigens zu erörtern und die subtilsten Einteilungsprinzipien durchzuführen, und immer in der systematischsten Art und Weise.[3])

Es liegt offenbar sehr nahe, in diesem eigentümlichen Verhältnis der beiden Werke zueinander die Ursache zu der unterbrochenen oder aufgegebenen Drucklegung von Werners Werken zu suchen; denn äußere Gründe waren nicht vorhanden; nach dem Jahre 1557 lebte Rheticus noch 16 Jahre und war bis zu seinem Todestage rüstig und arbeitsfähig; andere Arbeiten von anderen Gelehrten, die die Publikation von Werners Büchern unnötig machen konnten, erschienen außerdem nicht in der Zeit ums Jahr 1557. Wir müssen also nach inneren Gründen suchen, und stoßen da zunächst auf die Unvollkommenheiten, die der Wernerschen Arbeit anhaften. In seiner Vorrede gibt Rheticus, wie wir sahen, kund, daß diese Unvollkommenheiten da sind, aber nicht geändert werden dürfen; er fügt indessen eine Lobrede hinzu: „Voluit [d. h. Werner] omnibus numeris [opus] esse perfectum, elementis exceptis, quae a Theodosio et Menelao traduntur. Hoc suum consilium prudentissime in his, quae effecta sunt, pertendit, ita ut facile erudita facilitate omnium ante se in hoc genere scripta superet.“ Diese Lobrede ist keine leere Lobhudelei. In der Anlage und in der Systematik war Werners Werk im Jahre 1557 tatsächlich das

1) *Opus palatinum de triangulis, a Georgio Ioachimo Rhetico coeptum: L. Valentinus Otho, Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus, consummavit,* Neustadt 1596.

2) In seinem *Dialogus de canone doctrinae triangulorum* hinten im *Canon doctrinae triangulorum,* Leipzig 1551, sagt Rheticus, daß er weder dem Ptolemaios noch Geber, dessen Methode von Peurbach, Regiomontan und Werner ausgebaut sei, bei der Auflösung sphärischer Dreiecke folge, sondern von der Betrachtung von Pyramiden ausgehe, deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt der Kugel sei, und deren Grundflächen ebene Dreiecke seien. (Vgl. K. Hunrath, *Des Rheticus canon doctrinae triangulorum und Vieta's canon mathematicus, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* Heft 9 (Cantor-Festschrift), Leipzig 1899, S. 215). Die Worte des Rheticus sowie die Bezeichnung *doctrina triquetrorum globi* für die Lehre der sphärischen Dreiecke zeigen, daß Rheticus schon im Jahre 1551 über die aus dem *Opus palatinum* bekannte Behandlungsweise und Nomenklatur der Sphärik nachgedacht hatte und sich in diesen Beziehungen nicht an Werners Einfluß gebunden fühlte. Vielmehr folgte Rheticus der von Coppernicus *(De revolutionibus* I, 14) erfundenen Methode, die offenbar nichts mit Werners Buch zu tun hatte.

3) Vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, S. 215—220.

beste in seiner Art; denn Naṣîr-Eddîn-Ṭûsis (1201—1274) Werk über das vollständige Viereck[1]) war ja in Europa ganz unbekannt; und Regiomontans Dreiecksbücher haben einmal eben in der Anlage und in der Systematik ihre schwache Seite, zweitens geben sie allerlei ganz nebensächliche Sätze nach älteren Werken recht kritiklos wieder[2]), während Werner unbeirrt bei der Hauptsache, d. h. der Dreiecksformeneinteilung und Dreiecksauflösung bleibt. Seit Naṣîr-Eddîn enthielt nicht, wie v. Braunmühl annehmen mußte[3]), das *Opus palatinum,* sondern Werners Sphärik (Buch I) die erste systematische Aufstellung der verschiedenen Dreiecksformen; und mit dem vollführten fünften Buch hätte sie sicher auch die vollständigste und wegen der Anwendung der Prosthaphärese jedenfalls die für praktische Zwecke am besten geeignete Theorie der Dreiecksberechnung abgegeben.

Dennoch muß man sagen, daß Werners Buch zu wenig und doch zu viel gibt. Letzteres konnte Rheticus nicht sehen, ersteres um so viel leichter. Ganz abgesehen von der Unfertigkeit des Werkes und von seinen direkt falschen Sätzen im ersten Buche, so hätte Rheticus, wenn nicht früher, so jedenfalls beim Durchlesen des Druckmanuskriptes oder bei der Korrektur des zum Druck beförderten Werkes klar einsehen müssen, daß es den Gelehrten noch bei weitem nicht dasjenige leistete, was es nach seinen eigenen in der Vorrede gesagten Worten leisten sollte: „Nostrum vero consilium fuit, ut eruditi, quibus tantum est otii, quo geometricum versent pulverem, habeant principio totius de sphaericis matheseos thesaurum in libris triangulorum. In subsequentibus vero de meteoroscopiis libris videant tanti thesauri usum, se in iis exerceant, et inde quicquid sphaericae considerationi dignum habeat coelum, mare, terra, naturae in his contentae depromant.“ Die ausgehobenen Worte paßten nicht auf den von Werner hinterlassenen Torso, sie bilden aber das Programm für Rheticus' Lebenswerk, das *Opus palatinum.* Wenn er schon im Jahre 1568 mitteilen kann, daß er ungefähr die Hälfte dieses Riesenwerkes fertig hat[4]), so wissen wir und verstehen auch, daß die Drucklegung von Werners Werken deshalb aufgegeben wurde, weil Rheticus deren auf Vollkommenheit angelegte, aber unvollführte Theorien zu einem vollendeten Standartwerk ausbilden wollte. Leider versah er sich auf das unpraktisch Theoretisierende in Werners Werk, schob der Einheitlichkeit wegen dessen praktische Methoden beiseite, und aus lauter Ängstlichkeit verfiel er — mit der Mangelhaftigkeit von Werners Buch als mahnendem Beispiel — auf die Weitläufigkeit, die sein Werk so unhandlich machte und seine Vollendung und Drucklegung derart verzögerte, daß es bei seinem Erscheinen im Jahre 1596 von Vietas Arbeiten überholt war.[5])

---

1) *Traité du quadrilatère, attribué à Nassiruddin-el-Toussy, traduit par Alexandre Pacha Carathéodory,* Constantinople 1891. Vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, S. 65—71. — Derselbe, *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan, Nova Acta, Abhandlungen der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher,* Bd. 71, Nr. 2, Halle 1897, S. 33 ff.

2) Vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen* I, S. 127—132. — Derselbe, *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan,* S. 58 ff., namentlich S. 65—66.

3) A. v. Braunmühl, *Vorlesungen* I, S. 218.

4) Ibid. S. 212. 5) Ibid. S. 213 und 220.

Das Druckmanuskript von Werners beiden Werken blieb natürlich in Rheticus' Besitz bis zu seinem Tod (1576) und ging dann ganz selbstverständlich mit seinen übrigen Nachlassenschaften an seinen Schüler und Mitarbeiter L. V. Otho über. Was aus dem Originalmanuskript geworden ist, wissen wir dagegen nicht. Sicher ist nur, daß entweder das eine oder das andere oder vielleicht beide nach Othos Tod mit dessen übrigem literarischen Nachlaß an den Heidelberger Professor Jakob Christmann (1554—1630) kam.[1]) Im Jahre 1611, als dessen Buch Theoria lunae[2]) erschien, konnte er nämlich die beiden Wernerschen Arbeiten zitieren. Ja er sagt sogar in diesem Buche mehrmals, daß er sie besitze, und sucht in aller Weise Werner zu verteidigen und seine Bedeutung hervorzuheben. S. 120 sagt er z. B.: „Sunt enim in manibus scripta Regiomontani, Werneri, Copernici[3]): ex quibus dicta nostra probari possunt." S. 123 verteidigt er ihn gegen Tycho Brahe (1546—1601): „Caeterum, quia mentionem Werneri fecimus, placet nunc integram historiam recensere, ut pateat, quomodo vir ille, omni laude dignissimus, Spicam virginis observaverit: sunt enim iniqui quidam censores, qui existimant, Wernerum casum observationis finxisse potius, quam revera cœlitus denotasse: inter quos principem locum obtinet Nobiliss. Tycho Brahe, ut videre licet ex eius I. lib. *progymnasmatum* pag. 220 etc.[4]) Et quia Wernerus in demonstratione usus est Prosthaphaeresi nova ac prorsus eadem, qua nunc multi, (sed incertis auctoribus) utuntur: idcirco eam per praecepta declarabo, et Wernero, tanquam genuino auctori, acceptam referam." Um nun in Einzelheiten nachzuweisen, wie Werner die prosthaphäretische Methode benutzte, zitiert er die oben (S. 155—156) erwähnte Dreiecksauflösung aus dem Sammelband vom Jahre 1522, und dann resumiert er S. 124: „Ex data igitur stellae latitudine et declinatione, sive ex datis tribus lateribus in triangulo globi obliquangulo, Wernerus quaesivit angulum crurum, id est, stellae longitudinem in zodiaco, sed per hypothesin Analemmatis. Usus etiam est peculiari prosthaphaeresi, cuius demonstrationem attulit in proprio opere de triangulis scripto, in quo etiam tres casus Prosthaphaeresium, per tres distinctas figuras explicavit, et nonnullis transscriptoribus occasionem praebuit, ut cum opus hoc lucem nondum viderit, sed manuscriptum duntaxat apud nos extet, inventionem Prosthaphaereseon sibi vendicaverint, eamque multis partibus amplificarint." Was Christmann erklärt, ist also die in den Sätzen IV, 2—5 des überlieferten Textes behandelte Aufgabe, wo in der Tat (vgl. IV, 5, coroll., S. 121) Winkel B des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks mit den bekannten Seiten a, b, c gefunden wird durch die Formel:

---

1) A. v. Braunmühl, *Vorlesungen* I, S. 136—137, 221 und 237.

2) Iacobus Christmannus, *Theoria lunae ex novis hypothesibus et observationibus demonstrata,* Heidelberg 1611.

3) Diese Zusammenstellung von den Namen: Regiomontanus, Wernerus und Copernicus treffen wir öfters im 16. Jahrhundert an. Vgl. z. B. Tychonis Brahei *et ad eum doctorum virorum epistolae ab anno 1588*, ed. F. R. Friis, Havniae (København) 1900—1907, S. 32—33.

4) Vgl. Tycho Brahe, *Astronomiae instauratae progymnasmata,* Uraniburgi-Pragæ 1602, S. 220 ff. — Vgl. Tycho Brahe, *Epistolarum astronomicarum libri,* Nürnberg 1601, S. 76.

$$\frac{\frac{1}{2}\{sin(90^0-a+c)-sin(90^0-c-a)\}}{sin(90^0-b)-sin(90^0-c-a)}=\frac{r}{sin\,vers(180^0-B)}.$$

Da $sin\,vers(180^0-B)=1+cos\,B$, so läßt diese Formel sich auch schreiben:

$$\frac{\frac{1}{2}\{cos(a-c)-cos(a+c)\}}{cos\,b-cos(a+c)}=\frac{r}{1+cos\,B}$$

und kommt unserer zweiten Hauptrelation, dem Cosinussatze

$$cos\,b=cos\,a\;cos\,c+sin\,a\;sin\,c\;cos\,B$$

gleich. Offenbar ist also $sin\,a\;sin\,c$ durch

$$\frac{1}{2}\{cos(a-c)-cos(a+c)\}$$

ersetzt, und gleichzeitig wird die durch die zweckmäßige Anwendung von *sin vers* entstandene Differenz $cos\,a\;cos\,c-sin\,a\;sin\,c$ durch $cos(a+c)$ ersetzt, wodurch sämtliche Multiplikationen und Divisionen mit Ausnahme einer einzigen beseitigt werden. Das Produkt $sin\,a\;sin\,c$ kommt bei Werner gar nicht vor, und die prosthaphäretische Formel

$$sin\,a\;sin\,c=\frac{1}{2}\{cos(a-c)-cos(a+c)\}$$

findet man somit erst implizite in der obigen Endformel. Daß die andere prosthaphäretische Formel

$$cos\,a\;cos\,c=\frac{1}{2}\{cos(a-c)+cos(a+c)\}$$

nicht bei Werner auftritt, kommt daher, daß er von trigonometrischen Funktionen nur *sin* und *sin vers* benutzt[1]), und also müssen bei ihm die beiden Formeln folgende Gestalt erhalten:

$$sin\,a\;sin\,c=\frac{1}{2}\{sin((90^0-a)+c)-sin((90^0-c)-a)\}$$

für $a+c<90^0$ und

$$sin\,a\;sin\,c=\frac{1}{2}\{sin((90^0-a)+c)+sin(a-(90^0-c))\}$$

für $a+c>90^0$.

Wenn Christmann nun, wie wir sahen, von „tres casus prosthaphaeresium" spricht, so braucht er deshalb keine andere Redaktion von Werners Text als die uns bekannte vor sich gehabt zu haben; denn für Werner ergeben sich eben wie für seine Nachfolger drei Fälle, die beiden obengenannten für $a+c<90^0$ (IV, 2 & 10) und $a+c>90^0$ (IV, 5 & 13) und ein Zwischenfall für $a+c=90^0$ (IV, 4 & 12), und diese drei Fälle müssen offenbar „per tres distinctas figuras" bewiesen werden[2]), ganz ab-

1) Daß Werner auch die Tangens-Funktion kannte, erhellt daraus, daß er eine *tabula foecunda* berechnet hatte; vgl. Werners Sammelband vom Jahre 1522, fol. n_2r: „At ex quadam tabula, quam ego ad imitationem tabulae foecundae Ioannis de Regio monte composui." Vgl. auch A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 133, Note 1.

2) Recht unwahrscheinlich, aber nicht ausgeschlossen ist es, daß Christmann an die drei Fälle denkt, die für $a+c>90^0$ entstehen, je nachdem $b \lesseqgtr 90^0$ ist, d. h. IV, 5^{1-2-3} oder IV, 13^{1-2-3}. Die Proportion, durch welche der Cosinussatz ersetzt wird, heißt hier für $b<90^0$:

gesehen davon, ob Christmann den figurenlosen Cod. Regin. 1259 oder Werners mit Figuren versehenes Originalmanuskript besaß. Es läßt sich also aus Christmanns obigem Zitat keine eingehendere Kenntnis der Wernerschen Arbeit herauslesen als gerade die, die wir durch den Cod. Regin. 1259 erhalten. Noch deutlicher erhellt dies daraus, daß bei Christmann S. 124—126 in direktem Anschluß an das Zitat zwei „Praecepta ex sententia Werneri" folgen, die mit Christmanns eigenen Worten, und zwar immer in Anknüpfung an die astronomischen Anwendungen, genaue Vorschriften geben, erstens über die Berechnung von B durch a, b und c (d. h. Cod. Regin. IV, 2, 4 & 5), zweitens über die von b durch B, a und c (d. h. Cod. Regin. IV, 10, 12 & 13).

Ob Christmann andere astronomische Arbeiten aus Werners Hand besaß als den Text *de meteoroscopiis* des Cod. Regin. 1259, wird erst ein Vergleich dieses Werkes mit Christmanns Zitat S. 169 entscheiden können. Da sagt er nämlich: „referam duas observationes, quas clarissimus mathematicus Iohannes Wernerus Norinbergae habuit anno Christi 1517, ut ex manuscriptis eius collegimus."

Wenn er ferner behauptet, daß gewisse Leute (transscriptores) die dem Werner gehörende prosthaphäretische Methode als eigene Erfindung ausgegeben haben, so müssen wir zunächst annehmen, daß Christmann hier wieder den Werner gegen Tycho Brahe verteidigen will; denn dieser und sein Schüler Paul Wittich (1555?—1587) wurden allgemein als die Erfinder der Methode betrachtet und waren vielleicht auch Wiedererfinder derselben.[1]) Jedenfalls kommt v. Braunmühl, der diese Wiedererfindung sehr genau erörtert[2]), zu folgendem Resultat: „Die Stelle, an welcher Werner mit Hinweis auf seine Dreiecksbücher die prosthaphäretische Methode anwendet, um die Länge der Spica virginis zu finden, kannte Tycho Brahe nachweisbar, denn er spricht oft von Werners Schrift *De motu octavae sphaerae*[3]) und greift speziell dessen Beobachtung der Spica an.

$$\frac{\frac{1}{2}\{\sin(90^0 - a + c) + \sin(a - (90^0 - c))\}}{\sin(90^0 - b) + \sin(a - (90^0 - c))} = \frac{r}{\sin vers(180^0 - B)},$$

wo das zweite Glied für $b = 90^0$ und $b > 90^0$ bzw. durch $\sin(a - (90^0 - c))$ und durch $\sin(a - (90^0 - c)) - \sin(b - 90^0)$ ersetzt wird. — In der gegenwärtigen Ausgabe werden diese drei Fälle in eine Figur vereinigt; es ist aber nicht ausgeschlossen, daß ursprünglich drei verschiedene Figuren da waren, oder aber, daß Christmann sich für jeden Fall eine Figur gedacht oder gezeichnet hat.

1) Christmann sagt nicht ausdrücklich, daß diejenigen, die die Erfindung für sich vindizieren, sie aus Werners Manuskript gestohlen haben. In dem Worte *transscriptores* liegt aber sicher eine Anklage.

2) A. v. Braunmühl, *Zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik,* Heft 9 (Cantor-Festschrift), Leipzig 1899, S. 15—29.

3) Aus dem oben zitierten (S. 162 u. 165) kürzlich publizierten Werk Tychonis Brahei *et ad eum doctorum virorum epistolae ab anno 1588*, ed. F. R. Friis, Havniae (Köbenhavn) 1900—1907, von dem die neun ersten Faszikeln erschienen sind, erhellt, daß Tycho Brahe sehr eifrig bemüht war, des Buches Werners *de motu octavae sphaerae,* d. h. seines Sammelbandes vom Jahre 1522, habhaft zu werden. Er kannte offenbar das Buch von seinen Reisen, konnte es aber nicht auftreiben. Endlich im Briefe vom 1./11. 1588 schreibt ihm Th. Hayck (Hagecius), daß das lange gesuchte Buch abgeschickt sei (S. 28). Die Sendung verzögerte

Doch konnte ihn der Wortlaut jener Stelle nur auf die Existenz eines praktischeren Rechnungsverfahrens, als das gewöhnliche ist, aufmerksam machen, das Verfahren selbst war absolut nicht daraus zu entnehmen. Dagegen ist es nicht unmöglich, daß Tycho in die Dreiecksbücher Werners direkt Einsicht bekam, als er 1575 Deutschland durchreiste und speziell in Wittenberg war. Denn dieselben waren ... an Rheticus gekommen, der längere Zeit in Wittenberg gelehrt hatte und in dessen Nachlasse (er starb 1576) sie sich noch fanden, als sie Christmann in Heidelberg erhielt. Doch abgesehen von dieser wohl kaum mehr beweisbaren Vermutung ist es sicher, daß Tycho im Verein mit Wittich schon 1580 die prosthaphäretische Methode ausarbeitete."[1])

---

sich aber (S. 65 und 71). Im Briefe vom 1./11. 1589 sagt Brahe: „diu multumque iste liber a me expetitus est, nec unquam antea nancisci licuit" (S. 88). Endlich am 25./1. 1590 quittiert er für den richtigen Empfang (S. 98). Zu der Zeit als Wittich und Brahe die prosthaphäretische Methode ausarbeiteten (1580), besaß letzterer also nicht Werners Buch. — Vgl. auch F. R. Friis, *Tychonis Brahei Epistolae* 1568—1587, Havniae (Köbenhavn) 1876—1886, S. 73, 87 und 96. — Ebenso A. Favaro, *Carteggio inedito di Ticone Brahe etc. con Magini,* Bologna 1886, S. 393.

1) Über die Frage von der Wiederauffindung der Prosthaphärese im Jahre 1580 in Uranienborg auf Hven finden sich Aufschlüsse in Tychonis Brahei *Epistolae ab anno 1588*, die jedoch nur dazu dienen, v. Braunmühls Resultat noch fester zu stellen. Von Interesse sind namentlich Brahes Briefe an Hayck vom 1./11. 1589 und 14./3. 1592. Im ersten klagt er den Dithmarschen Nicolai Reimers (d. h. Raymarus Ursus) an, die Prosthaphärese und andere Tychonischen Erfindungen gestohlen zu haben, und zwar während eines Besuches auf Hven im Jahre 1584. Heimlich kopierte er alles und gab es in seinem *Fundamentum astronomicum* (Straßburg 1588) als eigene Erfindung heraus. Dennoch beging er Fehler, aus welchen das Plagiat ersichtlich sei. Bemerkenswert ist, daß Brahe im zweiten Brief (S. 177—181), also fünf Jahre nach Wittichs Tod, diesem den ihm gebührenden Teil der Ehre für die Erfindung der Prosthaphärese gibt; aus Gellius Sascerides' Brief vom 1./2. 1591 an Magini muß man nämlich annehmen, daß er dies nicht immer getan habe; vgl. v. Braunmühl, l. c., S. 27. Brahe sagt S. 179: „Nam quantum triangulorum compendia attinet, jamdudum cum Witichio, quando hic aderat, libenter et liberaliter contuli, et quae tum ab illo, tum etiam a me hac in parte comperta fuerant, invicem communicavimus." Dann folgt eine neue Version der Anklage gegen Reimers, die mit dessen Erklärung besser übereinstimmt: „Ipse autem Witichius, postea in patriam rediens atque dehinc ad illustriss. principem Guilielmum Hassiae landgravium proficiscens, illicque aliquandiu commoratus, principis automatopaeo Justo Byrgio illiterato quidem sed admodum industrio artifici mechanico, omnia a nobis concinnata triangulorum mysteria reseravit ... Post discessum autem Witichii Ursus iste ... Cassellas etiam accurrit, hypotheses meas pro suis principi offert ... et ... a dicto Justo Byrgio triangulorum compendiosam demonstrationem atque in numeros [!] resolutionem, quam illi Witichius concesserat, obtinuit ... Quantum ad triangulos attinet, videbis suo loco in nonnullo aliquo tomorum meorum aliquot circa haec dogmata, quae meis studiosis jam ante plurimos annos praescripsi, ut faciliorem inde haberent calculi astronomici rationem. Cumque in singulis mensis musaei nostri horum descriptum intuitui patebat (ex quo quilibet ferme eorum peculiare ad manus habeat exemplar) facilimum fuit huic Urso tot dies subdolum parasitam agenti ista lambere, utut demonstrationes eorum geometricas hic vix acquirere potuerit, eas enim seorsim inter propria quaedam mea majoris momenti scripta conservaram, quas Cassellis a landgravii automatopaeo postea ea, qua dixi, occasione nactus est. Quin et multa alia habeo, ipsius propria manu scripta, quae hic clam descripsit atque una cum caeteris surripere animum induxerat." Demnach sollte Reimers also auf Hven die prosthaphäretischen Regeln ohne Beweise

Hierzu ist folgendes zu bemerken: Bis zum Jahre 1557 hatte Rheticus Werners Manuskript bei sich in Leipzig, Prag und zuletzt in Krakow. Nachdem er in diesem Jahre seine Vorrede zu den beiden Wernerschen Arbeiten hatte drucken lassen, beabsichtigte er, wie wir sahen, das Manuskript nach Deutschland zu schicken. Das wahrscheinlichste ist aber, daß er diese Absicht nie verwirklichte, sondern das Manuskript bei sich in Krakow behielt, um es bei der Ausarbeitung des *Opus palatinum* einsehen zu können. Dafür spricht besonders der Umstand, daß die Wernermanuskripte wie die übrigen Hinterlassenschaften des Rheticus schließlich an Christmann kamen. Daß Tycho Brahe die Arbeit Werners in Wittenberg kennen gelernt — sei es im Jahre 1575 oder in den Jahren 1566 oder 1568—1569, da er auch in Wittenberg war[1]) —, ist keineswegs unmöglich, aber dennoch nicht überaus wahrscheinlich; und diese Annahme wird durch die oben gegebenen Aufschlüsse über das Schicksal von Werners Hinterlassenschaft weit eher entkräftigt als bestätigt. Dazu kommt noch, daß die von Brahe und Wittich ausgearbeiteten prosthaphäretischen Formeln, die offenbar mit denen des Nicolai Reimers († 1599) in allen Einzelheiten identisch sind[2]), eigentlich keine Spuren davon aufweisen, daß sie dem Wernermanuskript entnommen seien. Denn Brahe und Wittich benutzten nicht *sin vers* und kamen deshalb nicht zu der einfacheren Wernerschen Gestalt des Cosinussatzes:

$$\frac{\frac{1}{2}\{\sin(90^0-a+c)-\sin(90^0-a-c)\}}{\sin(90^0-b)-\sin(90^0-a-c)}=\frac{r}{\sin vers\,(180^0-B)},$$

sondern zu der komplizierteren:

$$\frac{\frac{1}{2}\{\sin(90^0-a+c)-\sin(90^0-a-c)\}}{\sin(90^0-b)-\frac{1}{2}\{\sin(90^0-a+c)+\sin(90^0-a-c)\}}=\frac{r}{\sin(90^0-B)}.$$

Auf der anderen Seite benutzten sie die Prosthaphärese nicht nur zu den beiden Dreiecksauflösungen, die sie aus Werners Arbeit hätten kennen lernen, sondern auch zu einer anderen, die Werner ohne Anwendung der Prosthaphärese erledigt hatte.[3])

---

gestohlen haben, was ihm leicht war, weil diese Regeln sich überall in Uranienborg in solchen Abschriften fanden, die wir von Studničkas Faksimile (Tychonis Brahe *triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica,* Pragae 1886) kennen. Die geometrischen Beweise aber, die Tycho sorgsamer verwahrte, soll er erst später bei Bürgi in Kassel erhalten haben, wohin sie Wittich gebracht hatte. Auch in einem bisher ungedruckten Brief des Jahres 1588 (21./12.), auf den Hr. Unterbibliothekar Carl S. Petersen den Herausgeber aufmerksam machte (Cod. Breitenburgensis R 119, fol. 586—601), verbreitet Brahe sich über den Diebstahl des Reimers. — Wie es sich nun auch mit Reimers' Publikation verhält, so bezeugen Brahes Brief an Hayck vom 4./11. 1580 und Sascerides' Brief vom 6./8. 1590 an Magini jedenfalls Brahes und Wittichs Priorität.

1) Vgl. P. Gassendus, *Tychonis Brahei vita,* Parisiis 1654, S. 9—10, 13 u. 35—36. — F. R. Friis, *Tyge Brahe,* Kjöbenhavn 1871, S. 21 ff. — J. L. E. Dreyer, *Tycho Brahe,* Karlsruhe 1894, S. 23 ff.

2) Vgl. die letzte Figur in Studničkas Faksimile mit der Figur im Nicolai Raymari Ursi Dithmarsi *Fundamentum astronomicum,* Straßburg 1588, fol. 20v.

3) Vgl. in Studničkas Faksimile „Dogma VII Sphaericorum“— einen Winkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch die gegenüberliegende Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel zu finden — mit III, 48—53 der gegenwärtigen Ausgabe.

Obwohl also die Annahme, Tycho Brahe oder Wittich hätten Werners Dreiecksbücher in Wittenberg oder anderswo zu sehen bekommen, offenbar keine Wahrscheinlichkeit für sich hat, so ist es dennoch nicht ausgeschlossen, daß sie oder einer von ihnen eben in Wittenberg über den Inhalt der Dreiecksbücher gewisse Aufschlüsse haben erhalten können; denn in den Jahren 1571—1576 war Johann Richter oder, wie er allgemein genannt wird, Praetorius (1537—1616) Professor der höheren Mathematik an der Wittenberger Universität, und er kannte wenigstens in dem Jahre 1599 den Inhalt des vierten Buches von Werners Sphärik; da er nun im Jahre 1569 bei Rheticus in Krakow war und daselbst mit dessen Erlaubnis die Tafeln, die später im *Opus palatinum* erschienen, kopierte, so liegt die Annahme nahe, daß er gleichzeitig verschiedenes aus Werners Buch exzerpiert oder es wenigstens so genau eingesehen habe, daß er anderen von derjenigen Methode zur leichten Berechnung sphärischer Dreiecke, auf die Werner in seinen gedruckten Arbeiten immer anspielt, berichten konnte.

Praetorius sagt nämlich in direkter Anknüpfung an eine von ihm verfaßte, in Handschrift[1]) aufbewahrte vollständige Auflösung der rechtwinkligen und der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke in Tabellenform, wo sich gerade Werners prosthaphäretische Formulierung des Cosinussatzes — d. h. mit *sin vers* $(180^0—B)$ — findet: „Johan. Wernerus Norimbergensis, in suis IIII de triangulis libris ut plurimum occupatus fuit in demonstratione qualitatis arcus quaesiti vel anguli, quae comitatur qualitatem datorum. Eos libros Werneri Rheticus habuit, sed manuscriptos, necdum puto excusos. In quarto libro duos illos casus pertractat, quorum regulas proximis duabus paginis exposuimus, sed aliquanto prolixior est, opus enim habet duabus operationibus." Hinzuzufügen ist noch, daß die Handschrift vorn den Titel hat: „Georgii Joachimi Rhetici Canon Triangulorum. Johannes Praetorius Joachimicus Canonem hunc olim ab authore acceptum descripsit Cracoviae. Anno 1569. Idem denuo differentiis et sinu verso auctum, eundem depinxit Anno 1599 Mense Julio Altorfij."

Um das Jahr 1599, zu welcher Zeit die Handschrift geschrieben wurde, bemerkt Praetorius also, der schon seit lange verstorbene Rheticus habe vier handschriftliche Bücher von Werners Dreieckslehre gehabt, die jedoch seinem Wissen nach noch nicht gedruckt worden seien. Das weitere Schicksal des Werkes kennt er offenbar nicht, dennoch aber kennt er und referiert alles das, was in dem vierten Buche mit Hülfe der Prosthaphärese gefunden wurde.

Da Praetorius und Tycho Brahe sich kannten und auch miteinander in Briefwechsel standen,[2]) so ist es erlaubt, anzunehmen, daß Tycho

---

1) Cod. Monac. lat. 24 101. Siehe *Catalogus codd. latin. bibliothecae regiae Monacensis,* Tom. 2, Pars 4, S. 118. Vgl. M. Curtze, *Die abgekürzte Multiplication, Zeitschrift für Mathem. u. Phys.* **40**, Leipzig 1895, Hist.-liter. Abt. S. 7—13. — A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 136, Note 1.

2) Tychonis Brahei *Epistolae ab anno 1588,* ed. F. R. Friis, S. 82. Brief vom 1./11. 1589 an Hayck: „Praetorius . . . (ut ipsemet literis ad me non ita dudum perscriptis fatetur)." — Es scheint nicht, daß Brahe und Praetorius

Brahe, obwohl er kaum selbst die Dreiecksbücher Werners gesehen hat, dennoch von dem Inhalt des vierten Buches so viel wußte, daß er dadurch auf die richtige Spur zur Ausarbeitung der prosthaphäretischen Methode kam. Während Nicolai Reimers, der als der erste die Methode publizierte (1588), sie unzweifelhaft gestohlen hat, so kann man also mit Recht von einer Wiederauffindung der Methode durch Wittich und Brahe im Jahre 1580 reden.[1])

Das weitere Schicksal von Werners beiden Arbeiten können wir nicht genau verfolgen. Christmann behielt sie aller Wahrscheinlichkeit nach bis zu seinem im Jahre 1630 erfolgten Tod. Den nunmaligen Cod. Regin. 1259 hat die Königin Christina wohl kaum erhalten, bevor sie nach ihrer Abdankung (1654) ihr Reiseleben anfing. In dem dazwischen liegenden Zeitraum können wir also die Besitzer des Manuskriptes nicht angeben. Von Christinas Todesjahr an (1689) lag die Handschrift fast unbeachtet im Vatikan. Nur Bernhard Montfaucon (1655—1741) hat sie auf seiner Reise nach Italien 1698—1700 eingesehen und die Titel der beiden Werke in einer verkürzten und ungenauen Form abgeschrieben[2]); diese druckte dann Heilbronner im Jahre 1742 ab, ohne eine Ahnung davon zu haben, daß Montfaucons „Ioannis Vornerii Neuburgensis de Triangulis Sphaericis et Meteoroscopiis“ mit den beiden verschollenen Werken des ihm wohlbekannten Ioannes Wernerus Norimbergensis identisch seien.[3])

Das Schicksal von Werners Dreiecksbüchern ist ein recht trauriges. Wäre das Werk nur im Jahre 1557 gedruckt worden, wenn auch in seiner unvollendeten Gestalt, so wäre es doch zu rechter Zeit gekommen und hätte trotz Fehler und Mängel seinem Autor Ruhm und Ehre gebracht. Dann wäre das Schicksal dieses Werkes dasselbe wie das von Regiomontans Dreiecksbüchern geworden.

Überhaupt findet man eine sonderbare Ähnlichkeit, wenn man das Geschick vergleicht, das diesen beiden Arbeiten begegnete. Regiomontan (1436—1476) hinterließ wie Werner sein Werk in unvollendeter Gestalt. Wie Werner hatte er die Rückweise auf seine eigenen Sätze nicht in Ordnung gebracht. Die vier ersten Bücher hatte er kaum fertig redigiert;

einander im Jahre 1575 in Wittenberg trafen, wenn man nach Brahes Äußerungen urteilen soll. Siehe Tycho Brahe, *Astronomiae instauratae progymnasmata,* Uraniburgi-Pragae 1602, S. 636ff.

1) Aus S. 46, 66, 90, 116 und 152 derselben Publikation geht hervor, daß Tycho Brahe sehr eifrig bemüht war, die Hinterlassenschaften des Paul Wittich zu erhalten, und zwar hebt er besonders hervor: *„Copernicum ejus et quae de triangulis conscripsit“* (S. 90). Auch der Hinterlassenschaft Rheticus' sucht er habhaft zu werden (S. 152). Vielleicht hoffte er in den Manuskripten der beiden Forscher Material zu der von ihm (vgl S. 168, Note 1 oben) beabsichtigten Publikation über die Dreiecksauflösungen zu finden.

2) Bernardus de Montfaucon, *Bibliotheca Bibliothecarum manuscriptorum nova* I, Parisiis 1739, S. 38, d. h. Bibliotheca Reginae Sveciae 1157.

3) Heilbronner, *Historia matheseos universae,* Lipsiae 1742. Vgl. S. 513—514 mit S. 543 und im Index III „Vornerius“ mit „Wernerus“.

das fünfte lag nur in Materie vor.[1]) Ebenso verhielt es sich mit Werners Arbeit: druckfertig war nichts davon; Buch II und III waren ihrer Vollendung am nächsten, Buch I weniger durchgearbeitet und Buch IV offenbar nur skizzenmäßig entworfen und dessen Sätze weder in Form noch in Inhalt fertig. Die beiden ersten Sätze (IV, 1—2), wo die prosthaphäretische Methode begründet wird, tragen deshalb auch deutlich das Gepräge einer Unbeholfenheit und Unvollständigkeit, die während des Vorschreitens des Buches sich allmählich verlieren.

Recht sonderbar ist es, daß Werner, der sonst gern seine Quellen zitiert und in der Sphärik außer Euklid, Theodosios, Menelaos und Geber auch Georg v. Peurbach nennt, mit keiner Silbe die Dreiecksbücher des Regiomontan erwähnt, obgleich er den Regiomontan in seiner Publikation vom Jahre 1514 zitiert und offenbar auch seine Dreiecksbücher kennt. In einem daselbst abgedruckten Brief an den Kardinal Matthäus Lang aus dem Jahre 1513 erzählt er selbst von dem Schicksale des Werkes.[2]) Er möchte nicht, sagt er, aus seinen Bemühungen dasselbe Resultat er-

---

1) Siehe A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 130. — Derselbe, *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan, Nova Acta, Abhandl. der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher,* Bd. 71, Nr. 2, Halle 1897, S. 54 und 64. — Vgl. auch Schöners Vorrede zu der Editio princeps von Regiomontans Werk: Ioannes de Regio Monte, *De Triangulis omnimodis libri quinque*, Nürnberg 1533.

2) Werners Sammelband vom Jahre 1514, fol. i_1v: „ne idem lucubrationibus forte meis accidere posset, quod Ioannis de Regiomonte opusculis video contigisse. Hic relictae a se chartaceae suppellectilis accipere successorem meruit virum quendam latine graeceque iuxta eruditum, sed dum in humanis ageret, melancolico usque adeo spiritu circumsessum, ut libros eiusdem Ioannis et opera non solum nemini communicaret, verum suis arcis et pluteis arctissime clausos custoditosque, ne conspici quidem permitteret. Idem ante decennium vita functus eandem librorum operumque possessionem suis commendavit fidei commissariis et tutoribus litterarum omnium certe expertibus, hi sive pestilenti invidiae lue, sive nimia ducti cupiditate, quod eadem opera et libros sperarent magno distrahi posse pretio, suis abditissimis reconditos scriniis demoliendi teredinibus blaptisque haud minimum profecto compararunt laborem. Et quod absque ingenti mentis angore reminisci dicereque nequeo; eximia quaedam et astronomica organa, quae ipse Ioannes de Regiomonte magnis sumptibus immensoque labore ex aurichaleo suis elaboravit fabrefecitque manibus, prohdolor malleis contusa pro aere vendita fuere caldario. Nemo igitur erit omnium, qui cum hanc vel audiverit aut legerit litterarum studiorumque iacturam, non vehementer doleat. Id tamen nos tum maxime consolari quibit, quod idem Ioannes de Regiomonte lucubrationes suas, quarum editionem indice in publicis gymnasiis ac palestris litterariis emisso fuerat pollicitus, semiplenas mutilasque reliquit, praesertim geographiae Cl. Ptole[maei] novam interpretationem atque eiusdem geographiae primi libri commentationem, quam ego ex integro componens, uti praefatus fueram, complevi edidique. Denique libros quinque de sphaericis omnimodisque triangulis a se tumultuarie nulloque recto ordine servato, velut in prima rerum inventione fieri solet, perscriptos, constat morte praeventum imperfectos reliquisse, neque aliis plerisque opusculis a se inchoatis ob immaturum sui obitum ultimam imposuisse manum, uti ex eorundem inventario apertius licet cernere, quae si imperfecta ac mutila in publicum nunc proferantur nescio, an studiosis forte magis obesse possent quam prodesse." — Diese Worte werfen auch Licht über Werners Ptolemaiosübersetzung und Ptolemaioskommentar, deren Grundlage hinterlassene Manuskripte des Regiomontan bildeten.

langen wie Regiomontan, dessen hinterlassene Arbeiten nicht in den Besitz eines klassisch gebildeten Mannes kamen, sondern in die Hände eines Sonderlings, der, solange er lebte, den Nachlaß ängstlich verschlossen hielt. Diese Worte sind auf Regiomontans Gönner, den Nürnberger Patrizier Bernhard Walther (1430—1504) gemünzt. Nach dessen Tod aber, fährt Werner fort, wurde der kostbare Nachlaß, Handschriften sowie Instrumente, verkauft und zerstreut. Der einzige Trost ist, daß mehrere der hinterlassenen Werke, darunter auch die Dreiecksbücher, unvollendet und verstümmelt waren, einige von ihnen in solchem Umfange, daß sie den Studierenden etwa mehr Schaden als Nutzen bringen würden, wenn sie in dieser Gestalt herausgegeben worden wären.

Vor dem Jahre 1504 hat Werner also sicher keine Gelegenheit gehabt, die Hinterlassenschaften des Regiomontan einzusehen; und wie sehr er sich darüber geärgert hat, spüren wir noch in den zitierten Worten. Für Werner, der in erster Reihe Astronom und Geograph war und alltäglich mit Problemen der sphärischen Astronomie und der physischen Geographie arbeitete, die er ohne eine sphärische Trigonometrie nicht lösen konnte, war es in der Tat ärgerlich, daß das einzige Werk dieser Art in derselben Stadt verschlossen lag, wo er, der sich als geistiger Erbe des Regiomontan fühlte, wohnte.

Nach dem Jahre 1504 wurden die Dreiecksbücher des Regiomontan ihm aber zugänglich; und aus Johann Schöners (1477—1547) Vorrede[1]) zu der ersten Ausgabe derselben wissen wir, daß Willibald Pirckheimer, der Werners Freund und bester Gönner war, sie nach Walthers Tod kaufte, vielleicht — wagen wir zu erraten — um sie dem Werner zur Verfügung zu stellen.

Da Werners Sphärik nach dem Jahre 1505 (vgl. S. 134 & 157) redigiert ist, so müssen wir also annehmen, daß er bei deren Ausarbeitung Gelegenheit gehabt hat, das Werk des Regiomontan nach Belieben zu benutzen; ja wir sind zu der Annahme geneigt, daß eben die Kenntnis dieses Werkes ihn veranlaßte, seine Sphärik zu schreiben; denn in Werners oben zitierten Worten spüren wir nur allzu deutlich, daß Regiomontans Dreiecksbücher, als er sie endlich zu sehen bekam, ihn täuschten. Ihren Hauptinhalt kannte er schon aus den Werken Menelaos', Ptolemaios', Gebers und aus dem Kommentar zu Ptolemaios' Syntaxis, den Georg v. Peurbach und Regiomontan geschrieben hatten.[2]) Auch fand er in dem Werke lange nicht diejenigen praktischen Berechnungsmethoden, für die er Gebrauch hatte. Zudem war das Werk ebenso unmethodisch und ungeordnet als unvollständig.

Unter diesen Umständen versteht man recht wohl, daß Werner beschloß, die Sache besser zu machen, und zwar die Lehre von den Kugel-

---

1) Vgl. oben S. 172, Note 1.

2) Vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 124ff. — Derselbe, *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan, Nova Acta, Abhandl. der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher,* Bd. 71, Nr. 2, Halle 1897, S. 58—61 und 65. Hier wird zuerst Regiomontans Abhängigkeit von Menelaos, Al-Bâttani und Geber nachgewiesen, und durch Vergleich mit Naṣîr-Eddîn-Ṭûsi wird Regiomontan auf den rechten Platz gestellt.

dreiecken ganz neu aufzubauen, statt das Werk seines großen Vorgängers zu verbessern. Wenn er dadurch etwa die Drucklegung von Regiomontans Werk verzögert hat, so hat ihn allerdings eine schwere Nemesis getroffen.

Ist diese Auffassung die richtige, so ist es begreiflich, daß man in Werners Buch nirgends sichere Spuren eines Quellenzusammenhanges mit dem des Regiomontan entdecken kann, wenn auch die Nomenklatur und Ausdrucksweise, die Anwendung von *sin* und *sin vers* mit Auslassung der anderen trigonometrischen Funktionen uns ahnen lassen, daß Regiomontan den Werner mehr beeinflußte, als dieser selbst wünschte. Wenn es sich so verhält, verstehen wir auch, daß Werners zweites und drittes Buch, die er nach den Anzeichen des überlieferten Textes zuerst ausgearbeitet hat (vgl. S. 144), am meisten an Regiomontan erinnern und nirgends wirkliche Neubildungen über dessen Werk hinaus aufweisen; nur in der Systematik, in der Ausscheidung aller Spezialfälle leisten sie etwas Neues, wenn auch lange nichts vollständiges.

Bei der Ausarbeitung dieser beiden Bücher (II und III) muß Werner aber eingesehen haben, daß er, um die Spezialfälle der Dreiecksauflösungen richtig zu unterscheiden, gezwungen war, die Einteilungsprinzipien der verschiedenen Dreiecksformen festzustellen und die Formen klarzulegen; und so entstand denn sein erstes Buch, das trotz allen Fehlern und Mängeln eine wirkliche Neubildung war.

Obgleich nun Werner so selbständig arbeitete, daß seine Abhängigkeit von Regiomontan schwer nachzuweisen ist, so ist dennoch die Vermutung erlaubt, daß Werners Dreiecksbücher früher von denen des Vorgängers mehr abhängig waren, als wir es dem überlieferten Texte ansehen können, daß Werner aber in seinem Werke wissentlich alles tilgte, was dem Regiomontan direkt entlehnt war. Im Sammelband vom Jahre 1514 findet sich nämlich, wie wir oben (S. 154) sahen, eine Stelle, wo Werner sagt, daß er den nachfolgenden Beweis dem *dritten* Buche seiner Sphärik entlehnt habe (mutuatus fui). Der betreffende Satz — einen Winkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch die drei Seiten zu finden — befand sich jedoch, wie wir sahen, nicht im dritten, sondern im vierten Buch, aber mit einem anderen Beweis als dem im Sammelband angeführten. Was aber letzteren betrifft, so macht v. Braunmühl darauf aufmerksam, daß er mit Satz 34 in Regiomontans viertem Buch identisch ist.[1]) Es liegt also die Annahme nahe, Werner habe ursprünglich den Beweis des Regiomontan benutzt und ihn im dritten Buch angebracht, später aber einen neuen Beweis gefunden und den Satz nach Buch IV disloziert.

Diese Annahme wird uns sofort glaubwürdiger, wenn wir beachten, daß der neue Beweis oder vielmehr die neue Dreiecksauflösung in der Aufstellung des prosthaphäretisch gebildeten Cosinussatzes besteht; denn die natürliche Entwickelung ist eben die, daß Werner ursprünglich sämtliche Auflösungen des schiefwinkligen Dreiecks in einem Buche (Buch III) sammelte und die Beweise des Regiomontan benutzte, d. h. soweit möglich mit Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke operierte, und in dem

1) A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 129 und 135.

einen Fall, wo die Zerlegung nicht zum Ziele führte, dem Vorgänger folgte. Erst später folgte dann die Entdeckung, daß eben dieser Fall sich viel leichter lösen läßt durch den von Regiomontan nach Al-Bâttani aufgestellten Cosinussatz (Satz V, 2), und noch später erfolgt die Umbildung dieses Satzes, welche die eben bei diesem Falle früher recht schwerfällige Berechnung so geschickt erleichterte, d. h. die Erfindung der Prosthaphärese. Und nun kommt es ganz natürlich, daß Werner vorläufig das dritte Buch unverändert läßt und es zitiert, indem er doch immer hinzufügt, er habe eine neue, leichte Berechnungsmethode erfunden, und gleichzeitig kümmert er sich weniger um die drei ersten Bücher, sucht aber auf alle Weise die Anwendung der neuen Methode auf mehrere Fälle auszudehnen, um auf diese Weise Material zu zwei neuen Büchern (Buch IV und V) zu erhalten.

Gelegentlich hat er dann den Schluß des dritten Buches, der zu viel an Regiomontan erinnerte, gestrichen, d. h. in erster Reihe den erwähnten Fall mit dessen für die Berechnung wenig geeignetem Beweis, dann aber auch den umgekehrten — eine Seite durch die drei Winkel zu finden —, der zwar durch Zerlegung in zwei rechtwinklige Dreiecke, aber nicht durch die Grundformeln derselben, sondern durch einen speziellen Satz gelöst wurde.[1]) Dieser Satz fehlt nämlich vollständig in dem überlieferten Wernertext, und selbstverständlich ist es niemals Werners Absicht gewesen, den einen Fall der schiefwinkligen Dreiecke ungelöst zu lassen; vielmehr gehörte dieser Satz zum Bereich des verschollenen oder nie redigierten fünften Buches, wo er etwa prosthaphäretisch wie Dogma VII in Tycho Brahes handschriftlicher *Triangulorum planorum et sphaericorum Praxis Arithmetica* gelöst werden sollte.[2])

Durch dies Gemisch von Dislokationen und Unvollendetheit, das den Text entstellt, erklärt sich auch der Umstand, daß der eine Fall der Auflösung schiefwinkliger Dreiecke — eine Seite durch den gegenüberliegenden Winkel und die beiden anderen Seiten zu finden — zweimal vorkommt. Einmal wird dieser Fall nämlich im dritten Buche, Satz 1—10 durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke gelöst, zweitens aber prosthaphäretisch durch den Cosinussatz im vierten Buch, Satz 10—17. Das er die Dubletsätze III, 1—10 nicht gestrichen hat, kommt einfach daher, daß er dann das ganze dritte Buch hätte umarbeiten müssen. Jedoch hat er sicher daran gedacht, sie vor der Drucklegung des Textes zu streichen.

Ist diese ganze Betrachtungsweise der stufenweisen Entstehung von Werners Buch die richtige, so hat der Vergleich mit Regiomontans Dreiecksbüchern uns so weit geholfen, daß die Textgeschichte, wenn nicht in jeder Einzelheit, so doch in den Hauptzügen recht klar daliegt.

---

1) Vgl. Regiomontan, Buch IV, Satz 33. Siehe A. v. Braunmühl, *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan, Nova Acta, Abhandl. der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher*, Bd. 71, Nr. 2, Halle 1897, S. 62.

2) Vgl. Studničkas Faksimile, Pragae 1886. Vgl. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900, S. 181, 192 und 201. — Vgl. damit H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert,* Leipzig 1903, S. 114.

5. Übersicht des Textinhaltes.

In der nachfolgenden Tabelle über die Sätze in Werners *de triangulis sphaericis* ist:

C = Coppernicus, *De revolutionibus orbium coelestium,* Nürnberg 1543.

E = *Epytoma in Almagestum Ptolemaei,* Venedig 1496; vgl. S. 134.

G = Geber filius Affla, *De astronomia libri IX,* Nürnberg 1534; vgl. S. 134.

M = Menelaus, *Sphaerica,* Oxford 1758; vgl. S. 134—135.

N = Nassiruddin-el-Toussy, *Traité du quadrilatère,* Constantinople 1891.

O = Georgius Ioachimus Rheticus & L. Valentinus Otho, *Opus palatinum de triangulis,* Neustadt 1596. [Pars II:] *De triangulis globi.*

P = Ptolemaeus, *Syntaxis mathematica,* Leipzig 1898—1903.

R = Ioannes de Regio Monte, *De triangulis omnimodis libri 5,* Nürnberg 1533.

T = Tycho Brahe, *Triangulorum planorum et sphaericorum praxis arithmetica,* Prag 1886.

U = Nicolaus Raymarus Ursus, *Fundamentum astronomicum,* Straßburg 1588.

[] = wird von Werner nicht bewiesen oder nicht ausdrücklich gesagt.

() = implizite, d. h. nicht als Satz formuliert.

Die Verteilung der Figurenbuchstaben ist der Übersichtlichkeit wegen in der Tabelle einheitlich gemacht, so daß die Figurenbuchstaben der letzteren die des Textes nicht genau wiedergeben.

Buch I.

Diskussion des sphärischen Dreiecks.

(ABC sphärisches Dreieck mit Seiten a, b, c.)

Satz.	Wenn	so ist	Vgl.
1	$B = C = 90^0$	$b = c = 90^0$	GI, 11[1,8]. NV, III, II-III inv. & β-γ. RIV, 3[1,4] & 6[1]. OIII, 1.
2[1])	$B = b = 90^0 \quad c < 90^0$	$A = a = 90^0$	GI, 11[11,14]. RIV, 5[1] & 7[1]. OIII, 13 & 38—39.
4	$b = c < 90^0$	$B = C < 90^0$	MI, 2 RIV, 10 inv. CI 14, IX. OIII, lemma III.
5	$b = c > 90^0$	$B = C > 90^0$	MI, 2. RIV, 11 inv. CI, 14, IX. OIII, lemma III.
3	$A = 90^0 \quad b < 90^0 \quad c < 90^0$	$a < 90^0 \quad B < 90^0 \quad C < 90^0$	MI, 21. GI, 11[5]. NV, III, IV, lemma. RIV, 4[3]. OIII, lemma I & 34.
6[1])	$A = 90^0 \quad b = 90^0 \quad c \lesseqgtr 90^0$	$a = 90^0 \quad B = 90^0 \quad C \lesseqgtr 90^0$	GI, 11[1—3]. OIII, 32.
7	$A = 90^0 \quad b > 90^0 \quad c < 90^0$	$a > 90^0 \quad B > 90^0 \quad C < 90^0$	GI, 11[7]. RIV, 4[4]. OIII, 36.
8	$A = 90^0 \quad b > 90^0 \quad c = 90^0$	$a = 90^0 \quad B > 90^0 \quad C = 90^0$	OIII, 33.
9	$A = 90^0 \quad b > 90^0 \quad c > 90^0$	$a < 90^0 \quad B > 90^0 \quad C > 90^0$	GI, 11[6]. RIV, 4[2]. OIII, 35.
10	$A < 90^0 \quad b < 90^0 \quad c < 90^0$	$a < 90^0 \quad B \gtreqless 90^0 \quad C \left[\gtreqless\right] 90^0$	NV, III, IV lemma. OIII, 46.
11	$A < 90^0 \quad b = 90^0 \quad c < 90^0$	$a < 90^0 \quad B > 90^0 \quad C < 90^0$	OIII, 44
12	$A < 90^0 \quad b > 90^0 \quad c < 90^0$	$a \left[\gtreqless\right] 90^0 \quad B > 90^0 \quad C < 90^0$	OIII, 48.
13	$A < 90^0 \quad b > 90^0 \quad c = 90^0$	$a < 90^0 \quad B > 90^0 \quad C < 90^0$	OIII, 45.
14	$A > 90^0 \quad b < 90^0 \quad c < 90^0$	$a \left[\gtreqless\right] 90^0 \quad B < 90^0 \quad C < 90^0$	MI, 21. OIII, 58.
15	$A > 90^0 \quad b = 90^0 \quad c < 90^0$	$a > 90^0 \quad B < 90^0 \quad C < 90^0$	OIII, 56.
16[2])	$A > 90^0 \quad b > 90^0 \quad c < 90^0$	$a > 90^0 \quad B \gtreqless 90^0 \quad C \gtreqless 90^0$	OIII, 60.
17	$A > 90^0 \quad b > 90^0 \quad c = 90^0$	$a > 90^0 \quad B > 90^0 \quad C > 90^0$	OIII, 57.
18	$A > 90^0 \quad b > 90^0 \quad c > 90^0$	$a \left[\gtreqless\right] 90^0 \quad B > 90^0 \quad C > 90^0$	OIII, 59.
19-20[3])	Konstruktive Hülfsätze.		
21	$B = 90^0 \quad c < 90^0 \quad b < 90^0$	$a < 90^0 \quad A < 90^0 \quad C < 90^0$	MI, 22. GI, 11[12,15]. RIV, 5[2] & 7[2]. OIII, 40.
22[4])	$B = 90^0 \quad c < 90^0 \quad b > 90^0$	$a > 90^0 \quad A > 90^0 \quad C < 90^0$	GI, 11[13,16]. RIV, 5[3] & 7[3]. OIII, 42.
23[1])	$B = 90^0 \quad c = 90^0$	$b = 90^0$	GI, 11[4]. RIV, 4[1].
24[2])	$B < 90^0 \quad c < 90^0 \quad b < 90^0$	$a \gtreqless 90^0 \quad A \gtreqless 90^0 \quad C \gtreqless 90^0$	OIII, 52.
25[4])	$B < 90^0 \quad c = 90^0 \quad b < 90^0$	$a \gtreqless 90^0 \quad A \left[\gtreqless\right] 90^0 \quad C \gtreqless 90^0$	OIII, 50.
26[4])	$B < 90^0 \quad c > 90^0 \quad b < 90^0$	$a \gtreqless 90^0 \quad A \left[\gtreqless\right] 90^0 \quad C \gtreqless 90^0$	OIII, 54.
27[4])	$B < 90^0 \quad c > 90^0 \quad b = 90^0$	$a < 90^0 \quad A < 90^0 \quad C > 90^0$	OIII, 51.
28[3])	$B < 90^0 \quad c > 90^0 \quad b > 90^0$	$a \gtreqless 90^0 \quad A \left[\gtreqless\right] 90^0 \quad C \gtreqless 90^0$	OIII, 53.

Satz.	Wenn			so ist			Vgl.
29		$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	M I, 22. O III, 64.
30[4])		$<$	$=$	$<$	$<$	$<$	O III, 62.
31[3])	$B>90^0$	$c<90^0$	$b>90^0$	$a\gtreqless 90^0$	$A[\gtreqless]90^0$	$C<90^0$	O III, 66.
32[4])		$=$	$>$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	O III, 63.
33		$>$	$>$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	O III, 65.
34		$=$	$<$	$<$	$<$	$<$	G I, 11^3. R IV, $3^{3,6}$. O III, 71.
35		$=$	$>$	$<$	$>$	$>$	G I, 11^2. R IV, $3^{2,5}$. O III, 74.
36	$a<90^0$	$B<90^0$	$C<90^0$	$A\gtreqless 90^0$	$b<90^0$	$c<90^0$	O III, 77.
37		$>$	$>$	$\gtreqless$	$>$	$>$	O III, 83.
38[3])		$>$	$<$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	O III, 80.
39		$=$	$<$	$=$	$=$	$<$	G I, 11^3. R IV, $3^{3,6}$. O III, 70.
40		$=$	$>$	$=$	$=$	$>$	G I, 11^2. R IV, $3^{2,5}$. O III, 73
	$a=90^0$	$B\ \ 90^0$	$C\ \ 90^0$	$A\ \ 90^0$	$b\ \ 90^0$	$c\ \ 90^0$	
41		$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	O III, 76.
42		$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	O III, 82.
43		$=$	$<$	$>$	$>$	$<$	G I, 11^3. R IV, $3^{3,6}$. O III, 72.
44		$=$	$>$	$>$	$<$	$>$	G I, 11^2. R IV, $3^{2,5}$. O III, 75.
	$a>90^0$	$B\ \ 90^0$	$C\ \ 90^0$	$A\ \ 90^0$	$b\ \ 90^0$	$c\ \ 90^0$	
45[3])		$<$	$<$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	O III, 78.
46[3])		$>$	$>$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	O III, 84.
47			$<$	$<$	$<$	$<$	G I, $11^{12,15}$. R IV, 5^2 & 7^2. O III, 88
	$B=90^0$	$C<90^0$	$b\ \ 90^0$	$a\ \ 90^0$	$A\ \ 90^0$	$c\ \ 90^0$	
50			$>$	$>$	$>$	$<$	G I, $11^{13,16}$. R IV, 5^3 & 7^3. O III, 89.
48			$<$	$a\gtreqless 90^0$	$A\gtreqless 90^0$	$c\gtreqless 90^0$	O III, 94.
49[1])	$B<90^0$	$C=90^0$	$b=90^0$	existieren nicht			G I, 11^3. R IV, $3^{3,6}$. O III, 93.
51[1])			$>$	existieren nicht			G I, 11^3. R IV, $3^{3,6}$. O III, 95.
52[2])			$<$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	O III, 99
53	$B<90^0$	$C<90^0$	$b=90^0$	$a>90^0$	$A>90^0$	$c<90^0$	R IV, 14 O III, 98.
54			$>$	$>$	$>$	$<$	R IV, 14. O III, 100.
55[3])			$<$	existiert nicht			R IV, 13. O III, 108.
56	$B>90^0$	$C>90^0$	$b=90^0$	$a>90^0$	$A>90^0$	$c>90^0$	O III, 107.
57			$>$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	O III, 109.

Satz	Wenn			so ist			Vgl.
58[3])	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$\gtreqless$	N V, III, VII. R IV, 9 inv. O III, 116.
59	$<$	$<$	$=$	$<$	$<$	$>$	N V, III, IV. O III, 113.
60	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$>$	N V, III, IX. O III, 117.
61	$a<90^0$	$b=90^0$	$c>90^0$	$A<90^0$	$B<90^0$	$C>90^0$	N V, III, VI. O III, 115.
62	$<$	$>$	$>$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	$\gtreqless$	N V, III, VIII. O III, 118.
63	$=$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	N V, III, V. O III, 114.
67	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	N V, III, X. O III, 119.
64		$<$			$<$		
65	$a=b=c=90^0$			$A=B=C=90^0$			N V, III, I & α inv. O III, 110.
66		$>$			$>$		
68	$B<90^0$	$C>90^0$	$b<90^0$	$a \gtreqless 90^0$	$A \gtreqless 90^0$	$c \gtreqless 90^0$	O III, 105.

1) Nicht genau so formuliert, wie es die Tafel zeigt.
2) Mehr spezialisiert als in der Tafel.
3) Satz oder Beweis falsch.
4) Zweideutig abgefaßt.

Buch II.

1. Allgemeiner Teil.

Die sphärisch-trigonometrischen Grundformeln.

Satz	sagt	Vgl.
1	Wenn $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}$, so ist $\frac{A}{B}=\frac{C\cdot E}{D\cdot F}$ (Hülfsatz)	
2	Wenn $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\cdot\frac{E}{F}$, so ist $\frac{D\cdot A}{C\cdot B}=\frac{E}{F}$ und $\frac{F\cdot A}{B\cdot E}=\frac{C}{D}$ (Hülfsatz)	
3	$sin\,AB=sin\,BC$, wenn $AB+BC=180^0$, d. h. $sin(180^0-a)=sin\,a$	(M) (P) (E) (R) (N). U III, 13.
4—5	Menelaos' Satz (Transversalensatz) in der Ebene, 2 Fälle	P I, 13. N II. E I, 9—10.
6—7	Hülfsätze zu Menelaos' Satz auf der Kugel	P I, 13. N III, I, I. E I, 11—14.
8—9	Menelaos' Satz (Transversalensatz) auf der Kugel, 2 Fälle	M III, 1. P I, 13. N IV, II—III. E I, 15—16.
10	Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ $A=A_1$ und $C=C_1$ oder $C+C_1=180^0$, so ist $\frac{sin\,c}{sin\,a}=\frac{sin\,c_1}{sin\,a_1}$	M III, 2.

Satz.	In dem bei C rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c ist:	Vgl.
11	$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin tot}{\sin A}$ d. h. Grundformel I, Ersatztheorem (regula 4 quantitatum)	(M). G I, 12—13. N V,V, 139—155. E I, 18[6]. R IV, 15—16. C I, 14, III. O I, 16, 21—23 & 39.
12	$\frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\sin(90^0-a)}{\sin(90^0-A)}$	(M). N V,V, 161—162. E II, 33. O I, 18 & 20.
13	$\frac{\sin(90^0-a)}{\sin(90^0-c)} = \frac{\sin tot}{\sin(90^0-b)}$ d. h. Grundformel III	(M). G I, 15. N V,V, 158—159. E I, 19, coroll. & II, 1. R IV, 19. O, I, 28.
14	$\frac{\sin(90^0-a)}{\sin(90^0-A)} = \frac{\sin tot}{\sin B}$ d. h. Grundformel V	(M). G I, 14. N V, V, 159—160. R IV, 18 & V, 14. O I, 24—25.
15	Wenn $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, so ist $\frac{B \cdot C}{A} = D$ (Hülfsatz)	R I, 19.
16	Wenn $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$, so ist $\frac{B^2}{A} = C$ (Hülfsatz)	

Es fehlen also die Grundformeln II, IV, VI des rechtwinkligen Dreiecks und alle Grundformeln des schiefwinkligen, darunter der Sinussatz (N V, V, p. 155—158. R IV, 7). Der Cosinussatz folgt in Buch IV.

2. Spezieller Teil.

Die Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

(ABC rechtwinkliges [$C = 90^0$] sphärisches Dreieck mit Seiten a, b, c)

Satz.	Gegeben	zu finden	durch	Vgl.
17 1)	A, c	a	II, 11	N V, VII, IV[1,2]. R IV, 27[2]. C I, 14, IV[7]. T IV U III, IV, V. O II, I & IV, I—III.
18	a, c	A	II, 11	N V, VII, I[1,2]. R IV, 25[2]. T II. U III, IV, III. O II, IV & IV, X—XII.
19 1)	A, b	B	II, 17	N V, VII, V[1,2]. R IV, 27[3]. C I, 14, IV[1]. T III. U III, IV, VI. O II, III & IV, VII—IX.
20	a, c	b	II, 13	N V, VII, I[1,2]. R IV, 25[1]. [T I?] U III, IV, III. O II, IV & IV, X—XII.
21	a, c	B	II, 20 & 18	N V, VII, I[1,2]. R IV, 25[2]. T II. U III, IV, III. O II, IV & IV, X—XII.
22	a, b	c	II, 11	N V, VII, II[1,2]. R IV, 25[1]. T I. U III, IV, II. O II, V & IV, XIII—XIV.
23 1)	A, b	c	II, 14 & 11	N V, VII, V[1,2]. R IV, 27[3]. C I, 14, IV[2]. T III-V. U III, IV, VI. O II, III & IV, VII—IX.
24	A, a	b	II, 11 & 20	N V, VII, III[1,2]. R IV, 27[1]. C I, 14, IV[5]. T IV. U III, IV, IV. O II, II & IV, IV—VI.

1) Es fehlen also drei Fälle: Gegeben A, c: zu finden B, b (N V, VII, IV[1,2]. R IV, 27[2]. C I, 14, IV[8,9]. T IV. U III, IV, V. O II, I & IV, I—III.); Gegeben A, b: zu finden a (N V, VII, V[1,2]. R IV, 27[3]. C I, 14, IV[3]. T III—V. U III, IV, VI. O II, III & IV, VII—IX).

Satz.	Gegeben	zu finden	durch	Vgl.
25	a, b	A, B	II, 22 & 11	N V, VII, II^{1,2}. R IV, 25^{2}. T II. U III, IV, II. O II, V & IV, XIII—XIV.
26	A, a	c	II, 11	N V, VII, III^{1,2}. R IV, 27^{1}. C I, 14, IV^{4}. T IV. U III, IV, IV. O II, II & IV, IV—VI.
27	A, a	B	II, 26, 20 & 18	N V, VII, III^{1,2}. R IV, 27^{1}. C I, 14, IV^{6}. T IV. U III, IV, IV. O II, II & IV, IV—VI.
28	A, B	a, b, c	II, 24, 26 & 17 oder 20	N V, VII, VI^{1,2}. R IV, 26. C I, 14, V. T V. U III, IV, I. O II, VI & IV, XV—XVI.

Buch III.

Die Auflösung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke.

(ABC schiefwinkliges sphärisches Dreieck mit Seiten a, b, c.)

Satz.	Wenn		so findet man	durch	indem man anwendet	Vgl.
1	$A < 90^0$	$c < b < 90^0$	a	A, b, c	II, 11 oder 17, 20 & 22	N V, VII, I^{3}. R IV, 28. C I, 14, XI^{1}. T VI. U III, VIII. O II_2. [cfr. IV, 10—17.]
2		$c < 90^0 = b$			II, 11	
3		$c < 90^0 < b$			II, 11, 24 & 22	
4		$c = 90^0 < b$			II, 22	
5		$90^0 < c < b$			III, 1	
6	$A > 90^0$	$c < b < 90^0$			II, 17, 20 & 22	
7		$c < 90^0 = b$			II, 11	
8		$c < 90^0 < b$			II, 11, 20 & 22	
9		$c = 90^0 < b$			II, 11	
10		$90^0 < c < b$			III, 6	
11	$A < 90^0$	$c < a < 90^0$	b	A, a, c	II, 11 & 20	N V, VII, II^{3}. R IV, 29—30. C I, 14, XI^{2}. U III, X—XI. O II_2.
12		$a < c < 90^0$			II, 11 & 20	
13		$c < a = 90^0$			II, 11 & 20	
14		$a < c = 90^0$			II, 11 & 20	
15		$c < 90^0 < a$			II, 11 & 20	
16		$a < 90^0 < c$			II, 11 & 20	
17	$A > 90^0$	$c < a < 90^0$			II, 11 & 20	
18		$c < a = 90^0$			II, 23	
19		$c < 90^0 < a$			II, 17, 20 & 22	
20		$c = 90^0 < a$			II, 20	
21		$c > 90^0 \quad a > 90^0$			II, 22, 11, 20 & 26	

Satz.	Wenn		so findet man	durch	indem man anwendet	Vgl.
22		$c < b < 90^0$			II, 17, 20, 22, 18 & 25	
23		$c < 90^0 = b$			II, 25	
24	$A < 90^0$	$c < 90^0 < b$			II, 17, 20, 18 & 25	
25		$c = 90^0 < b$			II, 25	N V, VII, I[3]. R IV, 28. C I, 14, XI[1]. U III, VIII. O II_2.
26		$90^0 < c < b$			II, 17, 20 & 25	
27		$c < b < 90^0$	B, C	A, b, c	II, 17, 20, 25 & 18	
28		$c < 90^0 = b$			III, 23	
29	$A > 90^0$	$c < 90^0 < b$			III, 22	
30		$c = 90^0 < b$			III, 23	
31		$90^0 < c < b$			III, 24	
32					II, 17, 20, 18 & 23	
33	$A < 90^0\ C < 90^0\ b \substack{<\\=\\>} 90^0$				II, 23 & 17	N V, VII, III[3]. R IV, 31. C I, 14, XII[1]. U III, XIII. O III_2.
34					II, 17, 21, 23 & 20	
35			a, c	A, b, C	III, 32	
36	$A > 90^0\ C > 90^0\ b \substack{<\\=\\>} 90^0$				III, 33	
37					III, 34	
38					II, 17, 26 & 20	
39	$A < 90^0\ C < 90^0\ a \substack{<\\=\\>} 90^0$				II, 26 & 20	
40					II, 17, 26 & 20	
41	$A > 90^0\ C > 90^0\ a \substack{=\\ \\>} 90^0$				II, 26 & 20	N V, VII, IV[3]. R IV, 32. C I, 14, XII[2]. T VIII. U III, X & XII. O III_2.
42					II, 26 & 20. III, 38	
43			b, c	A, a, C	III, 38	
44	$A < 90^0\ C > 90^0\ a \substack{<\\=\\>} 90^0$				III, 39	
45					III, 40	
46	$A > 90^0\ C < 90^0\ a \substack{=\\ \\>} 90^0$				III, 41	
47					III, 42	
48					II, 17, 20, 18 & 19	
49	$A < 90^0\ C < 90^0\ b \substack{<\\=\\>} 90^0$				II, 11	N V, VII, III[3]. R IV, 31. C I, 14, XII[1]. T VII. U III, XIII. O III_2.
50					II, 17, 21 & 19	
51			B	A, b, C	III, 50	
52	$A < 90^0\ C > 90^0\ b \substack{<\\=\\>} 90^0$				III, 49	
53					III, 48	

Satz.	Wenn	so findet man	durch	indem man anwendet	Vgl.
54				II, 17, 21, 27, 20 & 25	
55	$A<90^0\ C<90^0\ a \underset{>}{\overset{<}{=}} 90^0$			II, 27	
56				II, 17 & 27	N V, VII, IV³. R IV, 32. C I, 14, XII². T VIII. U III, X & XII. O III_2.
57				III, 54	
58	$A<90^0\ C>90^0\ a \underset{>}{\overset{<}{=}} 90^0$	B	A, a, C	III, 55	
59				III, 56	
60				III, 56	
61	$A>90^0\ C<90^0\ a \underset{>}{\overset{<}{=}} 90^0$			III, 55	
62				III, 54	

Es fehlen also: B, C durch A, a, c (N V, VII, II³. R IV, 29—30. C I, 14, XI². U III, X—XI. O II_2) und $a(, b, c)$ durch A, B, C (N V, VII, VI³. R IV, 33. C I, 14, XV. U III, XIII. O V_2). $B(, A, C)$ durch a, b, c folgt in Buch IV.

Buch IV.

Die Auflösung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch den prosthaphäretisch umgebildeten Cosinussatz.

(ABC schiefwinkliges sphärisches Dreieck mit Seiten a, b, c.)

Satz.	Wenn		so findet man	durch	indem man anwendet	Vgl.
1	Hülfsatz: C und $sin(90^0-b)$ auf die c-Ebene zu projizieren					
2	$c<a<90^0-c$ [d. h. $b<90^0$]				$\frac{\frac{1}{2}\{sin(90^0-a+c)-sin(90^0-c-a)\}}{sin(90^0-b)-sin(90^0-c-a)} = \frac{sin\ tot}{sin\ vers(180^0-B)}$	
3	$c=a$ [d. h. $b \underset{>}{\overset{<}{=}} 90^0$]				IV, 2, 4, 5 je nachdem $90^0-a=90^0-c \underset{<}{\overset{>}{=}} 45^0$ [1]) oder II, 11	
4	$[c<]a=90^0-c$ [d. h. $b<90^0$]				$\frac{\frac{1}{2}sin\,2c}{sin(90^0-b)} = \frac{sin\ tot}{sin\ vers(180^0-B)}$	
5¹		$b<90^0$			$\frac{\frac{1}{2}\{sin(90^0-a+c)+sin(a-(90^0-c))\}}{sin(90^0-b)+sin(a-(90^0-c))} = \frac{sin\ tot}{sin\ vers(180^0-B)}$	N V, VII, V³. R IV, 34 & V, 2—4. C I, 14, XIII. T IX. U III, VII & III, IV, Postul. O IV_2.
5²	$90^0-c<a<90^0$ $[c]$	$b=90^0$	B	a, b, c	$\frac{\frac{1}{2}\{sin(90^0-a+c)+sin(a-(90^0-c))\}}{sin(a-(90^0-c))} = \frac{sin\ tot}{sin\ vers(180^0-B)}$	
5³		$b>90^0$			$\frac{\frac{1}{2}\{sin(90^0-a+c)+sin(a-(90^0-c))\}}{sin(a-(90^0-c))-sin(b-90^0)} = \frac{sin\ tot}{sin\ vers(180^0-B)}$	
6	$c<90^0\ a=90^0$				II, 26	
7	$c<90^0\ a>90^0$	$b \underset{>}{\overset{<}{=}} 90^0$			IV, 2—5	
8	$c=90^0\ a>90^0$				IV, 6	
9	$c>90^0\ a>90^0$				IV, 2—5	

Satz.	Wenn		so findet man	durch	indem man anwendet	Vgl.
10	$c < a < 90^0 - c$ [d. h. $b < 90^0$]				$\frac{sin\,tot}{sin\,vers\,(180^0-B)} = \frac{\frac{1}{2}\{sin\,(90^0-a+c)-sin\,(90^0-c-a)\}}{sin\,(90^0-b)-sin\,(90^0-c-a)}$	
11	$c = a$				IV, 10, 12, 13 je nachdem $90^0-a=90^0-c \lesseqgtr 45^0$ 1) oder II, 17	
12	$c < a = 90^0 - c$				$\frac{sin\,tot}{sin\,vers\,(180^0-B)} = \frac{\frac{1}{2}\,sin\,2c}{sin\,(90^0-b)}$	N V, VII, I³. R IV, 28. C I, 14, XI¹. T VI. U III, VIII & III, IV, Postul. O II_2. [cfr. III, 1—10.]
13¹	$\begin{matrix} c < \\ 90^0-c < \end{matrix} a < 90^0$	[$b < 90^0$]	b	a, B, c	$\frac{sin\,tot}{sin\,vers\,(180^0-B)} = \frac{\frac{1}{2}\{sin\,(90^0-a+c)+sin\,(a-(90^0-c))\}}{sin\,(90^0-b)+sin\,(a-(90^0-c))}$	
13²		[$b = 90^0$]			$b = 90^0$	
13³		[$b > 90^0$]			$\frac{sin\,tot}{sin\,vers\,(180^0-B)} = \frac{\frac{1}{2}\{sin\,(90^0-a+c)+sin\,(a-(90^0-c))\}}{sin\,(a-(90^0-c))-sin\,(b-90^0)}$	
14	$c < 90^0 \quad a = 90^0$	$B \lesseqgtr 90^0$			II, 17	
15	$c < 90^0 \quad a > 90^0$				IV, 10—13	
16	$c = 90^0 \quad a > 90^0$				IV, 14	
17	$c > 90^0 \quad a > 90^0$				IV, 10—13	

1) Während IV, 2, 10, 12, 13 so abgefaßt sind, daß IV, 3 & 11 jedenfalls formaliter nie als Spezialfälle derselben aufgefaßt werden können, so kann IV, 3, je nachdem $a = c \gtreqless 45^0$ ist, als Spezialfall von IV, 4—5 betrachtet werden, obwohl deren Corollarien deutlich zeigen, daß nur mit der Möglichkeit $c < a$ gerechnet wird, und die Möglichkeit $a = c$ in den Beweisen nicht berücksichtigt wird. In IV, 11 soll es wie in IV, 3 heißen: $90^0 - a = 90^0 - c \gtreqless 45^0$. Der Text ziegt, daß Werner selbst diesen Fehler begangen hat, weshalb er nicht korrigiert werden konnte.

Druckfehlerberichtigung.

Seite	Zeile	steht:	soll heißen:
16	3	inequales	inaequales
25	13	segmentum, bifariam	, segmentum bifariam
83	25	AB et BC	AB et AC
121	15—16	oportuit, ostendere	oportuit ostendere.

Druck von B. G. Teubner in Dresden

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXIV. 2

IOANNIS VERNERI
DE TRIANGULIS SPHAERICIS
LIBRI QUATUOR
DE METEOROSCOPIIS
LIBRI SEX

CUM PROOEMIO

GEORGII IOACHIMI RHETICI

II

DE METEOROSCOPIIS

HERAUSGEGEBEN VON

JOSEPH WÜRSCHMIDT

UNTER BENUTZUNG DER VORARBEITEN VON
DR. A. BJÖRNBO

MIT EINEM VORWORT VON EILHARD WIEDEMANN
UND 97 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

[Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.]

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · HEFT XXIV. 2

IOANNIS VERNERI
DE TRIANGULIS SPHAERICIS
LIBRI QUATUOR
DE METEOROSCOPIIS
LIBRI SEX
CUM PROOEMIO
GEORGII IOACHIMI RHETICI

II
DE METEOROSCOPIIS

HERAUSGEGEBEN VON
JOSEPH WÜRSCHMIDT
UNTER BENUTZUNG DER VORARBEITEN VON
DR. A. BJÖRNBO

MIT EINEM VORWORT VON EILHARD WIEDEMANN
UND 97 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913



II

IOANNIS VERNERI
DE METEOROSCOPIIS
LIBRI SEX

Vorwort.

A. A. Björnbo hat im Jahre 1907 das erste der beiden bedeutungsvollen Werke von Johannes Werner, nämlich „De triangulis sphaericis", in vortrefflicher Weise herausgegeben. Dabei hat er alle zur Charakterisierung der Handschrift nötigen Angaben gemacht, sowie die Textgeschichte beider Werke behandelt. An den Text des ersten Werkes schließt sich unmittelbar das zweite große Werk „De Meteoroscopiis" an; von ihm war auf Kosten der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München eine weiß-schwarze Photographie hergestellt worden, nach der A. A. Björnbo eine Abschrift gemacht hat; zugleich hat er einige wenige der durchweg fehlenden Figuren ergänzt. Ein unerbittliches Schicksal hat den hervorragenden Kenner der älteren Mathematik vor der Vollendung dieser wie zahlreicher anderer Arbeiten der Wissenschaft entrissen. In trefflicher Weise hat J. L. Heiberg seine Verdienste in der Bibliotheca mathematica gewürdigt.

Auf meine Anregung ist dann von der K. B. Akademie der Wissenschaften, die sich zunächst an mich wandte, das von Björnbo hinterlassene Material Herrn Dr. Würschmidt übergeben und diesem dessen Bearbeitung anvertraut worden. Um die Arbeit von Werner allgemein zugänglich zu machen, schien es Herrn Dr. Würschmidt zweckmäßig, nicht dem lateinischen Text eine wörtliche Übersetzung beizugeben, sondern den Inhalt der einzelnen Sätze und Beweise, erläutert durch Figuren, in moderner, mathematischer Sprache, aber in engem Anschluß an Werners Behandlungsweise darzustellen. Außerdem hat Herr Dr. Würschmidt zum Schluß in einem Wörterbuche, welches das von Björnbo für den ersten Teil gelieferte ergänzt, die selteneren Worte zusammengestellt.

Der Math.-Phys. Klasse der Akademie, durch deren Eintreten für die Weiterführung der Björnboschen Arbeit die Veröffentlichung dieser Schrift großenteils ermöglicht wurde, sei besonders Dank ausgesprochen.

Erlangen, im Juli 1912.

E. Wiedemann.



JOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS DE METEOROSCOPIIS.

LIBER PRIMUS.

Designatio circulorum sapheae per demonstrationes.

Propositio prima.

Qualem sphaericae designationis inscriptionem sapheae instrumentum in supposito plano figuret ostendere.

In praesenti opere tria vocabula, figuratio scilicet atque repraesentatio proiectioque, apud Matheseos Autores usurpata, quam plurimum idem significant, quorum unumquodque nomine exprimitur.

Omnes | autem circuli atque puncta in sphaera designati super plano sphaeram eandem tangente ab aliquo eius puncto proici repraesentarique dicuntur, quibus alii circuli similes ac numero pares, in eodem plano descripti similia exercent officia. 185v

Sed ipsam sphaeram, cuius plana huiusmodi fit repraesentatio, sic inscribamus.

Sit data sphaera $ABCD$, cuius centrum E, diametrus vero AC, cuius poli extremitatesque A et C puncta, per quae circulus describatur $ABCD$, quem alius circulus super centrum transiens BFD perpendiculariter secet. Igitur per primum Theodosii librum[a]) uterque magnus erit circulus, et ipsi pariter sphaeram $ABCD$ in quadrantes quatuor, seipsos vero in duobus punctis B et D perpendiculariter et per aequa distinguunt.

Hanc deinde sphaeram planum aliquod, videlicet | CLI, tangat in puncto C. Semicirculus etiam BD per F punctum per aequa scindatur, et posito B polo super eo designetur circulus AFC, qui per eundem[b]) Theodosii primum magnus est circulus, cuius quadrans FC in partes secetur LXXXX. Per earundemque sectionum notas singulas atque per duo puncta B et D tanquam polos circuli describuntur singuli, qui per eundem Theodosii eiusdem sphaerae magni erunt circuli, quos ego inclinatos ideo nuncupo, quoniam a duobus polis A et C inclinantur. 186r

Exempli gratia sit quadrantis FC nonagesima pars arcus FG.[c]) Igitur per puncta tria B, G, D iuxta Theodosii praeceptum in primo circulus designetur, quem inclinatum dicta ratione vocabo. Pari quoque de causa singuli reliqui circuli per duo puncta B et D ac reliquas destinctiones nonagesimas singulas designati nuncupantur inclinati.

a) Vgl. Theodosii *sphaerica,* ed Nizze I, 6. b) Hs. hat *eum.*
c) Hs. hat FA.



186v Circulus BFD | per hypothesim erectus est ad circulum $ABCD$, cum A et C sint eius poli, quem in subiecto plano CL sic repraesentabo.

Imaginabor enim ex puncto A per B punctum rectam produci lineam ABL, quae sit ex parte L indefinita, quam rursus intelligam ita moveri, quatenus omnia puncta circuli BFD pertransiens ad punctum B redeat, unde moveri coeperat.

Talis ergo motus lineae ABL conicam generavit superficiem, cuius communem cum plano CL sectionem, quae sit curva linea LN, dico esse proiectionem sphaerici circuli BFD in plano CL proiecti. Pari modo cunctos inclinatos iam descriptos proici seu repraesentari super plano CL intelligamus.

187r Dividatur iterum circuli $AB|C$ quadrans BC per aequas nonaginta partes, et puncto B posito polo super eo per singula quadrantis eiusdem divisionum puncta circuli aequidistantes designentur, qui quoque per hypo[thesim] et definitionem aequedistabunt circulo AFC.

Hos autem aequidistantes pari quasi forma, velut super inclinatis dictum est, in subiecto plano CL repraesentabimus, ut horum aequidistantium unus sit circulus HK, circulum $ABCD$ secans super duobus punctis H et K, qui quidem aequidistans in supposito plano CL, sicut antea dictum fuit, proici cogitabitur, producta scilicet ex puncto A per K punctum recta linea usque in I punctum et de parte I indefinita, quam rursus intelligam continuo haerentem circulo HK circumvolvi, donec redeat in puncto K, unde moveri coeperat. |

187v Huius itaque lineae motu conica iterum emersit superficies, cuius communis cum plano CL sectio, quae sit MI, repraesentat sive proicit super plano CL aequedistantem HK. Pari modo reliquos aequedistantes in sphaera ABC iam designatos accipiamus figurari. Et sicut antea inferiorem sphaerae qua-

---

DE METEOROSCOPIIS.

ERSTES BUCH.

1. Proposition. (Fig. 1.)

Allgemeine Übersicht über die Projektionen der wichtigsten Kreise einer Kugel auf eine Tangentialebene an die Kugel. Definition der Saphea.

Die Zeichenebene schneide aus der gegebenen Kugel den größten Kreis $ABCD$ mit dem Mittelpunkt E aus. Der zu ihm senkrechte größte Halbkreis sei BFD. Beide teilen die vordere Halbkugel in 4 Quadranten. Die zum Durchmesser AEC senkrechte Tangentialebene im Punkte C sei LCN, ferner werde noch der Halbkreis durch F, den Halbierungspunkt des Halbkreises BFD, und die Achse AEC gelegt.

Teilt man FC in 90^0 und legt durch einen in diesem Quadranten gelegenen Punkt, etwa G, und den Durchmesser BD eine Ebene, so schneidet diese aus der Kugel einen größten Kreis aus, der gegen den Kreis BFD geneigt (inclinatus) ist. (Beisp. $FG = 1^0$.)

Zieht man die Gerade ABL, die die Tangential(Projektions)ebene in L schneidet, und bewegt sie so, daß AB auf dem Kreis BFD sich bewegt, so

drantem BDC [per] inclinatos inscripsimus, atque eos in subiecto plano proiecimus, ita et reliquam sphaerae $ABCD$ quartam inferiorem per inclinatos inscribemus; eos itaque descriptos in eodem plano CL proici cogitabimus.

Non aliter duos circulos ABC et AFC in supposito plano imaginabimur per duas rectas alteris suis extremitatibus super A[a]) puncto, et reliquis earum portionibus per duos circulos ABC et AFC circumlatis, ita, ut singula eorum puncta percurrant, | donec eosdem circulos iterum in puncto A tangant velut 188r prius, quando moveri coeperant.

Tali namque motu duo circuli ABC et AFC atque quicumque alii per polos A et C venientes per rectas in principio sui motus datam sphaeram in polo A tangentes, et in singulis huiusmodi circulis circumlatas, donec eandem sphaeram ut ante tangant, in plano substrato proicientur.

Inscriptae itaque sphaerae dimidium superficiebus duabus, videlicet circuli BFD atque plani suppositi CL, contentum atque praemissa ratione super plano CL proiectum nobis sapheae declarabit effigiem. Nam imago haec sic inscriptae sphaerae in tali proiectione super plano CL relicta graeca nuncupatione saphea vocabitur, quam Latinus declarationem aut figurationem seu designationem ac etiam repraesentationem non inepte nuncupabit. |

Propositio secunda.[a]) 188v

Omnis magnus in sphaera circulus, ab una suae diametri extremitate proiectus in plano eandem sphaeram tangente super altera eiusdem diametri extremitate recta proveniet linea.

a) Hs. hat *secunda* korr. aus *prima*.

beschreibt sie einen Kegel, und ihr Schnittpunkt mit der Projektionsebene eine „gekrümmte" Linie LN, die Projektion von BFD.

Teilt man den Quadranten BC in 90^0 und zieht durch einen seiner Punkte einen Parallelkreis KH zu AFC, so beschreibt die Projizierende dieses Parallelkreises von A aus gleichfalls einen Kegel, und die Projektion ist die gekrümmte Linie IM.

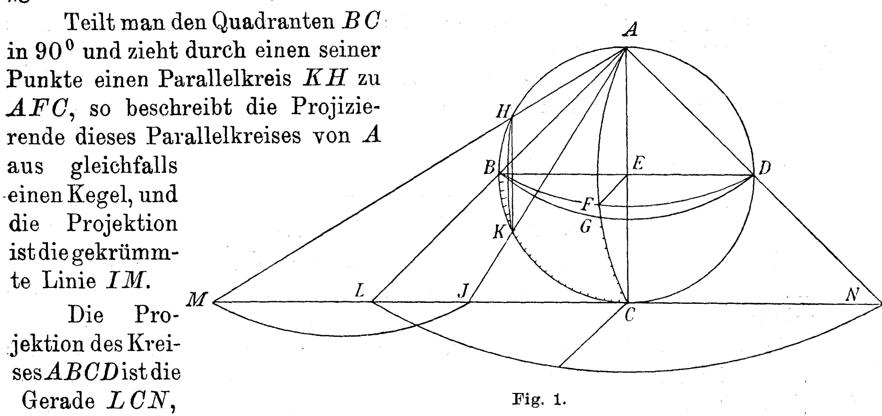


Fig. 1.

Die Projektion des Kreises $ABCD$ ist die Gerade LCN, ebenso sind die Projektionen aller größten Kreise durch AC (Meridiankreise) Gerade, die durch C gehen.

Die Projektion des Kreises BFD (Äquators) ist der Kreis LN, der „Saphea" genannt wird.

Maneat eadem praecedentis schematis dispositio, et intelligamus, ut ante, lineam AKJ ex parte I indefinitam super puncto A in superficie circuli $ABCD$ ita circumagi, ut omnia puncta circuli $ABCD$ percurrat.

189r In hac autem revolutione linea | AKJ superficiem circuli $ABCD$ nusquam deserit. Ergo sequitur, ut huiusmodi revolutionis motu non nisi planum exoriatur. Igitur plani AKJ linea circumacta generati cum plano CL communis sectio per tertiam undecimi *elementorum* Euclidis erit linea recta; quod est propositum.

Propositio tertia.

Omnis circulus, cui axis sphaerae perpendiculariter superinstat, proiectus ab uno polorum eiusdem axis in plano sphaeram eandem in altero eius polo tangente per circulum idem designabitur.

Sit sphaera ABC, cuius axis AC; et in eius superficie designatus esto 189v circulus $BFDE$, | ad cuius superficiem axis AC perpendiculariter instet in puncto L, atque sphaera $ABCD$ plano ICK tangatur in polo C. Dico circulum $BFDE$ proiectum de polo A super planum ICK circulum rursus evenire.

Producantur itaque in circulo $BFDE$ duo[a]) diametri BD et EF, ut sors ipsa tulerit, qui[b]) per definitionem circuli transeunt per centrum circuli $BFDE$, quod iuxta primum Theodosii librum est punctus L. Deinde de polo A quatuor rectae, scilicet ABI, AFH, ADK et AEG per puncta quatuor $BFDE$ protrahantur, quousque singuli terminentur in plano ICK, in quo etiam duae rectae trahentur IK et GH, quae necessario invicem secabuntur in polo C.

Nam axis AC transit per iam extensa per L centrum circuli $BFDE$. Igitur duorum triangulorum AIK et AGH superficies invicem secabuntur 190r super axi BC; quare consequens est, ut sectio duarum linearum IK et GH | sit in polo C.

Idem quoque constat per 18 undecimi *elementorum*, cum iuxta eandem uterque duorum triangulorum AGH et AKI ad planum CK erigitur; atqui ex dicta hypothesi ac per 14 eiusdem undecimi circulus BFD aequedistat plano ICK; igitur per 16 eiusdem undecimi *elementorum* diameter BD lineae IK,

a) Hs. hat duae. b) Hs. hat quae.

---

2. Proposition. (Fig. 1.)

Die Projektion jedes größten Kreises der Kugel von einem Endpunkte eines seiner Durchmesser auf die Tangentialebene der Kugel im anderen Endpunkte des Durchmessers ist eine Gerade.

Die Gerade AKI werde so bewegt, daß K den Kreis $ABCD$ durchläuft und A fest bleibt, sie beschreibt also eine Ebene (die Zeichenebene). Der Schnitt derselben mit der Tangentialebene LN ist die Gerade LN.

3. Proposition. (Fig. 2.)

Die Projektion jedes senkrecht zu einem Durchmesser (Achse) stehenden Kreises (Parallelkreis) von einem Endpunkt der Achse (Pol) aus, auf die Tangentialebene im anderen Pol ist ein Kreis.

et lineae GH diameter EF aequedistat; quare per 4 sexti eorundem *elementorum* proportio semidia[me]tri BL ad lineam IC et FL semidia[me]tri ad CH rectam, item semidiametri DL ad CK lineam atque EL semidia[me]tri ad CG rectam, cuiuslibet earum ad suam comparem proportio est, sicut AL particula axis ad totam AC axim. Cum autem quatuor hae semidiametri per definitionem sunt sibi invicem aequales, ergo permutatim arguendo quatuor lineae CG, CI, CH et CK aeque probantur.

Igitur posito C centro et super eo iuxta quantitatem cuiuslibet quatuor linearum CI, CG, CK et CH circulo descripto propositum per 9 quarti *elementorum* Eu[clidis] erit manifestum. |

Propositio quarta.

190v

Circulum magnum in sphaera designatum atque respectu poli axis alicuius super eum inclinati proiectum in plano, cui idem axis in altero eius polo perpendiculariter superinstat, circulum rursus evenire.

Sit sphaera data ABC, cuius centrum E; axis vero AB supra magnum circulum in sphaera designatum $CFDM$ inclinatus atque super planum KBH in puncto B perpendiculariter erectus. Dico, circulum $CFDM$ in subiecto plano KBH respectu poli A repraesentatum circulo figurari, quod sic ostendetur.

Per maximas itaque declinationes axis AB et circuli CFD magnus describatur circulus $ACBD$, qui per primum Theodosii *de sphaericis* ad circulum | $CFDM$ erigitur. In circulo quoque $CFDM$ duae diametri CD et FM ad rectos angulos super centro E se intersecantes protrahentur. Deinde a polo A per puncta quatuor C, F, D, M rectae quatuor ACH, AFG, ADK, AML producantur occurrentes subiecto plano in punctis quatuor H, G, K, L.

191r

Linientur etiam duae rectae HK et LG, quae necessario a se invicem secantur in polo B. Nam duae superficies duorum triangulorum AKH et AGL ad se mutuo sunt erectae ex definitione et hypothesi praemissa; earum quoque communis sectio axis est AB. Cum igitur intersectio duarum linearum HK et LG in utramque superficierum duorum triangulorum AKH et ALG reperiatur, necessario sequitur, ut intersectio duarum linearum HK et LG sit in polo B, cum nullum aliud punctum sit utrique triangulo et duabus lineis HK et

---

Man zieht in dem Parallelkreis $BFDE$ zwei beliebige Durchmesser BD und EF. Die Projektionen der Punkte B, F, D und E sind die Punkte I, H, K und G. Da die Durchmesser des Parallelkreises parallel den Durchmessern des Projektionskreises sind, und somit auch die Halbmesser, so ist das Verhältnis der Halbmesser z. B. $LB : CI = AL : AC$. Da die Halbmesser des Parallelkreises einander alle gleich sind, so gilt dies auch für die projizierten Halbmesser; folglich ist die Projektion ein Kreis.

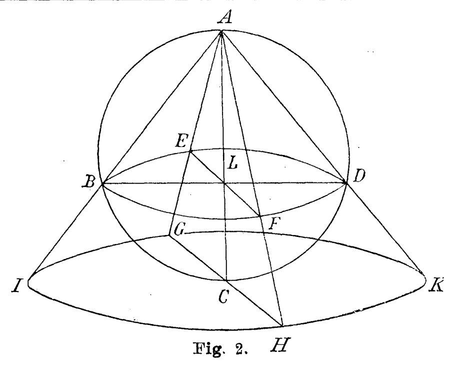


Fig. 2.

GL commune praeter polum B. Duae quoque superficies duorum triangulorum
191v AHK et AGL su|per planum HBK eriguntur, velut notum est per definitionem plani erecti super aliam planam superficiem atque 18 undecimi *elementorum.* At cum etiam altera ad alteram ex hypothesi sit erecta, consequens est, ut quatuor anguli, qui fiunt a duabus lineis HK et GL circa punctum B sint recti singuli, sed duorum angulorum CAD et CAM [a]) uterque etiam rectus per 31 terti *elementorum* Euclidis probatur. Atqui tres lineae AE, EF et EM per sphaerae definitionem sibi invicem aequantur, erit per 4 ac 32 primi *elementorum* uterque angulorum AFE et AME recti medietas. Ex hypothesi autem duae lineae MEF et GBL sibi aequidistantes probantur. Igitur per 29 primi eiusdem uterque angulorum AGB et ALB recti concludetur medietas. Arguendo igitur permutatim et per 4 sexti recta BG BL rectae probabi-
192r tur aequalis, et per sextam primi *elementorum* tam recta BG quam recta BL aequatur axi AB. At per octavam sexti eorundem *elementorum* et dictas hypotheses idem axis AB inter duas lineas HB et BK medio loco proportionalis habetur. Igitur per communem scientiam utraque linearum BG et BL erit inter BH et BK rectas medio loco proportionalis; ergo, si protrahantur rectae quatuor HG, GK, KL, LH, duo anguli circa G et L puncta facti per 8 sexti *elementorum* recti sunt; quare divisa linea HK per aequa in puncto N, atque super eo centro posito secundum quantitatem NH aut NK rectae circulus designetur, ipse per conversam 31 tertii *elementorum* Euclidis transibit quoque per duo puncta G et L; ergo per nonam quarti eorundem concludemus circulum $CFDM$ subiecto plano HBK figuratum circulo $GKLH$ repraesentari; quod fuit propositum.

192v At forte nobis obiciet aliquis, puncta solum | quatuor C, F, D, M circuli $CFDM$ per circulum $GKLH$ in plano KBH descriptum contineri. Sed ego punctum quodlibet aliud circumferentiae $CFDM$ intra circumferentiam circuli $GKLH$ proici quoque sic ostendam.

Sit punctus O, quem ex circumferentia $CFDM$ respectu poli A super plano supposito KBH proiectum adversarius in circumferentia $GKLH$ comprehendi neget.

a) Hs. hat LAM.

4. Proposition.

Die Projektion eines größten Kreises aus einem Pol einer gegen ihn geneigten (nicht senkrecht stehenden) stehenden Achse auf die Tangentialebene im anderen Pol ist ein Kreis.

Man zieht die beiden zueinander senkrechten Durchmesser CD und MF des zu projizierenden größten Kreises $CMDF$. (CD ist die Projektion der Achse auf die Ebene des Kreises.) Die Projektionen der Endpunkte C, M, D und F sind die Punkte H, L, K und G. Aus der Ähnlichkeit von Dreiecken folgt, daß $BL = BG = AB$. Da $\sphericalangle\, CAD = 90^0$, so ist $HB \cdot BK = AB^2$, also auch $= BL^2 = BG^2$, somit $\sphericalangle\, HLK = \sphericalangle\, HGK = 90^0$.

Halbiert man nun HK durch N und beschreibt um N einen Kreis mit dem Radius NK, so geht dieser durch L und G, und ist die gesuchte Projektion.

Igitur protrahantur rectae quatuor, inprimis diameter OEQ in circulo $CFDM$, deinde de polo A per O et Q puncta rectae duae AOP et AQR plano HBK occurrentes super P et R punctis prot[r]acta demum recta PR, quam transire per polum B facile probabimus.

Nam tria latera trianguli APR cum axi AB in eadem superficie scilicet trianguli AQO consistunt, quo quidem per secundam undecimi *elementorum* perspicuum est, et PR latus com|munis sectio est superficierum duarum 193r scilicet trianguli APR atque plani HBK. Angulus autem PAR per 31 tertii *elementorum* rectus esse probatur, quod patet descripto magno AOB. Igitur per 8 sexti eorundem axis AB inter rectas duas BP et BR medio loco proportionalis habetur. Igitur per 1 eiusdem sexti, quod fit ex PB in BR aequabitur quadrato axis AB. Sed id aequum est etiam ei, quod fit ex BH in BK per eandem 17. Quare per communem scientiam: „quae sunt uni et eidem aequalia, inter se sunt aequalia", quod fit ex BP in BR aequatur ei, quod fit ex BH in BK. Ergo per conversam 34 tertii *elementorum* duo puncta P et R, quae respectu poli A repraesentant in plano HBK, puncta duo O et Q etiam in circumferentia circuli $GKLH$ reperiuntur, quod adversarii falsae repugnat assertioni; igitur propositum constat esse verum.

Correlarium.

Unde perspicuum est, centra inclinatorum omnium super plano datam sphaeram | tangente proiectorum in communi sectione plani eiusdem atque 193v planae superficiei per polos, a quibus tales circuli super eadem sphaera designati declinant, euntis atque ad eosdem et ad subiectum planum eandem sphaeram tangens perpendiculariter erectae reperiri.

Propositio quinta.

Si datam sphaeram in uno eius polo planum aliquod tetigerit, atque aliquis ex minoribus eiusdem sphaerae circulis, cuius superficies, in qua designatur, ad idem planum sit erecta, eundem quoque minorem circulum ab altero eiusdem sphaerae polo in

---

Gegenüber dem Einwand, der Kreis gehe nur durch diese 4 Punkte, wird gezeigt, daß die Projektion P eines beliebigen Punktes O des größten Kreises auf dem Projektionskreis liegt.

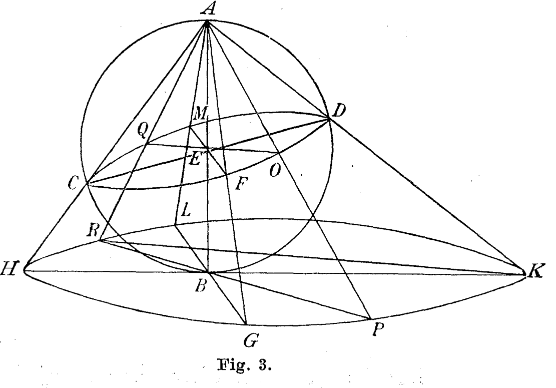


Fig. 3.

Anmerkung.

Die Projektionen der Mittelpunkte aller „geneigten" größten Kreise liegen auf dem Schnitt der Tangentialebene mit der zu ihr und zu den größten Kreisen senkrechten, durch den Kugelmittelpunkt und die Pole gehenden Ebene.

eodem sphaeram datam tangente plano proiectum circulo item figurari.

Sit ergo sphaera ABC, cuius centrum D, quam quidem sphaeram planum 194r BML tangat in puncto B, et axi | BDA protracto designetur in eadem sphaera unus ex minoribus circulis $EHFG$, cuius superficies erigatur ad planum BML. Dico itaque circulum minorem EFG in plano BML ex polo A proiectum alio figurato reddi circulo, quod sic demonstrabitur.

Sit ergo parvi circuli EFG polus C, per quem et punctum B contactus magnus inscribatur circulus ABC secans circulum minorem EFG in punctis duobus E et F; eritque per primum Theodosii *de sphaeris* superficies circuli ABC ad minorem circulum EFG erecta, et per 18 undecimi *elementorum* Euclidis ad planum BML idem ABC circulus erigitur. Nam et diameter ipsius ADB ad idem planum BML ex hypothesi et primo Theodosii perpendicularis. Deinde ex polo C ad D centrum sphaerae datae recta ducatur secans superficiem circuli minoris EFG in puncto I, quod per primum Theodosii centrum est circuli eiusdem EFG. Duae quoque diametri EIF et 194v GIH [a]) ad rectos angulos | secantes se linientur, [b]) eritque diameter EIF communis sectio duorum circulorum ABC maioris et EFG minoris circuli. EIF est perpendicularis ad planum BML; nam axis ADB ad idem planum BML erigitur, quare per conversam octavae undecimi duae lineae ADB et EIF diametrus parvi circuli EFG aequedistant. Protrahantur posthac rectae quatuor a polo A per quatuor puncta E, H, F, G minoris circuli EFG occurrentis plano BML super punctis singulis, quae sint AEK, AHP, AFM et AGO. Dico itaque puncta quatuor K, P, M, O in eodem reperiri circulo, per quem super plano BML circulus minor $EHFG$ proicitur, quod ita demonstrabitur.

Rectae duae protrahantur, quae sint OL et LP, unam rectam constitu-

a) Hs. hat GLH. b) Hs. hat lingentur.

5. Proposition. (Fig. 4.)

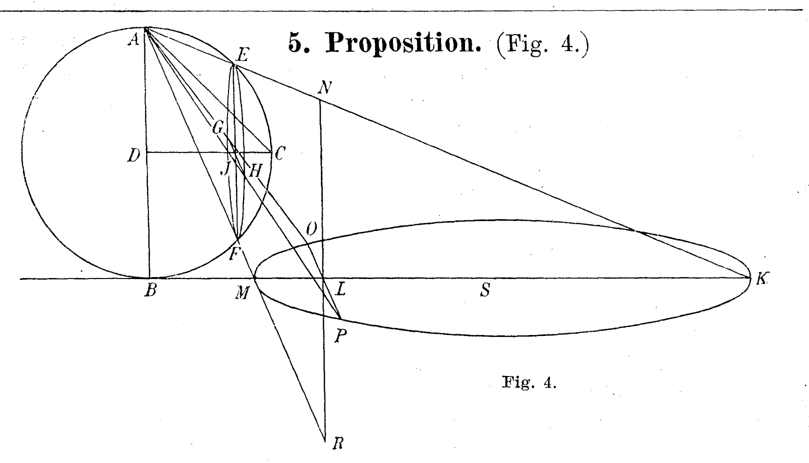


Fig. 4.

Die Projektion eines zur Projektionsebene senkrecht stehenden Kreises (Parallelkreises) ist ein Kreis.

entes; nam hae pariter sunt communis sectio superficiei trianguli AGH et plani BML. Cum autem ex hypothesi recta GIH perpendicularis sit ad superficiem magni circuli ABC, ipsa quoque erigitur ad superficiem trianguli | 195r ABK. Triangulus enim ABL et magnus circulus ABC [a]) in eadem constituuntur superficie, quare per 18 undecimi *elementorum* Euclidis sequitur, ut superficies trianguli AOP erigatur etiam ad eandem superficiem ABK. Atqui plana superficies BML ex hypothesi ac praeostensis ad planum quoque trianguli ABK erigitur, concomitabitur, ut communis sectio scilicet linea OLP duarum superficierum plani BML et trianguli AOP [b]) sit etiam perpendicularis ad planum trianguli ABK. Igitur per sextam undecimi *elementorum* Euclidis duae rectae lineae OLP et GIH aequedistant. Ex puncto deinceps L erigatur perpendicularis LN secans latus AK trianguli ABK in puncto N. Secare enim necesse est. Nam ipsa erigitur a communi sectione duarum superficierum trianguli ABK et plani BML ad se invicem erectarum, et angulus AKB per dictam hypothesim et 32 primi *elementorum* recto minor est. Igitur per penultimam petitionem eiusdem recta LN [c]) | et latus AK, cum ambae sint, 195v ut probatum est, in eodem plano, a se mutuo secabuntur. Denique producantur lineae duae AM et LN in continuum et rectum, haec quidem ex parte M, illa vero in parte L, donec concurrant in puncto R; eas enim in eandem partem productas concurrere necesse est per dictam penultimam petitionem primi *elementorum* Euclidis. Cum angulus RLM ex hypothesi rectus sit, angulus vero LMR recto minor; suus enim aequalis AMB per 32 primi *elementorum* eiusdem et hypothesi recto minor probatur. Rectae autem quatuor LO, LP, LN et LR sunt sibi invicem aequales; illarum namque cuiuslibet ad semidiametrum parvi circuli $EHFG$ per 4 sexti intercedente 29 primi *elementorum* proportio est, sicut recta AL ad AI rectam. Igitur per novam quinti eorundem, ipsas esse pares perspicuum est, nisi forte diameter EIF et recta NLR

a) Hs. hat AHC. b) Hs. hat F. c) Hs. hat LN corr. aus NL.

Man zieht den Kreis ABC durch den Berührungspunkt B und den „Pol“ C des zu projizierenden Kreises $EHFG$. Die Projektionen der Punkte E, H, F und G von A aus sind die Punkte M, O, K und P. OP und MK schneiden sich in L und stehen aufeinander senkrecht.

Zieht man $LN \perp BMK$, so schneidet es AK in N, AM in R. Dann ist $LO = LP = LN = LR$, da für jedes sein Verhältnis zum Halbmesser des Parallelkreises $= AL : AJ$ ist.

Da $\sphericalangle AKB + \sphericalangle BAK = 90^0$ und $\sphericalangle CAD\ 45^0$, so ist $\sphericalangle AKB + \sphericalangle CAK = 45^0$. Nun ist $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CAM$. Also $\sphericalangle AKB = 45^0 - \sphericalangle CAM = \sphericalangle BAM$; folglich $\triangle ABM \sim \triangle KLN \sim \triangle MLR$. Also $KL : LN = LR : LM = LN : LM$. Da $LO = LP = LN$, so gilt diese Proportion auch für diese. Der weitere Schluß ist wie bei der vorigen Proposition.

Anmerkung.

Die Mittelpunkte aller Parallelkreise liegen auf dem Schnitt der Tangentenebene und der durch die Pole der Parallelkreise gelegten, zur Tangentenebene senkrechten Ebene.

non essent aequedistantes. At ipsae per praemissas hypotheses et sextam un-
196r decimi | eorundem *elementorum* aequedistant. Atqui ex hypothesi angulus ABK rectus est, et per 32 primi *elementorum* duo anguli BAK et AKB[a]) aequant unum rectum angulum; et angulus CAD per eandem 32 et 5 primi eorundem recti dimidium est. Igitur duo anguli AKB et CAK erunt pariter etiam recti medietas. At per 26 tertii *elementorum* atque hypotheses dictas duo anguli KAC et CAM sunt aequales. Igitur per communem scientiam, si ab aequalibus aequalia demas, quae remanent, sunt aequalia anguli duo AKB et BAM sibi invicem aequantur. Cum autem duorum angulorum KLN et ABM ex hypothesi uterque sit rectus, consequitur per 32 primi et quartam sexti *elementorum* triangulos duos. ABM et KLN fore similes. Triangulus quoque LMR per 15 et per 29 primi eorundem bis repetitam atque praemissas hypotheses probatur aequiangulus triangulo ABM; quare per definitionem
196v et quartam sexti similis eidem; ergo per 20 | eiusdem sexti duo trianguli KLN et LMR sibi invicem sunt similes; igitur per definitionem proportio lateris LK ad LN latus trianguli NKL erit sicut LR lateris ad LM latus trianguli LMR. At LR recta per praemissa rectae LN aequatur; ergo per definitionem tres rectae KL, LN et LM sunt continue proportionales. Cum autem linearum LO et LP utraque fuit ostensa rectae LN aequalis, utralibet earum per communem scientiam erit etiam continue proportionalis inter KL et LM rectas. Quare si protraxerimus rectas quatuor MO, KO, KP et PM, duo anguli super punctis duobus O et P facti per 8 sexti *elementorum* Euclidis atque per prius ostensa recti erunt. Divisa igitur recta KM per aequa super S puncto, et descripto circulo iuxta intervallum MS aut KS ipse per conversam 31 tertii *elementorum* circulus minor $EHFG$ ex polo A in subiectum
197r planum BML proiectus alio figurabitur circulo, quod erat ostendendum. |

Corrolarium.

Hinc etiam nobis manifestabitur, aequidistantium omnium in subiecto plano proiectorum centra reperiri in communi sectione planae superficiei per polos eorum aequidistantium, quos idem ex sphaera repraesentant, euntis atque eiusdem subiecti plani, cui eadem superficies perpendiculariter etiam superinstat.

Propositio sexta.

Diametrum limitis, hoc est circuli sapheae, designationem continentis axi sphaerae, cuius inscriptionem saphea figurat, duplam esse.

Sit ergo sphaera $ABCD$, cuius centrum E, axis AC, poli A et C puncta, atque sphaeram datam planum FG in polo C tangat. Sphaericae itaque superficiei circulus magnus $ABCD$ inscribatur per A et C polos evadens; et super

a) Nach AKB hat Hs. *rectus est et per 32* gestrichen.

---

6. Proposition. (Fig. 5.)

Die Projektion des Äquatorkreises, der sogenannte „Grenzkreis", hat einen doppelt so großen Durchmesser als die Kugel. Der

eisdem A et C polis alius ei[u]sdem sphaerae circulus BHD inscribatur, circulum $ABCD$ super B et D punctis secans, perque | centrum sphaerae means, 197v qui ex definitione magnus quoque sphaerae circulus eiusdem, atque ad circulum $ABCD$ perpendicularis esse convincitur. Et prot[r]acta BED diametro aliae rectae duae ABF et ADG ex polo A demittantur, quousque obvient plano FG in punctis F et G; tractam itaque rectam FG per C polum oportet evadere. Nam circulus $ABCD$ et triangulus AFG in eadem plana consistunt superficie,[a]) cuius communis cum plano FG sectio est recta FG. Cum autem polus C ex hypothesi super eadem locetur sectione, necesse est, ut idem polus C rectam FG possideat, nisi quis audeat asserere, duarum planarum superficierum se mutuo secantium communes duas esse sectiones, cui *elementorum* undecimi tertia resistit omnino. Linea itaque FG per aequa super C polo scinditur; nam cum ex hypothesi et definitione quatuor anguli circa centrum E duabus sphaerae diametris AC et BD comprehensi recti sunt singuli, per quartam itaque ac 32 primi *elementorum* | quilibet angulorum quatuor 198r BAE, ABE, EAD et ADE recti medietas esse probatur; quare per 28 primi duae rectae BD et FG sibi aequedistant; ergo per 29 eiusdem quilibet duorum angulorum AFC et AGC recti medietas esse probatur. Quare per quartam eiusdem primi utralibet duarum linearum CF et CG aequalis AC axi convincitur; ergo per communem scientiam: "quaecunque uni et eidem sunt aequalia, inter se sunt aequalia" duae rectae CF et CG aequantur sibi invicem. Igitur super C designato[b]) iuxta alterius earum quantitatem circulo G ipse per tertiam huius super plano FG figurabit circulum BHD, cuius diameter, velut iam ostensum est, diametri circuli FG subdupla convincitur. Constat ergo propositum.

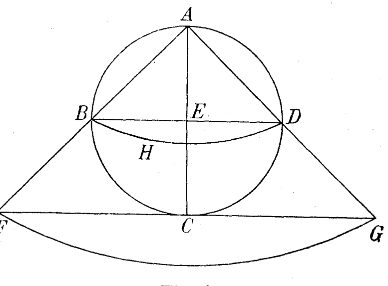


Fig. 5.

FG autem circulum sapheae limitem non incongrue vocabimus, quia sicut BHD circulus super sphaera $ABCD$ limitat seu terminat sphaericam ex prima huius inscriptionem, sic quoque circulus FG super plano FG sapheam, quae illius est inscriptionis figura, limitat terminatque. |

Propositio septima.

Inclinatos designandi modum ostendere succinctum. 198v

Maximus ergo limes, intra quam saphea inscribenda est, circulus esto $ABCD$, qui duabus distinguatur diametris AC et BD in quadrantes quatuor AB, BC, CD, DA; centrum eiusdem circuli sit E signum, super quo extra

a) Hs. hat *superficiei*. b) Hs. hat *designata*.

Beweis folgt unmittelbar aus den an der Figur ersichtlichen ähnlichen Dreiecken.

circulum $ABCD$ alius linietur circulus ab eodem spatio medii recedens culmi pro gradibus annotandis; praeter hunc super eodem centro tertius circumscribatur circulus a proximo circulo duplo spatio aut paulo plus recedens, in quo quidem intervallo numerus graduum inscribendus est, quae inscriptio fiat, aucto graduum numero per quinque, procedendo usque ad 90 atque eodem numero inchoato a[a]) B et utrimque apud A et C bis finito, simili modo a[b])
199r D usque in A et C puncta bis descripto. Itaque quilibet qua|drantum AB, BC, CD et AD numeris 90 inscribatur. Deinde semidiameter AE per aequa in puncto F scindatur, et super eo centro posito circulus occultus $AHEG$ designetur, in quo lineetur diameter GFH, scindens diametrum AFE ad angulos rectos. His itaque duabus diametris circulus $AHEG$ distinguitur in quadrantes quatuor, quorum quilibet deinceps in partes 90 dividatur, aut satis erit, huiusmodi circuli dimidiam circumferentiam velut arcum[c]) HAG in tales partes 90[d]) distinguere.

Posthaec ex puncto A versus G punctum una sumatur pars, si sapheam hanc ad singulos gradus, aut earundem partium binæ, si ad binos, aut ternae, si ad ternos componere velimus.

Sumamus igitur, quotcunque libuerit partes, atque in finem sumptae partis seu partium ponamus M literam; productis deinde occultis rectis tribus scilicet diametro MFJ et rectis AML et AJK, donec occurrant diametro
199v BED circuli $ABCD$ in utramque partem per | centrum et directum erectae super punctis K et L. Itaque linea KL per aequa super puncto N divisa, et iuxta intervallum alterius rectae KN aut LN circulus designetur, cuius particula intra circulum $ABCD$ cadens tingatur colore aliquo, ut sit manifesta; quidquid autem de inscripto circulo extra limitem $ABCD$ ceciderit, sit occultum aut penitus omittatur; eo namque nobis opus non erit. Hoc pacto quoslibet inclinatos pro quoslibet gradus saltem 90 portionibus designabimus, propositos videlicet gradus pro inscribendis inclinatis, ut antea, numerantes inprimis super quadrante AG ex puncto A versus G punctum; posthaec, ut monitum est, agendo, velut id in subiecta declarabitur figura.

Descriptis ergo inclinatis pro medietate ADC circuli $ABCD$, haud alia ratione inclinatos figurabimus super semicirculo ABC, usurpando quadrantem AH, velut iam utebamur quadrante AG circuli $AGEF$.

200r At hoc etiam compendio hic uti poterimus, | sumendo scilicet semidiametrum alicuius inclinati ex praemissa doctrina descripti circini officio. Itaque per circinum sic extensum in alio semicirculo ACB inclinatum alium paris designabimus officii, posito scilicet uno circini pede super A punctum, altero vero eius pede mobili quidem translato in lineam ED ex parte indefinitam, atque illic eo fixo reliquo eius pede, qui modo in A punctum ponebatur, etiam circumducto, quousque in semicirculo ACB alius nobis exaretur inclinatus.

Ut si hoc praecepto velim super semicirculum ACB paris inclinatum officii describere, cuius inclinatus AKC habetur ex praemissa doctrina intra semicirculum ACD designatus. Igitur extensis circini cruribus ad semidiametrum inclinati AKC iam designati, locato deinde circini sic extensi pede uno

---

a) Hs. hat *a* corr. aus A. b) Hs. hat *a* corr. aus A.
c) Hs. hat *arcum* am Rande aus *circulum* korrigiert.
d) Hs. hat *90* am Rande aus IBO korrigiert.

in punctum A, sed pede ipsius altero ED lineae in D parte indefinitae applicato, velut in puncto P, atque priori circini pede extra punctum A circumlato inclinatum AOC super semicirculo ABC liniatum habebimus se|cantem semidiametrum BE circuli ABC in puncto O; quod erat ostendendum. Sed hic modus designandi inclinatos sic demonstrabitur. 200v

Sit sphaera $QRST$, quam ex prima huius inscriptam saphea praesens $ABCD$ figurare debeat; axisque sphaerae datae sit QS; eadem quoque sphaera plano VSX super S polo tangatur; circulus etiam per Q et S polos designetur, qui sit $QRST$. At per praemissam quindecimamque quinti *elementorum* Euclidis et communem scientiam: "circuli sunt aequales, quorum aequantur diametri", duo circuli $AGEH$ et $QRST$ probantur aequi. Ex circulo etiam $QRST$ arcus QR arcui AM sumatur aequalis, et in eodem circulo protracta diametro RT, quae necessario habetur etiam aequalis diametro MJ circuli $AGEH$, productis quoque lineis duabus QRX et QTV, donec plano VSX obvient in punctis X et V, liniata demum recta VX, quae, ut prius, per S polum de necessitate meabit, describatur | etiam circulus RT a polis Q et S quantitate arcus QR inclinatus, circulum $QRST$ secans super R et T punctis. 201r

Cum autem per definitionem recta VSX in subiecto plano repraesentet diametrum RT, ergo per quartam huius ac eius correlarium circulus, cuius eadem recta VSX diameter fuerit, circulum RT repraesentabit. Eandem autem VSX rectam dico fore parem diametro KL inclinati AKC pro saphea $ABCD$ iam designati, quod sic patebit.

Nam duo trianguli AEK et QSV aequilateri et aequianguli per 26 primi *elementorum* probantur. Latus enim AE trianguli AEK par est lateri QS trianguli QSV. Et angulus AEK aequalis angulo QSV; uterque enim ex hypothesi rectus est. Angulus denique EAK per 26 tertii *elementorum* aequalis est angulo VQS. Ergo latus EK trianguli AEK aequatur lateri SV trianguli QSV. Haud secus recta EL probabitur aequalis[a]) SX rectae. Quare per communem scientiam tota | VSX par erit toti KEL. 201v

Ergo descriptus circulus, cuius diameter fuerit VSX recta, par erit circulo AKC, et eorum uterque figurabit ex sphaera $QRST$ inclinatum TR; quod erat ostendendum.

Unde demum liquet, omnium inclinatorum sapheae $ABCD$ inscribendorum centra super BD diametro consistere, quod eadem diameter repraesentet planae superficiei circuli $QRST$ et plani VSX communem sectionem VSX. Quare illatum correlarium haud est ad concludendum difficile.[b])

Corrolarium.

Hinc etiam exit perspicuum, nobis sufficere pro inclinatis inscribendis semicirculum AGE divisum fuisse in 180 partes. Notandum insuper est, velut idem etiam patet ex praemissa, singulos inclinatos, si iuste designabuntur, oportere per duo puncta A et C transire. Quod autem per A punctum transeant, manifestum est per 31 et eius conversam tertii *elementorum* Euclidis, cum angulus circa punctum A pro | singulis inclinatis eveniat rectus. At ip- 202r

a) Hs. hat *SV trianguli . . . probabitur aequalis* am Rande hinzugefügt.
b) Hs. hat *difficilae.*

sos inclinatos super C punctum transire, constabit ex tertia eorundem. Id denique silentio praetereundum non est, diametrum BD pro omnibus inclinatis, eorum portiones intra circulum $ABCD$ comprehensas, aequaliter necessario partire, quod ex eadem tertia tertii liquet; sed id demonstrasse fortasse supervacaneum videbitur.

Alius et aptior modus designandi inclinatos.

Quod haec septima proponit, aliter commodius atque brevius sic fiat.

Diviso[a]) limitis seu circuli $ABCD$ quadrante quolibet in gradus 99, velut infra traditum est, deinde a puncto A versus B computatis tot gradibus, quot inscribendus debeat significare inclinatus, et ad huius computationis exitum ponatur Y[b]) nota. Totidem etiam gradus numeren|tur a puncto C versus D punctum, exitusque numerationis huius litera Z[c]) signetur. Deinde regula ex parte una supra punctum A, de parte vero alia Y punctum applicata, eiusdem regulae sectio cum diametro BD ex utraque parte indefinita puncto L notetur. Rursus apposita regula super A et Z punctis, iterum eiusdem sectio cum diametro BD signetur puncto K. Itaque linea KL divisa in aequas partes super N puncto, atque secundum intervallum KN aut LN lineae super N centro posito circulus linietur KL. Dico enim, esse propositum inclinatum atque super A et C puncta necessario evadere, quod sic ostendam:

202v

a) Hs. hat *Divisio.* b) Hs. hat *ponaturij* statt *ponatur Y.*
c) Hs. hat L korr. in Z.

---

7. Proposition. (Fig. 6.)

Konstruktion der Projektion von größten Kreisen, die gegen die Achse geneigt sind.

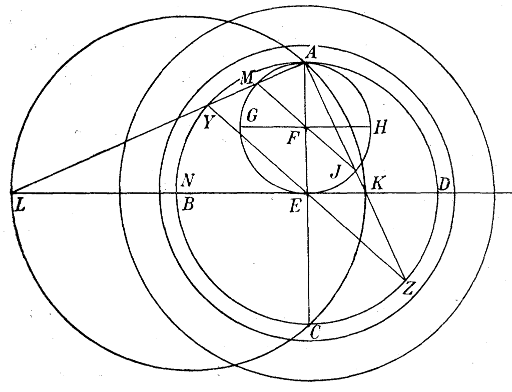


Fig. 6

Gegeben ist die Projektion des Äquators, die Saphea, die noch von 2 Kreisen umgeben ist, auf denen die Teilung in 360° angebracht ist. Man halbiert den Radius AE und zieht um den Halbierungspunkt F den Kreis $AGEH$. Von A trägt man den Bogen AM (= dem Winkel, um den der zu projizierende Kreis vom Pol entfernt ist) ab, zieht MFJ, AML und AJK, die den Durchmesser BD in L bzw. K schneiden. Dann wird über LK ein Kreis geschlagen (Mittelpunkt N), der durch A und C geht. Der Kreisbogen ACK ist die gesuchte Projektion. (Es kommt nur der Teil innerhalb der Saphea in Betracht.)

Der Beweis wird mittels der auf der Projektionsebene und dem „ge-

Sit ergo in praesenti figura punctus Y sectio lineae AML et circuli $ABCD$, productaque AJK, donec ocurrat circumferentiae $ABCD$ in puncto Z, protractis etiam semidiametris EY et ZE. Cum autem per definitionem similium arcuum duo arcus, scilicet AY circuli $ABCD$ et AM circuli $AGEH$,[a]) sunt similes, ergo quot[b]) graduum quadrantis AG fuerit arcus AM, tot etiam graduum quadrantis AB erit arcus AY. Quod autem duo arcus AY et CZ sunt aequa|les, sic liquebit: 203[r]

Nam per eandem definitionem arcus CZ similis est arcui EI. Igitur ex permutata proportionalitate arcus AY aequabitur arcui CZ; nam per 15 primi et 26 tertii *elementorum* Euclidis duo arcus AM et EI sibi mutuo aequantur; constat ergo propositum.

Itaque perspicuum erit, duas semidiametros EY et ZE unam esse rectam per 14 primi eorundem *elementorum*.

Inclinatos igitur circulos per gradus circuli $ABCD$ certius quam per gradus circuli $AGEH$ inscribemus, cum priores posterioribus sint maiores.

Sed aliquis adhuc forte dubitabit duas semidiametros EY et EZ unam esse rectam atque hac de re negabit duos angulos CEZ et AEY tanquam contrapositos aequari. Ergo hic ampliori declarationi erit indulgendus:

Duos angulos FAJ et AJF trianguli AFJ aequos nemo esse inficiabitur; nam per definitionem circuli duo latera AF et FJ aequantur. Pari modo angulus AZE probabitur aequalis | angulo FAZ; ergo duo anguli AIF et 203[v] AZE pares sunt; igitur per 28 primi *elementorum* duae lineae FJ et EZ

a) Hs. hat $AGCH$. b) Hs. hat *quod*.

---

neigten" Kreis senkrechten, die Achse enthaltenden Ebene geführt, in der die einzelnen Seiten und Winkel gleich denen der Figur sind.

2. Art der Konstruktion. (Fig. 7.)

Der Neigungswinkel gegen den Pol wird an der Saphea selbst von A aus gegen B hin abgetragen (Bogen AY = Bogen CZ, YEZ Durchmesser) und die Geraden AY und AZ bis zum Schnitt mit BD gezogen. Die Schnittpunkte sind L und K; über LK wird mit dem Mittelpunkt in N ein Kreis gechlagen, der durch A und C geht und der gesuchte Projektionskreis ist.

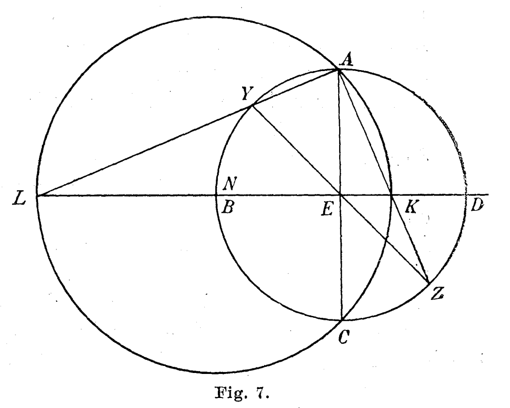


Fig. 7.

Es sei in Fig. 6 Y der Schnitt der Geraden AML mit dem Kreis $ABCD$, Z der Geraden AJK, dann ist Bogen AJ ähnlich Bogen AM, d. h. $\sphericalangle AEY = \sphericalangle AFM$ = dem Neigungswinkel. Ebenso ist $\sphericalangle CEZ = \sphericalangle EFJ$, folglich auch $\sphericalangle AEY = \sphericalangle CEZ$, d. h. YE und EZ bilden eine Gerade, (was noch ausführlicher bewiesen wird.)

Die 2. Konstruktion hat den Vorzug größerer Genauigkeit vor der ersten, da der Bogen des Neigungswinkels an dem größeren Kreis genauer aufgetragen werden kann, als an dem kleineren.

aequidistant; ergo per 29 duo anguli AFJ et FEZ aequantur. Haud aliter duo anguli AFM et AEY probantur aequales. Sed duo anguli AFM et AFJ per 13 primi duobus rectis aequantur. Ergo per communem scientiam: "quae uni et eidem sunt aequalia, inter se sunt aequalia" etiam duo anguli AEY et AEZ duobus aequantur rectis; ergo per 14 primi *elementorum* duae semidiametri EY et EZ sunt etiam una recta; quare per 15 primi eorundem angulus AEY[a]) est aequalis angulo CEZ; et per definitionem arcus AY aequalis arcui CZ; quod erat declarandum. Nunc itaque omnis cessat dubitare.

Propositio octava.

Qua ratione pro plano subiecto aequidistantes compendiose[b]) figurentur edocere. |

204r Descriptis itaque per praemissam inclinatis omnibus pro singulis aut quotlibet gradibus, nunc tractandum est, quo pacto quilibet aequidistantes tumultuarie brevissimeque debent designari.

Sapheae itaque limite, sicut docuit, distincto in quadrantes quatuor, quolibet deinde quadrante in gradus 90, protractis diametris duabus perpendiculariter se secantibus AC, BD;[c]) et sicut in praecedenti figura divisimus AE semidiametrum per aequa, ita nunc semidiametrum BE per aequalia in puncto R secabimus et super eo centro posito iuxta intervallum BR aut RE parvum liniemus semicirculum[d]) $BFGE$, cuius circumferentia per aequa dividatur in puncto S; et uterque quadrans BS et ES in partes secetur aequas 90.

Propositum esto aequedistantem designare, qui gradu uno vel quotlibet iuxta suam repraesentationem recedat a diametro BED. Igitur propositae gradus distantiae inprimis computabimus in quadrante BS ex B versus signum S, atque ad exitum eius posita F nota, cui ex quadrante ES pari arcu, 204v scilicet EG sumpto, | protrahemus lineas duas BFJ et BGH, occurrentes diametro AC utramque in partem indefinitae in punctis J et H. Lineaque HJ per aequa in puncto K divisa, et K posito centro, super eo iuxta intervallum lineae HK aut lineae KJ circulus LHM describatur, secans circulum $ABCD$ in punctis L et M. Quod si nullus intervenerit error, duo arcus BL et DM invenientur sibi invicem aequales, et eorum uterque arcui BF aut EG similis. Non aliter reliquos aequedistantes in eodem semicirculo BCD perficiemus.

Sed paris officii aequidistantem in alio semicirculo, scilicet BAD, ita designabimus:

Si in duobus eodem sumptis arcubus BN[e]) et DP, quorum uterque arcui BL aut DM aequatur, et circini cruribus, ut prius, ad aequidistantis[f]) LHM descriptionem extensis, posito altero eius pede vel in P vel in N punctum, et altero ad semidiametrum AE ex utraque sui parte indefinitam applicato, firmatoque infra Q notam, ab priori crure circumducto designatum igitur in semicirculo BAD habebimus aequedistantem[g]) paris officii una et eadem 205r circini ex|tensione describi posse; quod sic demonstrabitur.

---

a) Hs. hat AEV.
b) Hs. hat compendiosae. c) Hs. hat $ABCD$ statt AC, BD.
d) Hs. hat *semi-* über der Zeile hinzugefügt.
e) Hs. hat BN korr. aus BM. f) Hs. hat *aequedistantes.*
g) Hs. hat *aequedistantes.*

Sit sphaera $TVXY$, quam quoque per primam huius inscriptam hac praesenti saphea $ABCD$ repraesentare intendimus.

Datae igitur sphaerae axis sit TV, per cuius polos T et V circulum TVX inscriptum esse intelligamus. Eandem quoque sphaeram planum $VZ\&$ tangat super polo V. Deinde ex circumferentia $TVXY$ duo sumantur arcus TY et VX aequales duobus arcubus BF et EG circuli BEG super saphaeae $ABCD$ semidiametro BE descripti. Tales autem arcus aequos sumere possimus [!] omnino; nam ut in praemissa duo circuli $TVXY$ et BEG de necessitate pares esse probantur.

Cogitemus igitur per Y et X puncta fuisse descriptum aequidistantem XY, per cuius polos veniat circulus $TVXY$, et protractis rectis duabus TXZ et $TY\&$, quonsque occurrant subiecto plano super [a]) Z et $\&$ punctis, producta quoque $Z\&$, atque circulo | super plano $VZ\&$ descripto, cuius ipsa $Z\&$ fuerit diameter. Dico eum parem esse designato iu proposita saphea aequedistanti MHL; quod sic ostendam. 205v

Protracta inprimis linea ZV, iterum, ut in praemissis, probabimus, duas lineas ZV et $Z\&$ pariter unam esse rectam. Ergo triangulum $TV\&$ per 26 primi *elementorum* aequilaterum atque aequiangulum triangulo BEI habebimus. Nam ex hypothesi angulus BEI aequatur angulo $TV\&$; uterque namque per definitionem rectus est. At angulus $VT\&$ trianguli $TV\&$ per 26 tertii *elementorum* par est angulo EBI trianguli BEI. Et latus BE trianguli BEI par est per hypothesim et sextam huius lateri TV trianguli $TV\&$. Ergo triangulum BEI constat esse aequilaterum triangulo $TV\&$.

Haut dissimili probabimus ratione, rectam VZ aequam esse EH rectae. Igitur ex communi scientia; "si ab aequlibus aequalia demas" $Z\&$ recta | rectae HI par habebitur. Ergo per communem scientam, qua novimus, aequari circulos; quorum pares fuerint diametri, circulus $Z\&$ aequabitur circulo MHL, quod est propositum. 206r

Denique declarandum est, ut, quemadmodum in sphaerica descriptione arcus sphaerici limitis proximis quibusque comprehensi aequedistantibus sibi invicem aequantur, ita quoque super sapheae ipsius limite scilicet $ABCD$ circulo fieri, ut duo arcus eiusdem $ABCD$ limitis duobus proximis conclusi aequedistantibus quibusque pares habeantur.

At pro huius demonstratione intenti literarum numerus nos iam defecit. Tali ergo utamur cautione, ut cum in maioribus pridem ac eas acceperimus figuris, nunc pro principali utamur effigie.

Sit ergo limes sphaericae descriptionis circulus bcd [b]); eiusdem Sphaerae TVX centrum sit a. Ex circumferentia itaque bcd duo sumantur aequi | arcus atque continui de et ef, qui ex circumferentia bcd separentur, tribus aequedistantibus per puncta tria d, e, f designatis, atque super plano $YZ\&$ posito centro super V punctum circulus describatur gh ex sphaera TVX repraesentans circulum bcd. Ex polo itaque T per d, e, f puncta tres rectae Tdg, Teh et Tfi demittantur occurrentes plano VZ in circumferentia ghi, quas per definitionem et praesentem hypothesim eidem obviare necesse est. Huic igitur circumferentiae super tribus occurrant punctis g, h et i. Dico ergo, duos arcus gh et hi duobus arcubus de et ef fore similes, sibi vero aequales. Quod sic patebit. 206v

a) Hs. hat *super* zweimal. b) Hs. hat Bcd.

Ducantur [in] sphaera TVX semidiametri tres ad, ae et af. Protrahan-
207ʳ tur item tres in circulo ghi semidiametri Vg, Vh, Vi. | Cum autem axis TV per hypothesim duabus superficiebus duorum circulorum bcd et ghi perpendiculariter instet, eorundum circulorum superficies per 14 undecimi *elementorum* aequedistant. Quare per 28 primi *elementorum* duae semidiametri ad et Vg aequedistant.

Item ae et Vg, similiter quoque af et Vi, probantur aequedistare. Ergo per 10 undecimi angulus dae aequatur angulo gVh. Pari modo angulus dae aepuabitur angulo gVh. Pari modo angulus eaf aequabitur angulo hVi; ergo per definitionem similium arcuum gh arcus est similis arcui de, et arcus hi similis arcui ef. Ergo permutatim, sicut arcus duo de et ef ex hypothesi aequantur, ita quoque arcus gh et hi pares erunt; quod est intentum.

Item quoque ac eodem probaremus modo, si super circumferentia bcd pares et discontinui sumerentur arcus. |

207ᵛ

Alius et certior modus designandi aequedistantes.

Eorumdem quoque aequedistantium inscriptio fiet commodius per circulum $ABCD$. Nam inprimis propositos gradus aequedistantis designandi computabimus super quadrante BC ex B versus C ad computationis finem posito L puncto. Pari deinde graduum summa super quadrante CD ex D in C [a])

a) Hs. hat DMC statt D in C.

---

8. Proposition. (Fig. 8—10.)

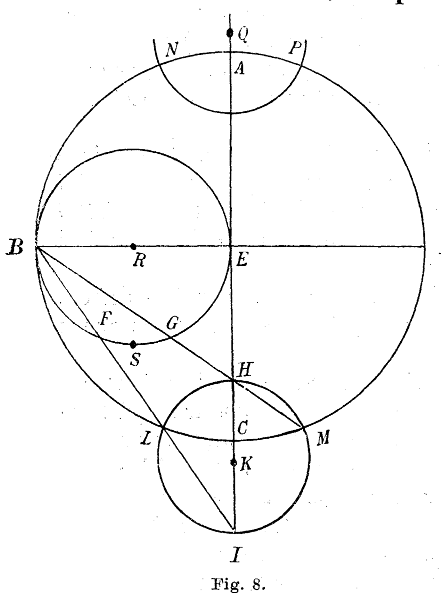


Fig. 8.

Konstruktion der Projektion der Parallelkreise (zu einem Meridiankreis).

Man zieht über dem Halbmesser BE der Saphea den Kreis mit dem Radius $BR = RE$ und macht $BF = EG =$ dem Winkelabstand des zu projizierenden Parallelkreises von der Achse. Dann zieht man BF und BG, die die Linie AEC in I und H schneiden. Der Kreis über IH, dessen Mittelpunkt K ist und der die Saphea in L und M schneidet, ist die gesuchte Projektion.

Die Konstruktion für den entsprechenden Parallelkreis in der anderen Kugelhälfte.

Man macht $BN = BL = PD$, nimmt den Radius KI in den Zirkel und schlägt damit durch N und P einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf AC liegt.

Der Beweis (Fig. 9) wird mittels der auf dem zu projizierenden Kreis und der Projektionsebene senkrechten Ebene geführt, in der gleiche Winkel und Strecken wie in Fig. 8 vorliegen.

recensita, ad huiusque numerationis exitum facta M nota. Posita ergo regula super B et L punctis ipsius cum diametro AC utrimque indefinita communem sectionem puncto I signabimus. Applicata deinde regula super B et M punctis [b]) eius cum diametro AC incidentiam H nota signabimus. Et IH recta per aequa in | puncto K divisa, super eo centro posito iuxta spatium alterum IK aut HK liniato circulo LHM constabit propositum, quod ita liquet. 208r

Scilicet scito super L nota circulo $ABCD$ per rectam BFI, protracta deinceps BG ex parte G, donec circumferentia $ABCD$ occurrat in puncto M, erit itaque per definitionem similium arcuum arcus BL circuli $ABCD$ similis arcui BF circuli BFG, et per eandem definitionem arcus DM circuli $ABCD$ similis arcui EG. Igitur ex permutata proportionalitate arcus BL erit aequalis arcui DM. Ergo dato eodem graduum numero et sive supra circumferentiam BFG sive supra circumferentiam $ABCD$ dicta ratione computato, eundem semper aequedistantem liniabimus.

Hic autem designandorum monus aequedistantium priori certior est, quoniam gradus circuli $ABCD$ longe maiores sunt gradibus circuli BFG, qua de re per eundem circulum $ABCD$ operantes inscribendo aequedistantes minus fallemur. 208v

a) Hs. hat *punctis applicata* statt *punctis*.
b) Hs. hat *eius* korrigiert aus *eis*.

Anhangsweise wird noch mittels ähnlicher Dreiecke bewiesen (Fig. 10), daß gleichen Bögen auf dem Äquator gleiche Bögen auf der Saphea entsprechen.

2. Art der Konstruktion. (Fig. 8.)

Man macht $BL = MD =$ dem Winkelabstand des Parallelkreises von der Achse und zieht die Geraden BL und BM, die die Linie AC in I und H

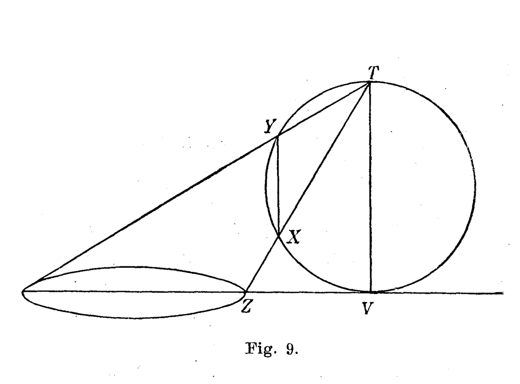


Fig. 9.

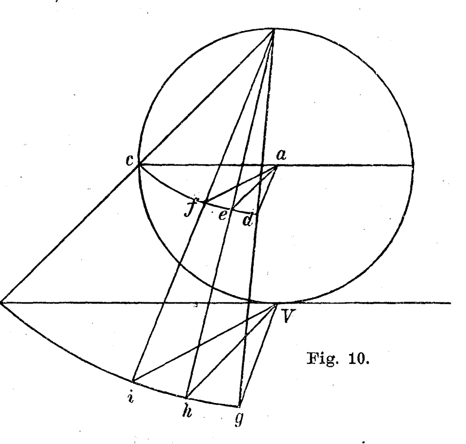


Fig. 10.

schneiden. IH wird durch K halbiert und der Kreis um K mit dem Radius $KI = KH$ gezogen. Der Beweis ergibt sich aus der „Ähnlichkeit" der Bögen, d. h. Gleichheit der Winkel im kleinen und großen Kreis.

Diese Methode ist wieder genauer als die erste, da sie sich des großen Kreises bedient.

Propositio nona.

Praedictos in saphea circulos, tum inclinatos, tum aequedistantes, alia quadam ratione, auxilio scilicet quorundam numerosum designare.

In praemissa et antepraemissa de super plano aliquo inscribendis tam inclinatis quam aequidistantibus viam quandam geometricam patefeci. Sed si cuipiam libeat, eadem, quae praemissae docuerunt, numerorum adminiculo per-
209r ficere, quo quisque suum citius assequatur, no|tum atque inchoatum sapheae opus celerius absolvat, illi profecto, ni fallor, vigiliae laboresque mei non deerint. Idem denique operam deditam me lusisse non penitus autumabit,[a]) qui subiectos numeros ex antea demonstratis auxilioque tabulae dimidiatarum cordarum, quas astronomi moderniores sinus appellitant, quarum maxima seu sinus maximus hoc est: semidiameter circuli complectitur 10000000, computo quodam elicui accuratissimo.

Talis autem supputationis rationem nolui silentio praeterire, quamvis illa cuique in arithmeticis geometricisque rudimentis mediocriter exercitato per praemissa theoremata per se patent. Ne tamen ea lectorem primis mathematicae cunabulis non satis institutum lateat, eorundem quoque numerorum inventionem declarandam hic esse putabam.

Repetamus itaque schema huius septimae propositionis, et nostrum sit
209v intentum, primae tabu|lae numeros contegere.

Igitur arcus CZ unum comprehendat gradum, et proponamus rectam EK computare in partibur, quarum ED semidiameter limitis sapheae 60 continet.

Igitur cum ex hypothesi triangulus AEK notorum sit angulorum, eius quoque cognoscentur latera. Nam angulus AEK rectus est; angulus vero EAK ex hypothesi et 19 tertii *elementorum* gradum dimidium continet. Ideo per 32 primi eorundem angulus AKE gradus habet 89, min. XXX, quorum duo recti faciunt 180.

Si denique super A puncto iuxta quantitatem lateris AK trianguli AEK cogitemus circulum esse designatum, ideo per definitionem latus AK trianguli AEK sinus erit integer, latus vero EK sinus minutiarum XXX, latus autem AE sinus graduum LXXXIX, min. XXX. At iuxta sinuum tabulam, cuius
210r sinus totus habetur partium 10000000, latus AK | erit 10000000, latus AE partium earundem erit 9999619, latus autem EK habebit similes partes 87265. Sint igitur 9999619 numerus primus, 87265 numerus secundus, numerus vero tertius sit 60 iuxta numerum partium semidiametri AE. Quod si velimus EK notam quoque habere in eisdem partibus, quarum semidiameter AE continet 60, igitur iuxta regulam de quatuor numeris proportionalibus ad inveniendum aliquem illorum ignotum, quae super 20 septimi *elementorum* Euclidis fundatur, multiplicabimus tertium cum secundo, et summam productam per primum partiemur, et numerus hac exiens divisione huiusmodi[b]) proportionalitatis quartus erit terminus. Ibi namque proportio primi numeri ad secundum et tertii ad quartum una est, videlicet sicut lateris AE ad latus EK trianguli AEK.

---

a) Hs. hat autumnabit. b) Hs. hat *modi* über die Zeile hinzugefügt.

Summa autem, quae ductis secundi numeri in tertium producitur, erit ibi 5235900, quae cum | a numero primo longe superetur, atque idcirco per eundem partiri non valeat, igitur eadem iterum[a]) per 60 multiplicata — in tot enim minutias unam sexagesiman semidiametri AE subdivido — excrescet numerus 314154000, quibus per numerum primum partitis exibunt minutiae XXXI fere aut paulo amplius unius sexagesimae semidiametri AE. Tanta itaque latus EK habetur ex sexagesimis AE semidiametri; quod erat ostendemdum. 210ᵛ

Non aliter alios inveniemus tabulae primae numeros.

Secundam vero tabulam hoc componemus computo. Septimae propositionis figura rursus assumatur, in qua arcus AY unum quoque gradum contineat. Atqui velut in eadem septima huius declaratum est, angulus LAK sit rectus. Igitur per 8 sexti *elementorum* triangulus EAL similis est triangulo AEK. Ergo angulus | ALE[b]) par est angulo[c]) EAK, et angulus EAL aequalis angulo AKE. Igitur, si super L posito centro iuxta AL circulum imaginabimur descriptum, erit latus AE per definitionem sinus gradus dimidii, latus vero EL trianguli ALE sinus supplementi dimidii gradus, hoc est graduum LXXXIX, min XXX. Quare per eandem tabulam sinuum hypotenusa AL erit 10000000 partium, et earundem EL erit 9999619; similium quoque AE latus invenitur 87265. Sed nostrum est intentum cognoscere magnitudinem EL lateris in partibus, quarum EA latus supponitur esse sexaginta. Igitur 87265 partes lateris AE primus sit numerus, 60 partes eiusdem loteris secundus, et tertius numerus sit 9999619. Facta igitur operatione in praemissis tradita, quartus exibit numerus | 6875 et min XXII[d]) fere; tanta ergo est EL recta in partibus, quarum AE semidiameter habet[e]) 60. 211ʳ 211ᵛ

His deinde 31 uumeris additis, quanta scilicet reperitur EK earundem partium, constabit tota LK in eisdem partibus 6875 minutae LIII fere.

Ideo nota erit diameter inclinati gradui uni servientis, et huius aggregati dimidium, scilicet partes 3437 min. LVI fere, inclinati eiusdem est semidiameter. Hoc itaque dimidium pro tabula secunda primus erit numerus; pari ratione reliquos eiusdem tabulae numeros inveniemus.

Nunc ad declarandos tertiae tabulae numeros accedamus, ubi schematae octavae huius contemplando nobis opus erit.

Ideo causa exempli proponamus computare semidiametrum aequedistantis uno gradu a centro sapheae remoti.

Sit ergo in praedicto schemate arcus BL gradus | unus, quorum circumferentia $ABCD$ possidet tota 360. Et consilium est investigare rectam HI, quae est diameter aequedistantis MHL pro uno gradu distantiae a centro E servientis. 212ʳ

Itaque cum triangulus BEI ex notis exstat angulis, igitur laterum eius proportio cognoscetur. Nam ex hypothesi 19 tertii *elementorum* angulus EBI habet gradus LXXXIX, min. XXX, et angulus BEI ex hypothesi quoque rectus est. Igitur per 32 primi *elementorum* angulus BIE comprehendit ex eisdem gradibus dimidium. Quare, ut prius, latere BI 10000000 partium sup-

---

a) Hs. hat *igitur* in *iterum* korrigiert. b) Hs. hat ALE korrigiert aus AKE.
c) Hs. hat *triangulo* statt *angulo*. d) Statt XXI. Weiter unten richtig.
e) Hs. hat *habetur*.

posito, per dictam sinuum tabulam latus EI continebit earundem 9999619, BE vero latus ex eisdem partibus habebit 87265. Sed quia latus BE dividitur etiam in partes 60, et in eisdem partibus desideramus quoque latus
212ᵛ EI | cognoscere, igitur 87265 primus sint numerus, et 60 secundus numerus et pro tertio numero sint 9999619. Operando ergo iuxta prius traditam proportionalitatis regulam quartus exibit numerus 6875, min. XXI,[a]) qui in declaratione secundae tabulae quartus quoque erat numerus. Quare patet quartum numerum praesentis ostensionis eundem esse cum quarto numero secundae declarationis,[b]) quod hinc etiam liquet.

Quoniam triangulus BEJ schematis octavae aequilaterus semper erit trigono AEL schematis septimae propositionis, modo suppositis BL et AY arcubus aequalibus, sic enim per 26 primi *elementorum* propter AE et BE latera aequalia aequilateri atque aequianguli iidem trianguli probantur.

Sed redeundum est ad id, unde paulo ante dilapsa fuit oratio. Demamus igitur ex EI latere in partibus 60 lateris BE constituto, hoc est ex quarto numero iam invento, EH rectam, quae ex hypothesi et primae tabulae praemissa declaratione constat min. XXXI fere. Earundem partium reliquum erit
213ʳ 6874, min. 50, quantitas scilicet dia|metri HI aequedistantis MHL propositi, quorum dimidium erit 3437, min. 25, semidiameter eius aequantis, primus videlicet numerus tertiae tabulae; quod est intentum.

213ᵛ
Dispositio Tabulae.

214ʳ | Ut autem numeris his quispiam uti rite queat, recta quaedam sumatur semidiametro maximi sapheae limitis, hoc est velut in praecedente figura, cir-

a) Vgl. oben. b) Hs. hat *declinationis*.

---

9. Proposition.

Numerische Berechnung der Projektionen der geneigten Kreise und der Parallelkreise.

1. Geneigte Kreise (Fig. 6). Es sei die Neigung des Kreises, also der Bogen $CZ_1 = 1^0$. Gesucht ist die Strecke EK, wenn der Halbmesser $ED = 60$ gesetzt wird.

Da $\widehat{CZ} = 1^0$, so sind die Winkel des Dreiecks AEK: $\sphericalangle A = 30'$, $\sphericalangle E = 90^0$, $\sphericalangle AR = 89^0\,30'$. Setzt man AK (die Hypotenuse) $= 10000000$, so ergibt sich: $AE = AK \sin 89^0\,30' = 9999619$, $EK = AK \cdot \sin 30' = 87265$. Setzt man nun $AE = 60$ Einh., so ist EK in diesen Einheiten $= 60 \cdot \frac{87865}{9999619}$ $= \frac{31}{60}$ ca.[1])

Ferner ist gesucht der Radius des Projektionskreises in gleichen Einheiten. Zu diesem Zweck wird zunächst EL berechnet. $EL = AL \cdot \sin 89^0\,30'$ also wenn $AL = 10000000$ gesetzt wird, $= 9999619$, $AE = AL \cdot \sin 30' =$

1) Der Verfasser hatte wohl die Absicht, später eine Tabelle der Werte von EK herzustellen, wenn CZ immer um 1^0 zunimmt.

culi $ABCD$ semidiametro aequalis, quae in sectiones aequas sexaginta partiatur, ex qua circini officio capiamus minutias 31 unius sexagesimae dictae lineae iam divisae pro aequidistantibus et inclinatis circulis unius gradus intervallo a centro E distantibus, circinique sic extenti, uno pede immobili intra dati circuli $ABCD$ centrum E defixo alterum transferamus ad quatuor semidiametros AE, EC, EB, $D[E]$, atque signatis super eas punctis singulis, deinde circini officio de linea iam divisa pro inclinatis et aequidistantibus a centro E graduum duorum intervallo recedentibus partem unam, cum minutiis tribus earundem sexagesimarum sumentes eas ut antea transferamus ad eosdem semidiametros limitis $ABCD$.

Hoc itaque operis quousque prosequamus, quoad earundem semidiametrorum ex praemissa tabula quamlibet in 90 distinguamus intervalla, quamvis inaequalia, velut apparet, si modo tam incli|natos quam aequedistantes pro singulis intendamus inscribere gradibus. 214v

Sin autem proximos quosque sive inclinatos sive aequidistantes ad graduum spatia duorum designare nostra sit intentio, nos igitur oportebit in praemissa numerorum tabula numerum unum semper intercalare ac transilire, quo fit, ut in singulis semidiametris[a]) illis divisionum huiusmodi intervalla 45 distinguemus et inclinatos aut aequedistantes 45 tantum, quorum quilibet a proximo duabus secedat partibus sapheae inscribemus.

Qua de re lectorem ulterius edocere nisi penitus geometriae rudem omnino videtur supervacaneum. Sic ergo praecedentis tabulae numeralis usus est declaratus.

Numeralium vero tabularum sequentium prior inclinatorum continet semidiametros in partibus sexagesimis semidiametri maximi limitis.

---

a) Hs. hat semi darübergeschrieben.

87265. Setzt man wieder $AE = 60$ Einh., so ist $EL = 60 \cdot \frac{9999619}{87265} = 6875 \frac{21}{60}$[1]) Einh.

Hieraus ergibt sich der Durchmesser LK des Projektionskreises zu $6875 \frac{21}{60} + \frac{31}{60} = 6875 \frac{52}{60}$ Einh., und der Radius zu $3437 \frac{56}{60}$ Einh. = 3437 Einh. 59 Minuten.[2])

2. Parallelkreise (Fig. 8). Der Winkelabstand des Parallelkreises von der Achse sei 1^0. Gesucht ist der Durchmesser HI des Projektionskreises. Die Ableitung geschieht in analoger Weise wie oben; das Resultat ist: $HI = EI - EH = 6875$ Tl. 21 Min. — 31 Min. = 6874 Tl. 50 Min., also der Radius $KI = 3437$ Tl. 25 Min.[3])

Das Kapitel schließt mit einem Hinweis auf die Konstruktion des Kreises mit dem Zirkel und auf die Verwendung von Tabellen, die nur von 2 zu 2 Grad die Werte angeben.

---

1) Hs. hat $\frac{22}{60}$ und $\frac{32}{60}$.

2) Hierher gehört die nicht ausgeführte Tabelle II für die Radien der Projektionskreise.

3) Der freigelassene Raum von ca. 2 Seiten war für die 3 Tabellen bestimmt.

Inprimis itaque per eandem tabulam habetur semidiameter a centro E recedentis spatio unius gradus, in partibus talium sexagesimarum 343737[a]) 215r cum minutiis 56. Deinde inclinati ab eodem centro E recedentes gradibus duobus semidiameter ponitur earundem partium 1719 cum minutiis 14, et ita de reliquis inclinatorum semidiametris.

Non secus quoque numeralis tertia singulorum aequedistantium semidiametros in eisdem semidiametri ipsius limitis $ABCD$ partibus sexagesimis patefaciet principium numerorum pari sumens ratione. Hunc autem laborem, ni me fallat opinio, tanquam frustra susceptum nemo sane unquam, praesertim sideralis studiosus scientiae, improbabit, ubi potissimum sibi constabit, absque horum numerorum praesidio, prolixa valde ac taediosa incertae palpationis indagine, has semidiametrorum magnitudines oportere investigari.

Propositio decima.

Pro saphea regulam fabricare artificiosam.

215r Igitur aliqua | recta, quae sit AB, sapheae limitis semidiametro sumatur aequalis, et in punctis A et B in partem unam duae rectae AC et BD ex punctis D et C indefinitae perpendiculariter erigantur. Ad eandem quoque partem rectae protrahentur aliae ad lineam quidem AB aequidistantes, apud duas vero rectas AC et BD terminatas, quarum prima de AB recta medii quantitate culmi, secunda vero DC priori duplo aut maiori recedat spatio; tertia deinde a praecedente pari distans intervallo; item quarta ab ista spatio, quantum est culmi dimidium abiens; rursus quinta de priori recedens, quantum sit culmi medietas, quae pro decore, et non ipsius regulae necessitate trahitur; posthaec sexta linea dimidii latitudine culmi ab antecedente propria recedens;[b]) postremo septima, quae de sua propinqua duplo vel ampliori removeatur intervallo.

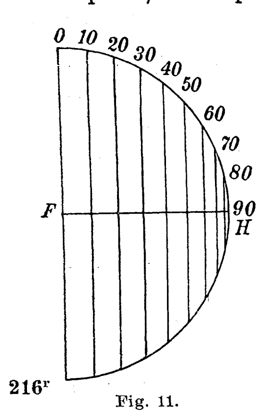


Fig. 11.

216r His lineis septem protractis AB recta ex | A in B per praemissam aut antepraemissam distinguatur, quemadmodum aliqua quatuor semidiametrorum sapheae limitis ex eius centro usque in circumferentiam fuit divisa. Deinde ex punctis huiusmodi divisionis singulis rectae parvulae AC et BD rectis aequedistantes usque ad proximam quidem rectam, de quinque vero in quinque puncta per duo spatiola, idest usque ad secundam

a) Hs. hat *343737* statt *3437*. b) Hs. hat *secedens*.

---

10. Proposition (Fig. 11—12).

Herstellung eines „künstlichen" Lineals zum Gebrauch an der Saphea.

Die Länge des Lineals ist gleich dem Halbmesser der Saphea; auf ihm sind verschiedene Einteilungen angebracht, nämlich 1. eine Teilung in 90 gleiche

lineam rectae AB aequidistantem protrahantur, atque in secundo[a]) hoc spatiolo numerus partium seu graduum de quinque in quinque usque ad 90 atramento[b]) vel minio vel alio quovis signetur colore. Posthac quartum spatiolum inter tertiam et quartam iam protractas aequedistantes in aequas dividatur particulas 60, utraque linearum et tertia et quarta in sectiones aequas distincta 60, et protractis ut prius lineis parvulis AC rectae aut BD aequedistantibus de singulis quidem divisionibus, in quarto spatiolo inter tertiam et quartam rectam tantum | de quivis vero particulis per tertium etiam spatium protractis, hoc est, usque ad secundam rectae AB aequedistantem in hocque tertio intervallo, harum numerus partium, quivis earum collectis inscribatur progrediendo ab AC recta versus BD rectam. 216v

Hae quidem particulae sexagesimarum regulae nomen habeant. Alia deinceps linea diametro maximi sapheae limitis sumatur aequalis, quae sit EG, et hac per medium divisa in F puncto, supra quo centro posito iuxta intervallum EF vel FG semicirculus linietur EHG, cuius circumferentia per aequas secta partes in H puncto recta FH protrahatur, distincto etiam utroque quadrante, et EH et GH, in particulas 90, ad bina earum et parilia puncta, quorum unum sit in quadrante uno, alterum vero in altero[c]) quadrante, hoc est, ad talia puncta duo, quae de G et E punctis super circumferentia EHG arcubus aequalibus removeantur, applicata regula, eiusque se|ctiones cum FH recta singulae notentur, ita quoque recta FH in partes 90 distinguuntur, quae circini officio deinde in quintam transferantur rectam rectae AB iam dudum aequedistanter protractam initio facto ex AC recta versus BD lineam progrediendo, velut eaedem partes super linea FH de puncto F in H punctum procedunt, atque protractis in quinto spatiolo rectis, ut ante AC, parvulis AC et DB aequedistantibus, per quinque vero particulas usque in septimum productis spatium, cui harum numerus partium ex AC recta versus BD rectam procedendo, velut ante, AC inscribatur. Regula itaque in descriptione sua complebitur, cui circa punctum A latitudinem duorum culmorum de regulae ip- 217r

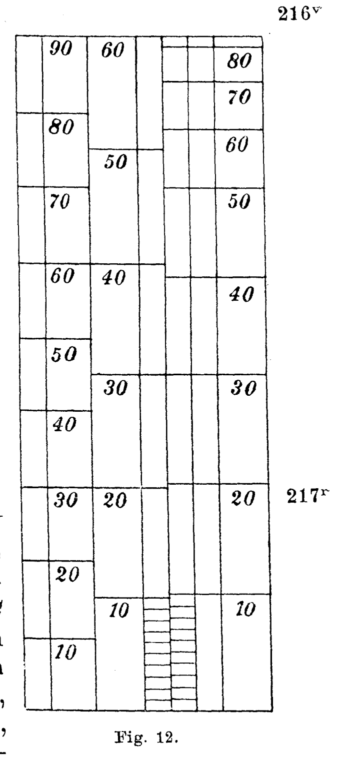


Fig. 12.

a) Zu erwarten wäre *tertio*. b) Hs. hat *attramento*.
c) H. hat *altero* ergänzt.

Teile bzw. in 18 (d. h. die 5. Teilstriche ausgezogen), 2. eine Teilung in 60 gleiche Teile, 3. eine Teilung in 90 ungleiche Teile, die dadurch gewonnen wird, daß man (vgl. Fig. 11) die 90 Teilpunkte zweier benachbarter Quadranten der Saphea paarweise verbindet. Die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit dem die beiden Quadranten trennenden Radius sind die gesuchten Teilpunkte. (Die Abstände der Teilpunkte vom Nullpunkt wachsen proportional dem Sinus.)

sius materiae, de qua fabricata fuit, pars relinquatur quaedam, quidquid vero
217v extra eandem ac rectam AB extiterit, abscin|datur omne praeterea, quod ultra septimam aequedistantem, ac duas rectas AC et BD repertum fuerit, amputetur.

Hoc itaque pacto regula consumata in puncto A mediante claviculo quodam ipsius sapheae centro accuratius infigatur, ita quod ipsa super sapheae plano commode sine impedimento circumferatur.

Ipsa namque regula . . . . . . engeret pro quibuslibet arcubus eorum circulorum, qui per sapheae polos evadunt, a quibus saphea de sphaerae talis inspo . . . . figuratur. Huiusmodi enim circuli super hac repraesentatione per secundam huius lineae deveniunt rectae, et per 7 aut eius sequentem.

Hae autem rectae in gradus dividuntur, velut aliqua semidiametrorum, quae super saphea protrahuntur; sic demum sapheae perfecimus effigiem, circa cuius fabricam hucusque primus huius operis libellus omnis ferme versabatur, qui iam optimi dei ductu clauditur felicissime. |

JOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS DE METEOROSCOPIIS. 218r

LIBER SECUNDUS.
Primi Meteoroscopii constructio.

Propositio prima.

Limitem sapheae designare et in suas debitas partes distribuere.

Super plano aliquo sive in materia,[a]) sive in aere, sive in quacumque alia materia solida et firma, quae ob aeris varias dispositionum qualitates non immutetur facile aut inflecta|tur curvarique possit, circulus quidam $ABCD$ 218v super E centro utcumque describatur, qui *limes* non incongrue appellari poterit. Extra hunc alius calami latitudine a priori distans designetur, post hunc secundus, tertius a secundo per paulo latius habens intervallum pro numero graduum inscribendo describendus est. Hi tres circuli in quatuor dividantur quadrantes.

Id hoc fiet pacto: In limite $ABCD$ dimetiens, utcumque AC agatur, qui quoque in utramque partem AC in directum elongetur, quousque exteriores quoque biduos circulos bifariam metiatur. Deinde in eodem limite diameter trahatur alia BED dimetientem AC super E centro ad rectos secans angulos, quae in utramque etiam partem ipsorum B, D signorum eiecta reliquos etiam circulos exteriores partiatur. |

His itaque duobus dimetientibus AC, BD limes una cum duobus extimis 219r orbibus in quatuor secabitur quadrantes. Horum quisque in 90 aequas distribuatur particulas, quibus graduum sunt nomina. Deinde regula aliqua, in parte una super E centro firmata transferatur pars eius altera super singula divisionis huius signa, ab A videlicet inchoando versus B progrediendo, et unumquemque ad ipsius regulae situm virgula quaedam fiat atramento a limite inchoans in medium desinens orbem, sed quotiens ad quintum quodque pervenias punctum, eadem virgula per duo spatia, id est, usque ad extimum ac tertium orbem est trahenda.

Deinde graduum inscribatur numerus in singulis quatuor quadrantibus, inchoando circa D, B signa progrediendo inprimis inscribendi numeri auctione versus | A, ab eisdem signis B, D initium sumendo procedatur versus C sig- 219v num. Scribendum est autem in utramque partem ipsorum B, D versus A, C signa progrediendo inprimis [quinque], posthaec decem, denique XV et sic deinceps aucto inscripto numero per quinarium, quousque circa A, C signa ex utraque parte nonaginta descripseris gradus. Haec autem numeri inscriptio,

---

a) Hs. hat *materie*.

velut admonui, in secundo intervallo, id est inter medium et extimum fiat circulum, et perfecta erit limitis designatio distributioque, veluti in subiecta patet figura.

Propositio secunda.

Quatuor semidiametros limitis in partes secare. |

220r Quatuor limitis $ABCD$ semidiametri AE, BE, CE, DE ita secentur:

Figatur ipsa regula in una sui parte super B signo, altera vero sui pars applicatur ad punctum primi gradus quadrantis AD, et signetur communis[a]) regulae et dimetientis AC sectio puncto quodam. Deinde in eodem quadrante regula ponatur supra punctum gradus secundi, rursusque, ut ante, communis sectio regulae atque dimetientis AC[b]) signetur puncto quodam. Id itaque fiat, donec deinceps perventum est ad octuagesimi noni[c]) gradus punctum inclusive. Ipsa igitur semidiameter AE in 90 particulas, et hi inaequales, erit concisa.

Hae deinde divisiones in reliquas semidiametros BE, CE, DE circini officio sunt transferendae, posito scilicet pede circini firmo, atque immobili 220v in E centrum, | alteroque mobili extento ad proximum E centro punctum, eoque in tres semidiametros EB, EC, ED circumlato in singulis singula signentur puncta. Hoc itaque continuandum est opus, donec quaevis trium semidiametrorum EB, EC, ED ad instar ipsius AE fuerit insecta. Huius quidem operis demonstratio subiecta declaratur figura.

Eadem quoque semidiametrorum AE, EB, EC, ED sectiones per tabulam numeralem propositionis nonae libri primi fieri possint hoc modo.

Sumatur quaedam recta linea FG aequalis semidiametro limitis $ABCD$, quae in 60 particulas aequales secetur, ex his officio circini sumantur minutiae 31, et transferantur ad quatuor semidiametros, scilicet circini pede uno

a) Hs. hat *ac.* b) Hs. hat *quinti* statt *noni*
c) Hs. hat *conis,* am Rande als *communis* erklärt.

DE METEOROSCOPIIS.

ZWEITES BUCH.
Konstruktion des ersten Meteoroskops.

1. Proposition.

Zeichnung und Einteilung der Saphea.

Auf Holz oder Erz oder sonst ein festes Material wird ein Kreis gezeichnet und von 2 konzentrischen Kreisen umgeben. Der Raum zwischen dem ersten und zweiten Kreise wird in 90° in jedem Quadranten geteilt, die Teilstriche von 5° zu 5° werden in den Raum zwischen dem zweiten und dritten Kreise verlängert

[supra] E limitis centrum fixo, reliquo mobili in quatuor semidiametris EA, EB, EC, ED | quatuor signando puncta. Sic igitur eosdem semidiametros 221r habebis pro gradu uno signatos. Rursus extende circinum ad partem unam et minutias tres unius eadem FG recta linea, uno iterum circini ita extensi, pede in E centrum defixo et altero mobili signabis quatuor semidiametros limitis $ABCD$. Non aliter erit deinceps agendum iuxta tabulam eandem, pro reliquis 90 graduum divisionibus, et si recte fueris operatus, invenies horum quatuor semidiametrorum easdem prioribus sectiones nonaginta.

Propositio tertia.

Intra descriptum supra limitem singulorum graduum orbes inclinatos designare.

Igitur dimetiens BD ipsius limitis in utrasque | partes ad infinitum et 221v rectum protrahatur. Deinde per singula sectionum signa dimetientis BD et duas A, C dimetientis AC extremitates singuli describantur circuli, quorum centra, velut ex 7. propositione primi libri patuit et eius correlario, universa in dimetiente BD utrimque in infinitum eiecta consistunt.

His itaque circulis descriptis semicirculus $ABCD$ limitis uterque, videlicet ABC et CDA, 90 continebit inclinatos orbes descriptos.

Aliter quoque eosdem et facilius inscribere aliquis poterit inclinatos iuxta propositionis traditionem nonae primi libri. Ibi namque demonstratus est modus inscribendorum inclinatorum nunc tradendus.

Alter igitur in limite $ABCD$ semicirculorum ABC, CDA in 90 aequas partiatur sectiones. Deinde regulae parte una in A vel C signo firma|ta, reli- 222r qua ipsius pars ad singula divisi semicirculi signa feratur, punctisque communium sectionum regulae et dimetientis BD ita utrimque in infinitum protracti signatis, ea scribendorum sunt centra inclinatorum orbium. Posthaec circini pede uno in aliquod eorundem punctorum posito reliquus ad A vel C signum extendatur describaturque portio circuli, in A inchoans inque C signo desinens, ea vicem eius geret orbis inclinati, quem centrum, super quo de-

---

2. Proposition.

Teilung der 4 Halbmesser der Saphea (Fig. 13).

Man verbindet den Punkt B mit den einzelnen Graden des Quadranten AD. Die Schnittpunkte mit AE teilen diesen Halbmesser in der gewünschten Weise. Mittels des Zirkels wird die Teilung auf die anderen Halbmesser übertragen. Die Aufgabe kann auch mittels der in Buch I Prop. 9 zu gebenden Tabelle (1) gelöst werden, indem man die in der Tabelle gegebenen Werte von EK von E aus auf den 4 Halbmessern aufträgt. (Länge des Halbmessers = 60 Tl.)

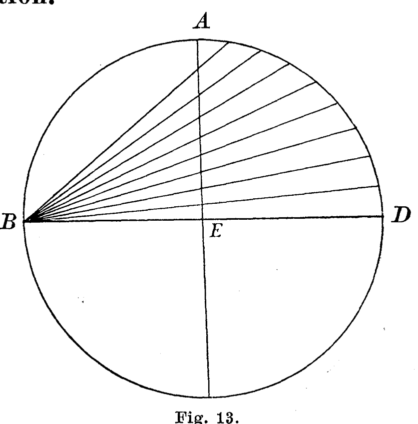


Fig. 13.

scriptus est, indicat, itaque circino sub eiusdem extensionis spatio manente pes eius scriptoreus super A aut C locatur, alter vero in aliam partem dimetientis BD figatur. Iterumque in reliquo limitis semicirculo aequalis priori portio describatur circuli, qui in eodem limitis semicirculo eiusdem geret ordi-

222v nem, priori inclinato descripto. Pari demum ratione pro singulis inclina|torum orbium centris reliquis ceteros describes inclinatos singulos, pares in duobus semicirculis, velut iam pridem admonui, et complebitur sapheae descriptio in orbibus inclinatis.

Tertius quoque modus inscribendi inclinatos habetur ex tabula numerali propositionis nonae libri primi.

Sume rectam lineam FG, quae semidiametrum dati limitis quinquagies[a]) et octies in se contineat, id est habeat ad minus 3438 partes aequales, quantas ipsius limitis semidiameter continet 60. Ex eisdem partibus eiusdem lineae rectae FG numera 3437 et minutias 56 unius, et ad totidem partium intercapedinem extende circini crura, pedeque ipsius uno in A aut C signum locato, altero autem in diametrum utrimque productam BD primum ex parte D fixo, ipsum pedem, qui nunc in A vel C signum fige-

223r batur, circumagendo describe circuli | portionem intra ipsum limitem ab A inchoantem et in C desinentem. Eodem rursus circini pede super C manente, alterum transfer in reliquam diametri BD partem B, ut prius, eodem pede ibidem defixo ex C in A reliquum circumgerendo describe circuli portionem in C inchoantem et in A intra limitem $ABCD$ desinentem. Sic itaque apud dimetientem BC duos utrimque descripsisti. Pari ratione circini cruribus ad easdem partes 1719, minutias 14 eiusdem rectae lineae FG extensis describe duos inclinatos in utroque limitis $ABCD$ semicirculo singulos, veluti iam factum fuit.

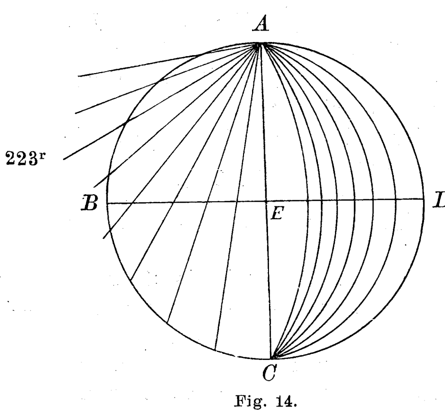


Fig. 14.

Similiter et reliquos inclinatos, usquequo in utroque semicirculo limitis $ABCD$ compleat 89, quantum pro singulis inclinatis circini crura extendi conveniat, ipsa numeralis tabula propositionis nonae primi libri te commone-

223v bit, si numeros et in eorum fronte factas inscriptiones diligenter | inspicias. Nam primo scriptus ad laevam numerus inclinationem continet eius inclinati,

a) Hs. hat *tricies.*

---

3. Proposition.

Konstruktion der Projektionen der geneigten Kreise. Sie wird nach Buch I Prop. 7 ausgeführt; es enthält jeder der beiden Halbkreise 90 „geneigte".

2. Methode (Fig. 14). Man teilt einen der beiden Halbkreise, z. B. ABC in 90 gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte mittels des Lineals mit A

quem descripturus es, et iuxta eum a dextris in eodem versu apparebit numerus partium, quibus extendi convenit circini crura, quod fuit hactenus ostendendum.

Propositio quarta.

Intra datum limitem parallelos delineare.

Descriptis itaque intra datum limitem $ABCD$ inclinatis consequens est, ut tradam, paralleli[a]) qualiter inscribendi sint.

Igitur per propositionem secundam divisis quatuor semidiametris ipsius limitis $ABCD$ describe circuli portionem per tria puncta, quorum unum est| in semidiametro AE, ipsi A proximum, reliqua vero duo eidem A in circumferentia $ABCD$ utrimque proxima, quorum utrumque ab A signo distat, quanta est peripheria gradus unius. Sicque manente circino aequalem quoque describe circuli sectionem circa C signum, posito scilicet uno circuli pede in punctum circumferentiae ABC a polo C per gradum unum distans, et altero in semidiametrum EC in partem C productam defixo. In utrisque itaque semicirculis 90 describantur paralleli. 224r

Sic enim saphea, quoad parallelos, quoque perficietur.

Aliter quoque eosdem parallelos eidem dato limiti inscribes per modum, qui in propositione[b]) octava primi demonstratus est, ponendo scilicet regulam in parte una super D punctum, et alteram eiusdem partem super signum F quadrantis AB, et interse|ctionem regulae et dimetientis AC signa G litera. 224v

Deinde in quadrante AD sume H signum gradu distans uno a puncto A, et, ut ante, super D, H signis applicata regula rursus eius et dimetientis communis sectio sit I.

Ipsa igitur IG recta linea bifariam secetur in K signo, eoque centro sumpto iuxta intervallum IK vel KG circuli portio FGH descripta necessario veniet etiam per F, H signa. Itaque circino manente unoque eius pede posito in punctum circumferentiae BCD distans a C[c]) gradu uno et reliquo circini pede intra diametrum AC ex parte C defixo, par circuli portio in semicirculo BCD describatur. Habebis itaque in utrisque limitis ipsius $ABCD$ semicirculis singulos parallelos iuxta A, C signa singulos significantes gradus.

Pari ratione | ceteri pro reliquis gradibus inscribendi sunt paralleli, velut id ex subiecta figuratione perspicuum est. 225r

In hac praesenti dispositione igitur illa semidiametrorum distinctio seu divisio in secunda propositione tradita non erit necessaria.

a) Hs. hat *pararelli.* b) Hs. hat nochmals: *qui in propositione.*
c) Hs. hat AC statt aC.

---

oder C. Die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit BD sind die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, die dann leicht mittels des Zirkels durch A und C gezogen werden können. Ebenso für den zweiten Halbkreis.

3. Methode. Die Radien der Kreise werden der Tabelle in Buch I Prop. 9 entnommen und mittels des Zirkels die Mittelpunkte von A aus und dann die Kreise selbst konstruiert. Die Radien werden von einer Geraden abgetragen, die mindestens 58 (3438 : 60) mal so groß als der Durchmesser der Saphea ist, da der Radius des ersten geneigten Kreises 3437 Tl. 56 Min. ist.

Postea tertius inscribendorum parallelorum modus ex numerali tabula propositionis nonae primi libri trahitur. Nam divisa recta linea, velut in tertia propositione admonetur, sumptisque *A*, *C* signis perinde atque polis, igitur pro distantia cuiusque paralleli ab *A*, *C* polis circini distendantur crura ad partes totidem, quot[a]) in tabula memorata numerali iuxta distantiam datam in numeris comprehenduntur. Nam tale distensi circini spatium scribendi erit paralleli semidiameter.

225v Deinde | circini sic extensi pede uno ad terminum assumptae circa *A*, *C* polos distantiae posito, et reliquo, velut antemonitum est, in dimetientem *AC* utrimque protractam defixo in duobus semicirculis *BAD*, *DCB* singuli describantur paralleli.

Hic modus brevis expeditusque plurimum habetur. Non enim, velut in primis descriptionibus, laboriosum semidiametri dati paralleli scrutinium requiritur, sed quatuor limitis dati quadrantibus in gradus distinctis, et una recta linea per aequales particulas ipsis semidiametri limitis partibus divisa, parallelus propositus illico describetur. Hic ergo modus parallelos inscribendi est aptissimus. Secundus autem primo aptior.

226r Parallelis quoque demum descriptis, ipsius sapheae | effigies omnino est completa, cuius usum et utilitates, quia nonnulli alii iam pridem utcumque enarraverunt, consulto in hoc meo opusculo praeterire sub silentio decrevi.

Propositio quinta.

Meteoroscopium primum et ipsius regulam construere.

Ex saphea igitur descripta unum sume[b]), velut *ABE*, quadrantem, qui primum est meteoroscopium. Quod si sapheae descriptionem eius tanta gratia

a) Hs. hat *quod*. b) Hs. hat *summe*.

---

4. Proposition.

Konstruktion der Projektionen der Parallelkreise.

1. Methode. (Fig. 15). Man legt Kreise durch je drei Punkte, nämlich durch die beiden, um die gewünschte Zahl von Graden von *A* entfernten Punkte auf der Saphea und den dieser

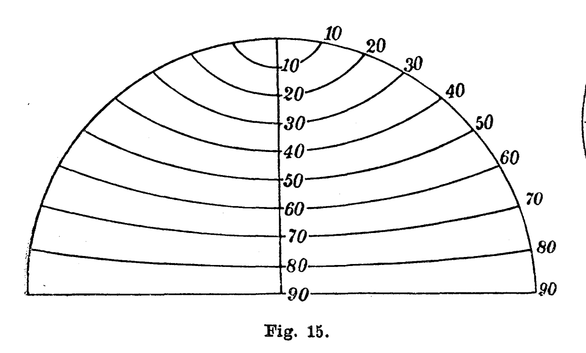


Fig. 15.

Fig. 16.

susceperis, satis erit tibi parallelorum inclinatorumque portiones ad AE, EB latera quadrantis ABE terminare, posthabita videlicet ulteriori descriptione.|

Ita enim in sequenti libro sapheae descripturus sum utilitates, et pro eis 226v inquirendis habendisque sapheae ipsius dumtaxat quadrante sit opus, quamvis alii earundem enarrationes utilitatum sibi totum usurpent limitis orbem, quod abs re quidem non evenit. In explicando enim sapheae usu et commoditate aliam illi, aliam ego secutus sum rationem.

Quapropter nemo mihi vitio dabit, rem, ab aliis[a]) ante me multifaria prosecutam[b]) commentatione, a me quoque novo tractari commentario, cum fere omnes diversis fulciamur considerationibus, neque eisdem pro varia utilitatum investigatione viis ingredientes. Velle suum cuique est, et rerum discolor usus.

Sed nunc est redeundum ad id, unde paulo lapsa est oratio. Ad idem igitur meteoroscopium exercendum, quadam egemus regula, cuius ta|lis est constructio. 227r

In aliquo plano tabulae cuiusdam ex materia solida firmaque et ob variam aeris qualitatem non facile mutabili[c]) protrahe rectam lineam AB aequalem alteri laterum AE, EB quadrantis ABE; ex A in B signum per secundam propositionem dividatur, quemadmodum aliqua quatuor semidiametrorum sapheae ex centro E usque in limitem seu circumferentiam divisa fuit, et fiat ad instar cuiusdam scalae descriptio, scilicet iuxta AB, protrahendo aliam rectam lineam ipsi AB parallelam atque ab eadem calami distantem latitudine, deinde secundam parallelam ampliore spatio a priori parallela recedentem pro numero graduum inscribendo.

Postea educendo perpendiculares parvas ab ipsius AB divisionum signis singulis usque ad primam parallelam, sed de quinque | punctis quibusque 227v protrahes easdem perpendiculares usque in secundam parallelam.

a) Hs. hat *alios*. b) Hs. hat *prosecutos*. c) Hs. hat *mutabilem*.

Zahl entsprechenden Punkt auf dem nach Buch II Prop. 2 geteilten Halbmesser AE.

2. Methode (nach Buch I Prop. 8) (Fig. 16). Man verbindet D mit dem Punkt F, der den gewünschten Gradabstand von A hat. Schnittpunkt mit dem Durchmesser AC ist G. Ebenso erhält man mittels des entsprechenden Punktes H ($AF = AH$) den Schnittpunkt I. IG ist dann der Durchmesser des gesuchten Kreises.

3. Methode (nach Buch I Prop. 9). Man entnimmt die Radien der Kreise der Tabelle bzw. einer Hilfsgeraden wie in Buch II 3. Prop. 3. Methode. Diese Methode ist die genaueste. Von den beiden anderen ist die zweite die bessere.

5. Proposition.

Konstruktion des zum ersten Meteoroskop gehörigen Lineals.

Aus festem Material wird ein Lineal hergestellt, dessen Länge gleich dem Sapheahalbmesser ist und auf ihm eine Teilung, ebenso wie auf diesem, angebracht. Die Teilstriche von 5 zu 5 sind länger ausgezogen und die Zahlen beigeschrieben. Mit dem einen Endpunkt wird es im Mittelpunkt der Saphea drehbar befestigt.



Denique inter primam et secundam parallelam graduum inscribe numerum, incipiens ab A signo versus B progrediendo, in primis quinque, deinde 10, tertio 15, sicque posterius aucto numero per quinarium usque ad gradus LXXXX.

Postremo circa punctum A parvam relique portiunculam, ut foramen fieri possit circulare, cuius centrum sit A signum. Reliquis extra AB rectam et secundam parallelam partibus ipsius tabulae amputatis complebitur ipsius igitur regulae constructio, quae in foramen, cuius centrum fuit A signum, cum parvulo clavo figatur intra E centrum quadrantis, ita, ut ipsa expedite volvi valeat. Consumatum itaque habebis primum meteoroscopium, cuius constructionis demonstrationem primus explicavit liber.

Verum propter ultimam utilitatem, videlicet de hora per solis altitudinem 228r invenienda, et alia | quaedam problemata, opus erit etiam scala sinuum, cuius compositio posterius tractabitur, propositione sexta libri quarti, quae illinc ad 228v hanc assumatur regulam. |

JOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS DE METEOROSCOPIIS. 229r

LIBER TERTIUS.
Primi Meteoroscopii usus.

Hypotheses.

Circuli illi,[a]) qui super communi circumferentiae ac unius lateris sectione in meteoroscopio concurrentes ad alterum eius latus abeant singuli, inclinati dicentur, quod inclinatos circulos in sphaerae superficie designatos repraesentent.

Illos vero super his transversos atque sese vicissim non secantes, quorum alii maiores, quidam vero minores videntur, aequedistantes appellabo, quoniam iidem circulos super sphaera aequedistantes figurant.

Alterum denique meteoroscopii huius latus, super quod videlicet inclinati de communi eorum | concursu descendunt, basim decrevi nominare. 229v

Circumferentiam autem meteoroscopii eiusdem quadrantem, quod quartam circularis peripheriae partem contineat, haud iniuria nominabo.

His sic expositis cunctas organi huius commoditates explicabo brevius etiam, quam restante dici valeant. Sed id in primis esse admonendum arbitror, nonnullas propositiones nec uno tantum modo absolvi posse, cum aliquando idem propositum pariter et aequedistantibus et inclinatis enodabitur, nonnumquam vero solis aequedistantibus, quandoque etiam modis utrisque aliter. Ubi autem id usu veniet, quid tunc fieri doceat, non silebo. Nunc rem ipsam invocato maximi optimique dei nomine tractandam suscipio.

---

a) Hs. hat *circulos illos.*

DE METEOROSCOPIIS.
DRITTES BUCH.

Hypothesen.

Die Projektionen der geneigten Kreise werden selbst gleichfalls „geneigte" Kreise genannt, ebenso die Projektionen der Parallelkreise (aequidistantes) gleichfalls Parallelkreise. Definition von Basis und Quadrant.

Propositio prima.

Pro praesenti organo varium ac multiplicem aperire introitum.

Pro Meteoroscopii huius usu scire nos oportebit diversos introitus numero duodecim.

230[r] Quorum primus est, quando portionibus duo|rum arcuum oblatis inaequalibus earum maiorem, si super quadrante ab ipsius organi basi inchoando numeraverimus, et ad huius numerationis exitum posita regula, per minorem arcum inter aequidistantes computatum, tertium ex regula trahentes arcum, quem idem minor inter aequedistantes numeratus ostendit. Ut sint dati duo arcus inaequales, quibus hoc pacto ad meteoroscopium ingredi iubemur, gradus XXV et XII gradus. Igitur posita regula super gradus XXV quadrantis, et gradus XII a basi quadrantis sursum computati, mox inter aequedistantes indicant nobis ex regula, in primo scilicet ipsius spatio, partes seu gradus quasi XXIX et semis.

Secundus introitus est, quando datis arcubus duobus, uno eorum super quadrantem numerato, et ad huius numerationis finem accomodata regula, per alterum super regulam numeratam, tertius arcus inter aequidistantes nobis offertur. Ut sit arcus unus gradus XXV, alter vero arcus gradus XII; igitur super eorum altero in quadrante numerato applicata regula, et reliquo in eadem regula computato inter aequedistantes arcus tertius apparet gradus 4 minutias L,[a]) seu fere gradus 5.

a) Hs. hat I.

---

1. Proposition.

Lösung von 12 Fundamentalaufgaben (introitus) mittels des 1. Meteoroskops (Fig. 17).

Hierbei wird in einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck aus zwei bekannten Stücken ein drittes bestimmt. Die Seiten des Dreiecks seien λ (Hypotenuse), α und δ, der der Seite δ gegenüberliegende Winkel sei ε. Im allgemeinen wird α, wie die Figur zeigt, an der Basis, λ am Lineal und ε am Quadranten abgelesen, δ ist durch den zugehörigen Parallelkreis bestimmt, ebenso wie α durch den „geneigten Kreis" oder Meridian.

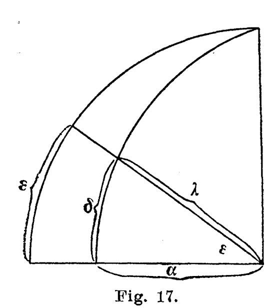


Fig. 17.

1. Gegeben: $\varepsilon = 25^0$, $\delta = 12^0$. Resultat: $\lambda = 29\frac{1}{2}^0$.

Man stellt das bewegliche Ende des Lineals auf 25^0 am Quadranten und sucht den Schnittpunkt mit dem Parallelkreis 12^0; auf dem Lineal wird dann $29\frac{1}{2}$ abgelesen. Entsprechend werden auch die folgenden Aufgaben mechanisch gelöst.

Die numerische Lösung ergibt sich aus $\sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}$ zu $29^0 28'$, zeigt also, daß das mechanische Verfahren innerhalb der Ablesegenauigkeit den richtigen Wert gibt.

Tertius introitus fit, quando datis duobus arcubus | inaequalibus, uno eorum super basi a centro versus quadrantis peripheriam computato, et per reliquum inter aequidistantes super eo inclinato, qui priorem arcum super basi numerato terminat ascendendo numerantes, ac ex regula super talis numerationis finem applicatae, tertiam reperimus arcum. Ut si cum gradibus XXVII et XII gradibus praesens fieri debeat introitus; igitur uno eorum arcuum, velut admonitum est, computato, alterum vero arcum, scilicet graduum XII, super inclinato priorem arcum graduum XXVII in basi terminante si computaverimus, et ad finem numerationis huiusmodi regula diligenter accomodata tertiam habebimus ex eadem regula graduum summam XXIX et semis fere. In hoc tertio introitu nihil refert, utrum praepositorum[a]) arcuum super basi computemus. Semper enim idem invenietur. 230ᵛ

Quartus introitus fit, quando, velut praemittitur, praepositis duorum arcuum numeris, unus super basi, alter vero super inclinato accipitur, tertium ex quadrante inter basim et regulam comprehensum trahimus.[b]) Ut sint praepositi arcus gradus XXVII et gradus XII. Si enim gradus XXVII super basi computaverimus, erit tertius[c]) ex quadran|te gradus XXV minutae XX fere. Si vero XII gradus super basi sumpserimus, erit arcus tertius fere gradus LXVIII minutae XX. 231ʳ

Quintus introitus fit, datis arcubus duobus, quando unum in regula numeratum applicamus aequedistanti, qui eorum alterum significat, tertium ca-

a) Hs. hat praepositum. b) Hs. hat *trahimus* korr. aus *facimus*.
c) Hs. hat certius.

2. Gegeben: $\varepsilon = 27^0$, $\lambda = 12^0$. Resultat: $\delta = 5^0$.

Aus $\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda$ ergibt sich $\delta = 5^0 2'$.

3. Gegeben: $\alpha = 27^0$, $\delta = 12^0$. Resultat: $\lambda = 29\frac{1}{2}{}^0$.

Aus $\cos\lambda = \cos\alpha \cdot \cos\delta$ ergibt sich $\lambda = 29^0 22'$. α und δ können bei dieser Aufgabe vertauscht werden.

4. Gegeben: a) $\alpha = 27^0$, $\delta = 12^0$. Resultat: $\varepsilon = 25^0 20'$.
b) $\alpha = 12^0$, $\delta = 27^0$. Resultat: $\varepsilon = 68^0 20'$.

Aus $\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\delta : \sin\alpha$ ergibt sich $\varepsilon = 25^0 5'$ bzw. $67^0 48'$.

5. Gegeben: $\lambda = 12^0$, $\delta = 5^0$. Resultat: $\varepsilon = 25^0$.

Hierbei ist $\sin\varepsilon = \frac{\sin\delta}{\sin\lambda}$; die Aufgabe ist die gleiche wie Aufgabe 1, ebenso das gewählte Zahlenbeispiel.

6. Gegeben: a) $\varepsilon = 30^0$, $\lambda = 25^0$. Resultat: $\alpha = 22^0$.

pientes ex quadrante inter basim et regulam compreheusum. Sicut duo arcus, quorum unus sit gradus XII, alter gradus V, quod si super regulam gradus duodecim computaverimus, et huius computationis termino regula super reliquum inter aequedistantes numeratum diligenter applicata tertius ex quadrante reddetur arcus grad. XXV fere.

Sextus introitus est, quando datis numeris duobus, super uno illorum in quadrantis peripheria numerato, posita regula, reliquum in eadem regula numerantes, et per inclinatum, qui eum[?] directe ad basim descendentes, eum accipimus numerum, qui super basim centro et eodem inclinato clauditur. Ut sint 231v propositi numeri XXX et XXV, si super | XXX in quadrante regulam accomodaverimus, per reliquum sumemus ex basi gradus XXII. Sin autem contra fecerimus, habebimus ex basi gradus XXVII et quasi semis.

Septimus introitus est, quando propositis duobus arcubus unum eorum super regula computatum ad alterum inter aequidistantes numeratum per regulam accomodantes tertium, qui centro et inclinato priorem propositorum numerorum terminante clauditur, ex basi sumimus. Ut sint propositi graduum numeri XXX et XIIII, ergo gradibus XXX per regulam super XIIII inter aequedistantes applicatis tertium ex basi numerum obtinebimus graduum fere XXVII.

Octavus introitus fit, datis arcubus duobus et super unum eorum in quadrante numeratum posita regula, per alterius vero super basim computati finem inclinatus evadens quaesitum in regula numerum tertium ostendet. Ut si posuerimus regulam supra gradus XXV quadrantis et supra basim gradibus 232r XX computatis, per inclinatum, qui eos in basi terminat gradus, ex | regula XXII sumimus, qui tertium perhibent numerum. Ac si gradus XX in quadrante atque gradus XXV supra basim numeravimus, tertius emerget numerus graduum XXVI et semis fere.

---

b) $\varepsilon = 25^0$, $\lambda = 30^0$. Resultat: $\alpha = 27\frac{1}{2}^0$.

Aus $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\lambda \cdot \cos\varepsilon$ ergibt sich $\alpha = 22^0 0'$ bzw. $27^0 37'$.

7. Gegeben: $\lambda = 30^0$, $\delta = 14^0$. Resultat: $\alpha = 27^0$.

Aus $\cos\alpha = \dfrac{\cos\lambda}{\cos\delta}$ ergibt sich $\alpha = 26^0 48'$.

8. Gegeben: a) $\varepsilon = 25^0$, $\alpha = 20^0$. Resultat: $\lambda = 22^0$.

b) $\varepsilon = 20^0$, $\alpha = 25^0$. Resultat: $\lambda = 26\frac{1}{2}^0$.

Aus $\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha : \cos\varepsilon$ ergibt sich $\lambda = 21^0 53'$ bzw. $= 26^0 23'$.

9. Gegeben: a) $\varepsilon = 25^0$, $\alpha = 20^0$. Resultat: $\delta = 9^0$.

b) $\varepsilon = 20^0$, $\alpha = 25^0$. Resultat: $\delta = 8^0 40'$.

Aus $\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varepsilon \, \sin\alpha$ ergibt sich $\delta = 9^0 4'$ bzw. $8^0 45'$.

Nonus introitus est, quando datis duobus arcubus atque iuxta praecedentem introitum numeratis, tertium ex inclinato, qui alterum eorum in basi numeratum terminat, accipimus, computemus, ut prius, gradus XXV in quadrante et gra. XX supra basim, et ex inclinato gra. XX super basim terminante inter eandem basim et regulam tertius exhibebitur numerus graduum ferme IX. Si vero contra fecerimus, gradus excipiemus VIII minutias XXXX fere.

Decimus introitus fit, oblatis numeris duobus, et uno etiam super basi, altero in regula recensito. Deinde regula ipsa sensim vel levata vel depressa, donec finis computati super eam numeri inhaereat inclinato priorem numerum super basim terminanti; arcus enim quadrantis | ipsa regula et basi comprehensus, quaesitum ostendet numerum. Sint ergo duo arcus, quorum unus gradus XX, alter vero gradus XXII complectatur. Deinde puncto regulae grad. in ea XXII terminante paulatim aut sublato aut submisso quoque, usque insideat inclinato ex basi gradus XX claudenti mox ex quadrante, inter basim et regulam tertius proditur numerus graduum XXV. 232v

Undecimus introitus fit, quoties, ut in praecedenti introitu, duobus arcubus computatis tertium accipimus ex inclinato inter basim et regulam conclusum. Itaque praemissis duorum arcuum numeris XX et XXII, ut praecedens admonet introitus, computatis tertius numerus invenitur grad. IX et ferme minutiarum X.

Duodecimus introitus fit, quoties duobus arcubus propositis, super uno eorum in quadrante regula posita, per alterum vero consideremus eum inclinatum, qui per communem vadit sectionem aequidi|stantis eundem alterum numerum significantis, ut regula, et prius, applicata in eundem igitur inclinatum et centrum super basi tertius apparebit numerus. Velut si propositi duo arcus fuerunt gradus XXXXI et gradus XXIIII, his hoc modo in meteoroscopium missis, accipimus ex basi gradus XXXI minutas fere XX. 233v

---

10. Gegeben: $\alpha = 20^0$, Resultat: $\varepsilon = 25^0$.
$\lambda = 22^0$.

Aus $\cos\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\lambda$ ergibt sich $\varepsilon = 25^0 44'$.

11. Gegeben: $\lambda = 22^0$, Resultat: $\delta = 9^0 10'$.
$\alpha = 20^0$.

Aus $\cos\delta = \frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}$ ergibt sich $\delta = 9^0 21'$.

12. Gegeben: $\varepsilon = 41^0$, Resultat: $\alpha = 31^0 20'$.
$\delta = 23^0$.

Aus $\sin\alpha = \operatorname{tg}\delta : \operatorname{tg}\varepsilon$ ergibt sich $\alpha = 29^0 14'$.

Am Schlusse macht der Verfasser noch darauf aufmerksam, daß man auch die Minuten durch passende Teilung des Raumes zwischen aufeinanderfolgenden Graden ablesen könne, indem man für 15′ ein Viertel, für 12′ ein Fünftel usw. nehme.

Da diese Aufgaben im folgenden stets wiederkehren, sei hier nochmals eine Zusammenstellung gegeben:

Inter hos autem introitus duodecim nullus alteri consentit, praeter primum et quintum, qui, quamvis in operatione sint diversi, in tertio tamen arcu reperto concordant; utroque enim idem nobis exhibebitur arcus.

Super quolibet denique praemissorum introituum, quotiens unus aut uterque numerorum introitualium non integris tamen consistit numeris, sed etiam minutias complectitne, ea tunc utemur cautela, ut eisdem minutiis ad LX comparatis notemus. Quanta de LX sint portio, tantam quoque sectionem de spatio inter duos vel inclinatos vel aequidistantes proximos, in quo finis introitualis numeri ceciderit, assumamus. Velut si minutiae XV integris gra- 233v dibus accesserint, quarta huiusmodi | spatii sumenda erit, quoniam XV quadrans sunt ex LX. Si XII minutiae superent, quintum spatii occurrentis iuxta aestimationem nostram accipiemus, quoniam XII de LX quinta pars existunt, si XX, tertium; si XXX, dimidium; si XXXX, duo tertia; si L minutiae crescant, quinque sexta; si X, sextum unum ipsius occurrentis spatii iuxta introitualem numerum opinione nostra computemus. Et id in omnibus usu veniet propositionibus.

Propositio secunda.

Cuiuslibet puncti super orbita solari propositi eum ab aequatore recessum, quem aiunt declinationem, prope verum dimetiri.

Igitur maximam solis declinationem, quae nostra deprehenditur aetate, gradus ferme XXIII minut. XXVIII, quadrante computatam, cum arcu solaris 234r itineris | dato puncto atque proxima aequalitatis notae concluso, per introi-

Nr.	Gegeben	Gesucht	Auflösung
1.	δ, ε	λ	$\sin\lambda = \sin\delta : \sin\varepsilon$
2.	ε, λ	δ	$\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda$
3.	α, δ	λ	$\cos\lambda = \cos\alpha \cdot \cos\delta$
4.	α, δ	ε	$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\delta : \sin\alpha$
5.	δ, λ	ε	$\sin\varepsilon = \sin\delta : \sin\lambda$
6.	λ, ε	α	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\lambda \cdot \cos\varepsilon$
7.	λ, δ	α	$\cos\alpha = \cos\lambda : \cos\delta$
8.	α, ε	λ	$\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha : \cos\varepsilon$
9.	α, ε	δ	$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \sin\alpha$
10.	λ, α	ε	$\cos\varepsilon = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\lambda$
11.	λ, α	δ	$\cos\delta = \cos\lambda : \cos\alpha$
12.	δ, ε	α	$\sin\alpha = \operatorname{tg}\delta : \operatorname{tg}\varepsilon$.

2. Proposition.

Bestimmung der Deklination eines Punktes der Sonnenbahn (Ekliptik).

tum II.[a]) meteoroscopio demergamus, arcus itaque repertus intentum praestabit.

Ut autem, quod praeceptio haec admonet, cognitu sit facilius, cupiat quispiam experiri, quanta sit declinatio capitis seu initii geminorum, is per praemissam doctrinam illico deprehendet quaesitam declinationem esse quasi graduum XX et minutiarum XII, facto scilicet introitu secundo cum gradibus XXIII minutiis XXVIII maximae declinationis atque gradibus LX; tanto enim arcu geminorum caput ab puncto vernalis aequalitatis removetur.

Propositio tertia.

Oblata declinationi respondens ex solari via punctum indagare.

Igitur per primum aut quintum introitum maxima solis declinatio cum declinatione proposita huic organo committatur; arcus enim extractus propositum ab | solvet. 234v

Sit ergo declinatio oblata gradus XX minutiae XII. Ea cum gradibus XXIII minutiis XXVIII meteoroscopio demersa gradus nobis reportabit LX; tot igitur quaesitus punctus ab altero aequinoctiorum aequalitate recedit. Verumtamen, cum in signifero quatuor huiusmodi puncta reperiantur, hoc pacto non poterimus definire, cui ex illis talis declinatio debeatur, nisi nobis dixerit aliquis, quam zodiaci quartam propositum possideat punctum. Earum autem quartarum una est vernalis, quae de arietis inchoans in cancri principium exit, alia aestivalis, quae hinc capiens initium capite terminatur librae, tertia deinde

a) Hs. hat II korr. aus III.

Es sei in Fig. 18 λ die Länge eines Punktes der Ekliptik (Abstand vom Frühlingspunkt auf der Ekliptik gemessen), δ die Deklination dieses Punktes und ε der Winkel zwischen Äquator und Ekliptik (Ekliptikschiefe; $\varepsilon = 23^0\ 28'$), dann erhält man die Deklination δ durch Aufgabe 2 ($\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda$). Zum Beispiel ergibt sich für das „caput seu initium" der Zwillinge ($\lambda = 60^0$) $\delta = 20^0\ 12'$. [rechnerisch $20^0\ 10'$].

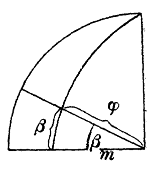


Fig. 18.

3. Proposition.

Umkehrung der vorigen Aufgabe; Bestimmung der Länge eines Punktes der Ekliptik aus der Deklination.

Lösung mit Aufgabe 1. ($\sin\lambda = \sin\delta : \sin\varepsilon$) Als Beispiel wird das gleiche wie oben gegeben und dabei darauf hingewiesen, daß noch der Quadrant des Tierkreises, in dem der betreffende Punkt liegen soll, angegeben sein muß, da sonst der einen Deklination 4 Längen entsprechen können.

4. Proposition.

Bestimmung der maximalen Deklination der Sonne d. h. der Ekliptikschiefe aus Deklination und Rektaszension eines Punktes des Tierkreises.

autumnalis, quae de principio librae incipiens initio capricorni finitur, postrema est hiemalis inde inchoans et in arietis caput exiens.

Propositio quarta.

Exhibita signiferi portione cum eius declinatione maximum solis ab aequatore recessum scrutari.

235r Quod si datus zodiaci arcus ab capite arietis | inchoans quadrante minor fuerit, ipse numerorum introitualium unus erit. Sin autem maior, minor tamen semicirculo, ipse semicirculo demptus introitui numerum aptum relinquet. Quod si semicirculo superetur, quadrantibus tamen tribus minor, eodem semicirculum dementes reliquum numerum pro introitu nostro servemus. Ubi autem tres excedit quadrantes, datae signiferi portionis arcum ex gradibus CCCLX sive signis duodecim auferentur, reliquum servemus iterum pro uno intervallium numerorum, cum quo et declinatione proposita primus aut quinus fiat introitus. Sic enim maxima solis prodibit declinatio.

Veluti si proposita sit declinatio graduum XX cum minutis XII duobus signis ab arietis capite inchoatis debita, et nostra fuerit intentio maximam solis declinationem reperire. Igitur per primum aut quintum introitum gradus LX cum gradibus XX minutiis XII propositae declinationis meteoroscopio committamus, illo [a]) namque quaesita solis maxima declinatio reddetur gradus XXIII et semis fere.

Propositio quinta. |

Cuiusvis arcus solaris orbitae, qui de puncto aequinoctii ver-235v nalis inchoet, gradus aequatoris, quibus ipse in horizonte recto peroritur, investigare.

Quod si datus signiferi arcus a capite arietis initium habuerit, et quadrante fuerit inferior, eum cum maxima solis declinatione supra quadrantem numerata per sextum meteoroscopio introitum inducamus. Numerus enim ita repertus, intentam praebebit ascensionem rectam. Ut si propositum fuerit invenire arcum aequatoris, qui toti arietis signo secundum horizontem rectum cooriatur. Ergo per introitum sextum maximam solis declinationem in qua-

a) sc. modo.

Lösung mit Aufgabe 5 ($\sin \varepsilon = \sin \delta : \sin \lambda$). Das Beispiel ist das gleiche. Ist $180^0 > \lambda > 90^0$, so wird der Winkel $180^0 - \lambda$ benutzt, für $270^0 > \lambda > 180^0 : \lambda - 180^0$, für $360^0 > \lambda > 270^0$: $360^0 - \lambda$. Duo signa = zwei Tierkreiszeichen wird an Stelle von 60^0 gebraucht; XII signa = 360^0.

5. Proposition.

Bestimmung der Rektaszension eines Punktes des Tierkreises aus seiner Länge.

Lösung mit Aufgabe 6. ($\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \lambda . \cos \varepsilon$).
Beispiel: $\lambda = 30^0$; $\alpha = 28^0$. (Numerisch $27^0\ 54'$).

drante numeratam cum gradibus XXX signi arietis meteoroscopio si immittamus, ascensio recta graduum quasi XXVIII emergit; quod est propositum.

Idem quoque qer solos conficiemus aequedistantes, facto scilicet introitu aut primo aut quinto per dati arcus complementum atque complementum declinationis puncti | zodiaci eundem arcum terminantis; complementum namque 236r arcus extracti propositi arcus signiferi recta erit ascensio.

Repetam ergo signum arietis, cuius ascensionem rectam invenire desidero, declinatio puncti arietis signum terminantis est per secundam huius ferme graduum XI minutiarum XXX, quibus demptis quadranti [a]), hoc est gradibus LXXXX, reliquum, scilicet grad LXXVIII et semis, cum gradibus LX, complemento scilicet oblati arcus, per primum aut quintum introitum organo huic immittemus; gradus elicio LXII, quorum complementum, scilicet gradus XXVIII, quaesitam iterum praestabit ascensionem rectam. Complementum autem eum voco arcum, qui relinquitur dempto arcu aliquo de gradibus LXXXX. Ubi vero proposita zodiaci portio quadrantem circuli superaverit, semicirculo tamen minor, ipsum de semicirculo auferentes residui rectam ascensionem iuxta praemissum praeceptum quaeramus, qua de semicirculo sublata quaesita relinquetur ascensio recta. Quod si datus signiferi arcus semicirculum excedens minor fuerit tribus quadran|tibus, ergo ipsi semicirculus dematur, et reliqui 236v quaeratur ascensio recta, quae semicirculo rursus addita rectam, [b]) quae petebatur, constabit ascensionem; ablata demum zodiaci portione, maiore quidem quadrantibus tribus, ipsa gradibus CCCLX, id est toti circulo, sublata residui denique arcus iuxta praeceptum iam traditum, recta inveniatur ascensio, qua dempta toti circulo propositum item constabit.

Illud tamen neminem puto latere, quod quadrans zodiaci ex aequinoctio vernali principium habentis in horizonte recto cum aequatoris quadrante peroriatur, at semicirculus zodiaci, inde quoque exorti cum semicirculo aequatoris et quadrantes eius tres ab eodem vernali aequinoctio inchoati pro ascensione recta tres habeant aequatoris quadrantes.

Propositio sexta.

Ascensione proposita recta de vernalis aequinoctii puncto principium habente signiferi arcum, qui ascensioni huiusmodi debeatur, elicere. | 237r

a) Hs. hat quadrantibus. b) Hs. hat rectamque korr. in rectam.

Andere Art der Lösung (per solos aequedistantes). Man sucht zuerst die Deklination δ des Punktes mit Aufg. 2 $(\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda)$ $(= 11^0\,30'$, numerisch $11^0\,29')$. Dann wendet man Aufg. 1 auf die Komplementwinkel von λ und δ an $\left(\cos\alpha = \frac{\cos\lambda}{\cos\delta}\right)$ und erhält so den Komplementwinkel von α; es werden somit hier $90^0 - \lambda$ und $90^0 - \delta$ am Quadranten gemessen und $90^0 - \alpha$ am Lineal abgelesen. Die Elimination von δ aus den Gleichungen $\cos\alpha = \frac{\cos\lambda}{\cos\delta}$ und $\sin\delta = \sin\varepsilon \cdot \sin\lambda$ ergibt $\cos\alpha = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \sin^2\lambda}}$ oder, wie oben, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\lambda \cdot \cos\varepsilon$. Beispiel wie oben; $\delta = 11^0\,30'$.

Für die Fälle $\lambda > 90^0$ werden wieder die obigen Regeln gegeben.

Igitur cum maxima solis declinatione atque cum datae rectae ascensionis arcu supra basim computato, introitus fiat octavus, qui namque sic excipitur arcus quaesitum ostendet. Haec quidem ita fiunt, dum proposita recta ascensio quadrantem non excesserit. Velut si ascensio recta fuerit graduum XXVIII, ea supra basim computata cum gradibus XXIII minutis XXVIII per introitum octavum meteoroscopio si committatur, intentum emerget graduum XXX zodiaci, quibus data competit ascensio recta.

Aliter vero propositum per solos aequedistantes sic expedietur. Imprimis secundo introitu per declinationem solis maximam in quadrante computatam, atque complementum ascensionis rectae, si ipsa quadrante fuerit inferior, arcus extrahatur, quo de gradibus LXXXX dempto, reliquum cum ascensione recta primo vel quinto introitu meteoroscopium repetat; elicitus itaque arcus est signiferi portio, cui data respondet ascensio recta. Sit ergo, ut ante, recta ascensio grad. XXVIII; cum eius itaque complemento graduum LXII atque 237v maxima solis declinatione grad. XXIII et | semis fere super quadrante numerata secundus fiat introitus, arcuque invento de gradibus LXXXX sublato reliquum cum ascensione recta grad. XXVIII primo vel quinto introitu meteoroscopio si rursus immittatur, elicitur nobis quaesita zodiaci portio graduum ferme XXX; quod est intentum.

Quando vero dabitur ascensio recta quadrante maior, minor tamen semicirculo, ea semicirculo detrahatur, et residui debitus investigetur ex dicta doctrina signiferi arcus, qui semicirculo iterum sublatus propositum relinquet.

At si data recta ascensio fuerit maior semicirculo, minor tamen quadrantibus tribus, ipsi semicirculus auferatur, cum reliquo arcus signiferi velut ante quaeratur, quo dimidiae circumferentiae adiecto rursus constabit intentio.

Ubi demum datus ascensionis arcus rectae, quadrantes tres superaverit, ipse toti circulo dematur, quo iterum, ut prius, zodiaci arcus inveniatur, qui toti circulo sublatus arcum relinquit, qui de zodiaco datae ascensioni rectae competit. Id quoque neminem fugiat in horizonte recto quadrantem aequatoris 238r zodiaci quartae deberi semicirculum quoque semicirculo et quadrantes | tres tribus quadrantibus cooriri, ipsos scilicet computando de punctis aequinoctialibus.

---

6. Proposition.

Bestimmung der Länge eines Punktes des Tierkreises aus seiner Rektaszension.

Lösung mit Aufgabe 8 ($\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha : \cos\varepsilon$). Beispiel $\alpha = 28^0$, $\lambda = 30^0$.

Andere Art der Lösung (per solos aequedistantes). Man wendet auf ε und $90^0 - \alpha$ Aufg. 2 an und erhält einen $\sphericalangle\,\varphi$ ($\sin\varphi = \sin\varepsilon\cos\alpha$), dann auf $90^0 - \varphi$ und α Aufg. 1 (oder 5) und erhält λ $\left(\sin\lambda = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}\right)$. Die Elimination von φ aus den beiden Gleichungen ergibt: $\sin\lambda = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\varepsilon\cos^2\alpha}}$ oder, wie oben, $\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha : \cos\varepsilon$. Das Zahlenbeispiel ist das gleiche, jedoch der Hilfswinkel nicht angegeben.

Propositio septima.

Lunae latitudinem explicare.

Si itaque argumentum latitudinis lunae quadrante minus fuerit, ipsum cum gradibus in quadrante computatis maximae latitudinis lunae organo praesenti committamus per secundum introitum. Quod enim ita consurget, latitudo lunae quaesita erit. Ut sit argumentum latitudinis lunae graduum XXXXV, eos cum gradibus V maximae latitudinis lunae, supra quadrantem numeratis per secundum introitum meteoroscopio immergens excipio gradus III et semis; tanta est ergo latitudo lunae pro subiecto latitudinis argumento, et septentrionalis ascendens.

Ubi autem hoc argumentum quadrantem excesserit, minus tamen semicirculo, ipsum de semicirculo dematur, | et cum reliquo atque gradibus V latitudo lunae, ut prius, investigetur, quae erit septentrionalis descendens. Quando vero idem argumentum semicirculum superat, minus tamen quadrantibus tribus, et semicirculum demamus, cum residuo atque gradibus V, ut prius, agendum est. Sicque reperta lunae latitudo meridiana vocabitur ascendens. 238v

Hoc ipso denique argumento gradibus CCLXX, id est quadrantibus tribus maiore ipsum toti circulo detrahatur, et cum residuo atque gradibus V latitudo lunae, velut ante, investigata meridiana descendens appellabitur.

Eodem argumento nullo aut semicirculo nulla habebitur lunae latitudo; quare tunc luna constituetur vel in capite vel in cauda draconis, cum autem ipsum fuerit quadrans aut quadrantes tres, tunc eadem lunae latitudo maxima est graduum V, hic quidem septentrionalis, illic vero meridiana, quando scilicet hoc argumentum tres amplectitur quartas.

Propositio octava. | 239r

Punctum in zodiaco finiens arcum, qui ascensionem suam rectam maxime superet, invenire.

Ad hoc itaque faciendum, ille notetur aequedistans, qui tot a basi recedat gradibus et minutiis, quot[a]) solis maximae declinationis complementum continet.

a) Hs. hat quod.

---

7. Proposition.

Bestimmung der Breite des Mondes, (Fig. 18).

Bezeichnen wir die Breite des Mondes mit β, seine maximale Breite d. h. den Winkel zwischen Mond- und Erdbahn mit β_m ($= 5^0$) und seinen Abstand vom Schnittpunkt der Mond- und Erdbahn, das „argumentum latitudinis“, mit φ, so gilt: $\sin\varphi = \sin\beta : \sin\beta_m$. Die Aufgabe wird deshalb mit Aufg. 2 gelöst.

Beispiel: $\varphi = 45^0$, $\beta = 3\frac{1}{2}^0$ (numerisch $3^0 32'$) (septentrionalis ascendens, für $190^0 > \varphi > 90^0$ sept. descendens, für φ im 3. Quadranten meridiana ascendens, im 4., meridiana descendens). Für $\varphi = 0$ oder $= 180^0$ wird $\beta = 0$ d. h. der Mond steht im Drachen oder im 180^0 entfernten Punkt (caput vel cauda draconis); für $\varphi = 90^0$ oder $= 270^0$ wird $\beta = 5^0$, d. h. gleich der maximalen Breite.

Deinde regula basi tam diu removeatur, aut eidem appropinquet, quousque notatus aequedistans tantum ex regula secet arcum, quantus est arcus ille quadrantis meteoroscopii inter eandem regulam et basim comprehensus. Talis enim arcus ita coaequatus utrumque declinationis complementum erit quaesiti puncti.

Et ut res ipsa cognitu fiat facilior, sumamus maximae solis complementum declinationis graduum ferme LXVI minutiarum XXX. Consideremus post haec aequedistantem tot gradus et minutias signantem, regulam cui admoveatur et removeatur, velut ipsa res admonebit, donec aequedistans modo con- 239v sideratus ex regula tot gradus et minutias secet, quot[a]) inter eandem | regulam et basim ex meteoroscopii quadrante clauduntur. Talis autem numerus hinc inde coaequatus reperitur graduum ferme LXXIII minutiarum XX, complementum scilicet declinationis puncti ex signifero quaesiti, quare puncti eiusdem declinationem constat esse quasi graduum XVI minutiarum XXXX.

Igitur per tertium huius punctum tale distat ab alterutra sectionum aequinoctialium gradibus fere XXXXVI, id est signo uno et gradibus XVI; cum autem sectiones huiusmodi aequinoctiales in signifero sint duae, liquebit inesse zodiaco puncta talia quatuor.

Propositio nona.

Arcu zodiaci cum sua recta ascensione coacervato utrumque ab altero discernere.

Igitur per praemissam maximus quaeratur excessus, quo quaepiam signiferi portio suam poterit exsuperare rectam ascensionem, deinde supposito tali

a) Hs. hat quod.

8. Proposition.

Bestimmung des Punktes im Tierkreis, für den die Differenz Länge — Rektaszension ein Maximum ist.

Ohne weitere Begründung bestimmt der Verfasser die Deklination des betreffenden Punktes mit dem Meteoroskop so daß $\cos^2\delta = \cos\varepsilon$ ist. Die Bedingungsgleichung ist $\lambda - \alpha$ Maximum, d. h. $\frac{d(\lambda-\alpha)}{d\lambda} = 0$ oder $\frac{d\lambda}{d\alpha} = 1$; aus der Gleichung der 8. Aufgabe $\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha : \cos\varepsilon$ folgt durch Differenzieren $\frac{d\lambda}{\cos^2\lambda} = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha\,\cos\varepsilon}$ oder, da $\frac{d\lambda}{d\alpha} = 1$ ist, $\cos^2\lambda = \cos^2\alpha\cos\varepsilon$. Nun ist aber nach Aufg. 3: $\cos^2\lambda = \cos^2\alpha\cos^2\delta$, also folgt tatsächlich $\cos^2\delta = \cos\varepsilon$. Er findet $\delta = 16^0\,40'$ (die Rechnung ergibt $16^0\,44'$) und hieraus nach Aufg. 3 ($\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta$). $\lambda = 46^0$ oder 1 signum und 16^0 (die Rechnung ergibt $46^0\,13'$). Am Schluß erfolgt noch ein Hinweis, daß es 4 Punkte im Tierkreis gibt, die dieser Bedingung genügen.

9. Proposition.

Von einem Punkt des Tierkreises ist die Summe seiner Länge und seiner Rektaszension bekannt; die beiden Größen sind zu bestimmen.

aggregato, minore quam sit quadrans, alioquin pro | blema hoc ad solvendum 240r per praesens organum frustra susciperetur, ipsum cum excesso per praecedentem reperto, ad instrumentum primo vel quinto mittatur introitu, numerus itaque repertus erit differentia portionis zodiaci sub dato contento aggregato et suae ascensionis rectae sub eodem comprehensae, qua propositae summae sublata rectae ipsius ascensionis duplum relinquatur.

Huius igitur dimidium residui ascensio erit recta, cui si reperta iungatur differentia, signiferi petitus emerget arcus. Velut si aggregatum fuerit graduum LVIII, et nostra sit intentio arcum zodiaci de sua ascensione recta discernere. Igitur maximo tali per praemissam sumpto alius arcus ex zodiaco et suae rectae ascensionis excessu graduum II et semis fere atque cum data summa graduum LVIII per primum aut quintum introitum intra organum hoc demisso reportabitur nobis arcus graduum II, qui demptus aggregato proposito graduum LXVIII relinquit gradus LVI, quorum dimidium, scilicet gradus XXVIII, sint ascensio recta, cui gradus II inventae differentiae additis emergunt gradus XXX, arcus scilicet signiferi, cui talis ascensio recta gradu. XXVIII convenit. |

Propositio decima.

Ortus amplitudinem cuiusvis in zodiaco puncti super quolibet horizonte perscrutari. 240v

Ortus amplitudo caelestis alicuius puncti praesentem habentis ortum est arcus horizontis ab aequinoctiali exortu, usque in illam horizontis notam computatus, super qua propositus caeli punctus oritur. At occasus amplitudo computatur ab occasu aequinoctiali usque in punctum horizontis occiduum, super

---

Für den in der vorigen Proposition bestimmten Punkt ist die Differenz Länge — Rektaszension $\lambda_0 - \alpha_0 = 2\frac{1}{2}^0$ (die Rechnung ergibt $2^0 32'$). Hieraus findet man für den Punkt dieser Aufgabe die entsprechende Differenz $\lambda - \alpha$ mit Aufg. 1 oder 5, d. h. man löst die Gleichung $\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin(\lambda+\alpha)} = \sin(\lambda_0 - \alpha_0)$. In der Tat ist $\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin(\lambda+\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\lambda \operatorname{cotg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\lambda \operatorname{cotg}\alpha + 1}$ oder, da $\operatorname{tg}\lambda = \operatorname{tg}\alpha : \cos\varepsilon$, so ist $\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin(\lambda+\alpha)} = \frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}$, also konstant, ferner ist $\sin\lambda_0$ nach Aufg. $1 = \frac{\sin\delta_0}{\sin\varepsilon}$ oder nach der 8. Proposition $= \frac{\sqrt{1-\cos\varepsilon}}{\sin\varepsilon}$ und ebenso $\cos\alpha_0$ nach Aufg. $12 =$ $\frac{\sqrt{1-\frac{\sin^2\delta_0}{\sin^2\varepsilon}}}{\cos\delta_0} = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon - 1 + \cos\varepsilon}}{\sqrt{\cos\varepsilon}\cdot\sin\varepsilon} = \frac{\sqrt{1-\cos\varepsilon}}{\sin\varepsilon}$, also $\sin\lambda_0 = \cos\alpha_0$ oder $\sin(\lambda_0+\alpha_0) = 1$; mithin gilt die Beziehung $\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin(\lambda+\alpha)} = \sin(\lambda_0 - \alpha_0)$.

Als Beispiel wird gegeben $\lambda + \alpha = 58$, hieraus findet man $\lambda - \alpha = 2^0$ und somit $\lambda = 30^0$ und $\alpha = 28^0$.

10. Proposition.

Bestimmung der Morgenweite für einen Punkt des Tierkreises unter beliebiger geographischer Breite φ (Fig. 19).

quo caelestis punctus inferius accedit hemisphaerium, pro eodem caeli puncto ortus amplitudo eadem est cum amplitudine occasus.

Omne caeli punctum super horizonte dato continet ortum et occasum, declinationem habens minorem complemento elevationis polaris super horizontem eundem.

Si vero dati sideris seu puncti declinatio coaequatur elevationis polaris complemento, ipsum sidus aut punctus propositus horizontem lambens atterit et in eodem temporis momento occasum habet et ortum. Quando | autem maior fuerit complemento regionalis altitudinis ipsa sideris declinatio, nullus eidem sideri seu cuius [?] nec alteri puncto caelesti, quod declinatione sua complementum altitudinis polaris superet, vel ortus vel occasus continget.

241r

Per secundam itaque huius inventa dati puncti declinatio cum complemento polaris elevationis per primum aut quintum introitum meteoroscopii immittatur, arcus itaque compertus intenta erit ortus amplitudo, septemtrionaria quidem, si datum punctum septemtrionalem possideat declinationem, austrina vero, si eadem declinatio fuerit austrina.

Velut si pro principio cancri scire cupiamus amplitudinem ortivam super horizonte patrio, videlicet Norimbergensi, cuius latitudinem a quamplurimis mathematicis diligenter exquisitam constat esse graduum XXXXIX[a]) minutiarum XXVII fere, quorum complementum est graduum XXXX minut. XXXIII.

Datus vero zodiaci punctus declinationem habet ferme graduum XXIII minutiarum XXIII seu semis. His ergo duobus arcubus intra meteoroscopium per primum aut quintum missis introitum quaesita | nobis redditur amplitudo, quasi graduum XXXVIII minutiarum XV.

241v

Eodem denique modo cuiusvis alterius caelestis puncti super dato horizonte orientis et occidentis, ortus et occasus amplitudo reperitur, saltem punctus ipse notam teneat declinationem.

a) Hs. hat XXXIX.

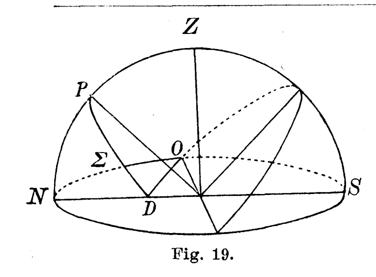


Fig. 19.

Die Morgenweite wird vom Ostpunkt (aequinoctialis exortus, Schnitt des Horizonts mit dem Äquator) aus, die Abendweite vom Westpunkt aus gegen Norden oder Süden gezählt, je nachdem die Deklination des Punktes positiv oder negativ ist. Wenn $\delta < 90^0 - \varphi$ (φ = geogr. Breite), so geht der Punkt auf und unter, für $\delta = 90^0 - \varphi$, fallen Auf- und Untergangspunkt zusammen ($\mu = 90^0$), ist $\delta > 90^0 - \varphi$, so hat er keinen Aufgangs- und Untergangspunkt, d. h. er ist zirkumpolar.

Ist die Deklination des betreffenden Punktes und die geographische Breite des Ortes gegeben, so wendet man auf δ und $90^0 - \varphi$ Aufg. 1 (oder 5) an, d. h. man bildet $\frac{\sin\delta}{\sin(90^0 - \varphi)} = \sin\mu$. Im $\triangle\, \Sigma O D$ ist $O\Sigma = \mu$, $\Sigma D = \delta$, $\sphericalangle O = 90^0 - \varphi$, $\sphericalangle D = 90^0$, also $\sin\delta = \sin(90^0 - \varphi)\cdot\sin\mu$. Als Beispiel wird die geographische Breite von Nürnberg $\varphi = 49^0\,27'$ und das Sternbild

Propositio undecima.

Ex subiecta ortus amplitudine zodiaci punctum eandem possidens elicere.

Igitur cum amplitudine ortiva super regulam computata regionariae latitudinis complementum introitu secundo[a]) intra praesens organum demergamus, exceptum itaque arcum declinationem sciamus eius in zodiaco esse puncti, cui talis ortus amplitudo debetur. Verumtamen adhuc latebit nos, cui signiferi puncto eadem declinatio respondeat, nisi quoque fuerit expressum, quam indagandum zodiaci punctum quartam obtineat.

Sit ergo datus ortus amplitudo super horizonte patria sive Norimbergensi graduum XXXVIII minutiarum XV, quam cum complemento latitudinis patria gradibus XXXX minutiis XXXIII | in quadrante numerata meteoroscopii per 242[v] secundum[b]) introitum inducens excipio inde gradus ferme XXIII et semis, maximam scilicet solis declinationem, propterea, si data ortus amplitudo septemtrionaria fuerit, ipsa principio cancri debetur, sin autem austrina, capricorni conveniet capiti. Ubi demum eiusdem amplitudinis ortivae denominatio nobis celabitur, assertio nostra penitus erit anceps et incerta.

Hic etiam alia opus erit cautela, quando scilicet inventa declinatio maximam solis declinationem superat; ita namque liquebit propositam ortus amplitudinem nulli signiferi puncto posse competere.

Propositio duodecima.

Caelestis alicuius puncti declinatione[c]) atque ortus amplitudine cognita latitudinem regionis, in qua talis eius amplitudo contingit, agnoscere.

Quinto igitur aut primo introitu cum amplitudine dati ortus atque cum declinatione proposita meteoro | scopium ingrediamur, et arcu ita reperto de 242[r]

a) Hs. hat quarto. b) Hs. hat quartum. c) Hs. hat declinationem.

---

des Krebses, dessen Deklination $\delta = 23^0\,23'$ (!) rund $= 23\frac{1}{2}^0$ beträgt, gewählt; das Resultat ist $\alpha = 38^0\,15'$ (num. $37^0\,50'$).

11. Proposition.

Bestimmung der Deklination eines Punktes des Tierkreises aus seiner Morgenweite.

Lösung mit Aufgabe 2 ($\sin\delta = \sin\mu\cos\varphi$). Als Beispiel wird das gleiche wie in der vorigen Proposition gegeben. Ist das Azimut nördlich, so entspricht ihm eine positive Deklination, dem südlichen eine negative.

12. Proposition.

Bestimmung der geogr. Breite aus Morgenweite und Deklination eines Punktes des Tierkreises.

Lösung mit Aufgabe 1 oder 5, $\cos\varphi = \frac{\sin\delta}{\sin\mu}$. Beispiel das gleiche wie in Prop. 10 und 11.



gradibus LXXXX subtracto reliquum erit latitudo regionis, in qua talis ortus amplitudo accidit.

Velut si nobis ortiva daretur amplitudo graduum XXXVIII minutiarum XV cum declinatione solis maxima graduum XXIII et semis, arcubus ergo eisdem per primum aut quintum introitum meteoroscopio immissis offerentur nobis grad. XXXX minut. ferme XXXIII, quorum complementum, gradus scilicet XXXXIX minut. XXVII, quaesitae regionis habetur latitudo.

Propositio XIII.

In horizonte quolibet arcum semidiurnum cuiusvis puncti super ecliptica dati manifestum efficere.

Ergo puncti propositi declinatione per secundam huius inventa ipsaque cum regionis latitudine[a]) intra meteoroscopium duodecimo introitu immissa nobis arcus quidam reddetur, quo quadranti superaddito, si declinatio fuerit borealis, aut eidem sublato, si ipsa meridionalis fuerit, intentum proveniet.

Sit ergo propositum in horizonte patrio numerare arcum semidiurnum, 243v qui | fit sole cancri caput possidente; eius igitur puncti in zodiaco per secundam huius declinatio invenitur graduum XXXIII et ferme semis, quam cum complemento latitudinis horizontis dati, scilicet graduum XXXX minutiarum XXXIII, per duodecimum introitum meteoroscopio commendans recipio gradus XXX cum minutiis ferme XXX, quibus quadranti aggregatis (nam declinatio septentrionaria subicitur) quaesitus excrescet arcus semidiurnus graduum CXX minutiarum XXX.

Sin autem sole capricorni caput obtinente idem iubeamur efficere, ergo cum idem zodiaci punctus eandem maximam solis habeat declinationem austrinam, arcum iam inventum graduum XXX minutiarum XXX quadranti demere oportebit, reliquum scilicet graduum LX minutiarum XXX quaesitus arcus erit semidiurnus.

Idem aliter fit per solos aequedistantes. Inprimis amplitudo ortiva puncti in zodiaco dati quaeratur per decimam huius, quae gradibus LXXXX detraha-

a) Es muß heißen: cum complemento latitudinis.

---

13. Proposition.

Bestimmung des halben Tagbogens aus Deklination und geogr. Breite.

Im $\triangle\, \Sigma O D$ (Fig. 19) ist $OD = t - 90^0$, wenn t der halbe Tagbogen ist, also ist: $\sin(t - 90^0) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$. Wendet man Aufg. 12 auf δ und $90^0 - \varphi$ an, so ergibt sich ein Winkel, den man zu 90^0 addieren oder von 90^0 subtrahieren muß, um den halben Tagbogen zu erhalten, je nachdem die Deklination nördlich (positiv) oder südlich (negativ) ist.

Beispiel: $\delta = 23\frac{1}{2}^0$, $\varphi = 49^0\,27'$, $t = 120^0\,30'$ (numerisch $120^0\,33'$), für $\delta = -23\frac{1}{2}^0$ folgt $t = 59^0\,30'$.

2. Methode (per solos aequedistantes). Man sucht zuerst die Morgenweite wie in Proposition 10 $\left(\sin\mu = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}\right)$, wendet auf $90^0 - \mu$ und $90^0 - \delta$

tur, residuum cum complemento declinationis puncti eiusdem, primo vel quinto introitu ad meteoroscopium mittatur, arcusque inventus gradibus item LXXXX subtrahatur, reliquum quadranti coacervetur, si propositi ex zodiaco puncti declinatio fuerit borealis, aut eidem quadranti dematur | data pro eodem zodiaci puncto declinatio, si fuerit austrina; quod enim sic excipitur, arcus semidiurnus erit, qui quaerebatur. 243r

Ut si cupiam, pro regione patria semidiurnum arcum pro capite tauri perquirere. Igitur dati puncti ortus amplitudinem per decimam huius inventam gradus ferme XVIII minutias XV quadranti demens, reliquum graduum LXXI minutiarum XXXXV cum complemento declinationis puncti eiusdem per secundam huius reperto quasi grad. LXXVIII min. XXX per primum aut quintum introitum meteoroscopio inducens, accipio gradus ferme LXXVI, quorum complementum graduum XIV quadranti adiciens cupitum conflabo semidiurnum arcum graduum ferme CIV.[a])

Idem quoque propositum tertio sic absolvetur. Solis etiam aequedistantibus habita inprimis per praesentem differentia maximi semidiurni, qui contingit principio cancri atque semidiurni aequinoctialis, qui pro omni regione, in qua sol in horis XXIV oritur et occidit, quadrans est, quam quidem differentiam in quadrante sumptam cum ascensione recta eius in zodiaco arcus, quo datum signiferi punctum ab aequinoctio proximo recedit, per quartum introitum meteoroscopio committamus, arcus enim sic | elicitus differentia habetur arcus semidiurni quaesiti et aequinoctialis semidiurni, qua quadranti iuncta, si datus punctus acciperem [?] in medietate signiferi boreali, contra vero eadem dematur, si punctus idem semicirculum signiferi possideat meridionalem; hoc namque pacto propositum constabit. 244v

Sit ergo, ut prius, inveniendus semidiurnus pro tauri capite ad patrium horizontem; differentia igitur maximi semidiurni, et semidiurni aequinoctialis per praesentem habetur gradus ferme XXX et semis. Ascensio recta intervalli, quo tauri principium ab aequinoctio verno, cui propius est, recedit, per V huius habetur gradus ferme XXVIII, quibus supra regulam computatis cum eadem differentia grad. XXX et semis per quartum introitum meteoroscopio commen-

a) Hs. hat C.

Aufgabe 1 oder 5 an $\left(\sin\varrho = \frac{\sin(90^0 - \mu)}{\sin(90^0 - \delta)}\right)$, dann ist $180^0 - \varrho$ oder ϱ der gesuchte Tagbogen, je nachdem δ positiv oder negativ ist.

Beispiel: Für das Sternbild des Stieres ist $\mu = 18^0\,15'$ nach Prop. 10 und $\delta = 11^0\,30'$. Hieraus ergibt sich $\varrho = 76^0$, also, da δ positiv ist, $t = 180^0 - 76^0 = 104^0$.

3. Methode. Es sei der halbe Tagbogen der Sonne am längsten Tage t_m bekannt, also $\sin(t_m - 90^0) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon$, die Rektaszension des Punktes sei α; dann ist (nach Aufg. 12) $\sin\alpha = \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{cotg}\varepsilon$; hieraus ergibt sich wenn man $\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin(t - 90^0)}{\operatorname{tg}\varphi}$ und $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sin(t_m - 90^0)}{\operatorname{tg}\varphi}$ setzt, $\sin(t - 90^0) = \sin\alpha \sin(t_m - 90^0)$. Dies wird mit Aufg. 2 gelöst. (Der Text hat 4.)

Beispiel: $t_m = 120\tfrac{1}{2}{}^0$, $\alpha = 28^0$ gibt $t - 90^0 = 13\tfrac{1}{2}{}^0$ (num. $13^0\,47'$), also $t = 103\tfrac{1}{2}{}^0$.

datis gradus ferme XIII et semis nobis restituentur, differentia scilicet aequinoctialis semidiurni, et semidiurni investigandi, quae iuxta praesens praeceptum addita gradibus LXXXX, propositus arcus semidiurnus habetur gradus CIII et semis, quod quasi invento priori concordat; diversitas est in gradu dimidio, quae non evenit ob fallacem hanc inquirendi scientiam, sed propter in-
44r strumen|torum incertitudinem, quibus nisi magna fiant admodum, veritas ipsa nobis ad unguem raro disentitur, de quo lectorem ipsum tam in praesenti quam in posterioribus propositis admonitum volo.

Propositio XIV.

Modum convertendi gradus et eorum minutas in horas et earum minuta, et e contrario compendiosum tradere.

Propositos itaque gradus quotcumque, si libeat in horas ac earum minutias convertere, convenit eos per quindecim dividere; numerus enim exiens horarum ostendet numerum, si qui vero gradus quindecim pauciores, cum eorum etiam minutis hac divisione facta superfluant, gradus quidem per IV multiplicentur, productusque numerus horarum minutias indicabit, ac pro minutis XV unius gradus una minutia ceteris horarum minutiis addatur toties, quoties id fieri poterit, reliqua vero graduum minuta, quindecim pauciora per IV ducantur, summaque producta secunda monstrabit horaria. Ut pro-
245v po|sitis gradibus C cum minutis XXXXVIII eos sic in horas et earum minutias convertemus. Primum namque partientes C gradus per quindecim, tot enim aequatoris gradus horam unam motu primo revoluti componunt, horae integrae sex exibunt gradibus X remanentibus, quibus quater ductis horae unius minutiae XXXX producantur, minuta vero XXXXVIII gradus unius per praecedentem doctrinam minutias horae III cum secundis XII constituunt. Ergo gradus C, minuta XXXXVIII dabunt horas VI minutias XXXXIII[a]) secunda XII; quod est propositum.

Sed forte non omnis lector in arithmeticae rudimentis adeo habetur exercitatus, quod tamen ad astronomiam[b]) maxime spectat, ut propositionem hoc modo perficiat. Igitur, quo hunc multiplicandi et dividendi laborem lectori arithmeticis parum imbuto tollam, et propositum illico conficiatur, pro praesenti negotio subiectam contexi in tabulam, in qua dexter versus descendens propositorum graduum numerum eorumque minuta continet, et e regione quotlibet graduum propositorum, in transversa linea ad laevam horae ac horarum minutiae gradibus eisdem aequivalentes habentur inscriptae, gradusque ipsi
245r super versu tali descendente usque ad CLXXX protenduntur, quibus | ad sum-

a) Hs. hat XXXIII. b) Hs. hat astronomiam.

---

14. Proposition.

Verwandlung von Zeitmaß in Bogenmaß.

Beispiel: $100^0 48' = 6^h 43^m 12^s$. Für die „im Rechnen nicht bewanderten" Leser hatte der Verfasser die Absicht, eine Tabelle herzustellen.[1]) Weiteres Beispiel, das an die vorige Prop. anschließt: $103\frac{1}{2}{}^0 = 6^h 54^m$, also der ganze Tagbogen $= 13^h 48^m$.

1) Für die Tabelle wurde 1 Seite der Hs. frei gehalten.

mum horae XII competunt. Quod si eandem tabulam cum minutiis graduum ingrediamur, in versu quidem proximo, horarum minutae, in sequenti vero secunda scribentur, velut inscriptio hortabitur.

Hic opus exemplo fore negotio hoc praesertim ex patente.

Cupientes autem horas et horarum minutias atque secunda in gradus et eorum minuta commutare, multiplicabimus datum horarum numerum per quindecim, et pro quibusvis horariis minutiis quatuor gradum unum et pro minutia horaria una minuta gradus quindecim et pro secundis horariis quatuor minutum unum gradus et pro secundo horario gradus secunda quindecim.

Ut si velim horas VI minutias horae XXXXIII cum secundis horariis duodecim convertere in gradus aequinoctiales atque graduum fractiones, igitur horas VI duco per quindecim et crescunt gradus aequatoris LXXXX. Minutiae horariae XXXX decem faciunt gradus minutiae III horariae minuta gradus constituunt XXXXV, secunda horaria XII minuta III gradus efficiunt. His itaque congregatis quolibet generi suo veniunt gradus aequatoris C minuta XXXXVIII. Sed | haec citius efficiuntur ex subscriptis tabulis. In quarum 246v primam intrandum cum horis convertendis in primo versu ad dextram scriptis, atque e regione quotlibet earum versus laevam gradus habentur eisdem horis debitis.

Pari modo ad minutiarum tabulam ingrediamur in dextro versu descendenti cum propositis minutiis secundis horariis ac e diverso convenientes eisdem gradus et eorum fractiones ceterae non latebunt. At haec ipsae tabularum inscriptiones patefacient lucidius. |

Per has itaque tabulas seu per praesentem propositionem et praemissam 246v pro dato solis loco magnitudinem cuiuslibet propositi diei scire poteris. Inventum enim arcum semidiurnum in horas a horarium fractiones convertentes mediam propositi diei quantitatem habebimus, qua duplicata tota eiusdem diei magnitudo constabit, velut eo die quo sol tauri possidet initium, in patria regione per praemissam semidiurnus arcus habetur graduum CIII et semis, quibus per tabulam primam horae VI, minutiae LIII respondent. Ecce dimidium propositi, diei, quibus geminatis tota diei huius excrescet quantitas, horarum XIII minutiarum XXXXVIII.

Propositio XV.

In aliqua regione quantolibet die proposito latitudinem regionis eiusdem numerare.

Quanto dies nocti suae coaequatur, propositio haec | ad solvendum frustra 247v suscipitur, quod quidem aequinoctiorum contingit tempore; sed alibi declina-

---

15. Proposition.

Bestimmung der geogr. Breite aus der Länge des Tagbogens.

Die Lösung versagt für $t = 90^0$. Es ist $\operatorname{tg} \varphi = \sin (t - 90^0) : \operatorname{tg} \delta$, als Lösung mit Aufgabe 8. Beispiel: $t = 103\frac{1}{2}^0$, $\delta = 11\frac{1}{2}^0$, $\varphi = 49^0 30'$. 2. Methode (per solos aequedistantes). Man bestimmt zuerst die Morgenweite ($\cos \mu = \cos \delta \sin t$) mit Aufgabe 2, dann hieraus ($\cos \varphi = \frac{\sin \delta}{\sin \mu}$) die

tionem solarem eiusdem diei, velut aequidistantes computatam cum differentia praesentis semidiurni, atque semidiurni aequinoctialis, per octavum [a]) introitum organo nostro committamus, arcumque sic exceptam de gradibus LXXXX dementes latitudinem relinquemus quaesitam.

Sole igitur initium possidente tauri, dies in aliqua regione horas complectitur XIII cum minutiis XXXXVIII. Libeat nunc agnoscere, quanta sit eiusdem regionis latitudo, quare solis declinationem, quae per secundam huius habetur ferme grad. XI et semis, cum differentia huius semidiurni et semidiurni aequinoctialis graduum XIII et dimidii, iuxta praesentem doctrinam introitu octavo [b]) ad meteoroscopium missa gradus XXXX cum minutiis XXX nobis offeruntur, quibus ex quadrante sublatis desiderata remanebit latitudo graduum XXXXIX et minutorum ferme XXX.

Hoc ipsum per aequedistantes solos ita fiet; datae scilicet declinationis complementum cum complemento differentiae eorundem semidiurnorum per introitum secundum [c]) meteoroscopio inducamus, | extractique arcus complementum, quod ortus amplitudo est puncti zodiaci, sub quo dies proposita fit, cum data solari declinatione per primum aut quintum introitum meteoroscopio rursus immittamus. Arcus enim sic extractus, si de LXXXX gradibus auferatur, investigatam relinquet regionis latitudinem.

247r

Sit igitur, ut prius, sole initium tauri tenente dies horarum XIII minut. XXXXVIII; quare ut huius regionis latitudo perspicua fiat, complementum differentiae semidiurni praesentis diei et semidiurni aequinoctialis graduum XIII et semis, cum complemento declinationis graduum LXXVIII et semis [d]) per introitum secundum [e]) meteoroscopio committendum est. Hoc itaque pacto gradus excipiuntur LXXI et semis, quibus ex quadrante sublatis gradus relinquuntur XVIII minut. XXX, qui sunt ortus amplitudo pro die dato; qua cum solis declinatione graduum XI et semis introitu primo aut quinto ad meteoroscopium remissa gradus exibunt XXXX cum minutiis ferme XXX, quorum complementum graduum XXXXIX [f]) minut. XXX latitudo est, quam quaerebamus.

a) Hs. hat tertium. b) Hs. hat tertio. c) Hs. hat quartum.
d) Nach *semis* die Worte *cum complemento* gestrichen. e) Hs. hat quartam.
e) Hs. hat XXXIX.

---

geogr. Breite mit Aufgabe 1 oder 5. Beispiel: $t = 103\frac{1}{2}^0$, $\delta = 11\frac{1}{2}^0$, $\mu = 71\frac{1}{2}^0$, $\varphi = 49^0\ 30'$.

16. Proposition.

Bestimmung der obliqua ascensio bezw. descensio für einen Punkt der Ekliptik.

Die A. O. bzw. D. O. eines Punktes der Ekliptik ist der Bogen zwischen Ostpunkt und Frühlingspunkt in dem Moment, in dem dieser Punkt aufgeht, bzw. zwischen Frühlingspunkt und Westpunkt, wenn der Punkt untergeht.

Ist der halbe Tagbogen t, die Rektaszension α, so ist die ascensio obliqua $\alpha \mp (t - 90^0)$, die descensio obliqua $\alpha \pm (t - 90^0)$. Beispiel: $t = 103^0\,30'$, $\alpha = 28^0$, $AO = 14^0\ 30'$, $DO = 41^0\ 30'$.

Propositio XVI. |

Cuiuslibet in zodiaco arcus initium ab aequinoctio vernali **248ʳ** sumentes obliquam vel ascensionem vel descensionem in qualibet regione numerare.

Quare pro puncto datum ex zodiaco arcum terminante differentiam eius semidiurni, et semidiurni aequinoctialis per XIII problema per quaesitam ascensioni rectae propositi arcus auferamus, si tale punctum propositum terminans arcum borealem signiferi semicirculum possederit, aut eandem differentiam ipsi rectae ascensioni coniungamus, si hoc ipsum propositi arcus finale punctum medietatem zodiaci tenuerit austrinam, quod itaque huiusmodi vel oblatione vel additione colligitur, dati arcus obliqua erit ascensio, descensionem autem contraria comparabimus ratione.

Propositum ergo sit invenire ascensionem obliquam signi arietis in horizonte patrio. Eius signi recta ascensio per quintam huius habetur ferme, graduum XXVIII, at per XIII huius differentia semidiurni aequinoctialis atque semidiurni pro fine arietis est ferme gradus XIII et semis, quam auferentes ex gradibus XXVIII ascensionis rectae relinquemus obliquam ascensionem in horizonte patrio graduum ferme XIIII min. XXX, eadem quoque differentia semidiurnorum, eidem rectae ascensioni graduum XXVIII adiecta signi arietis pro eodem horizonte patrio descensio conflabitur obliqua graduum XXXXI minut XXX; quod erat intentum.

Propositio XVII.

Ex data obliqua ascensione alicuius orientis ex ecliptica puncti medium caeli supra terram definire.

Quadrantem ergo de oblata subtrahamus ascensione obliqua, ei quoque additis integri circuli gradibus CCCLX, si alioquin ablatio haec fieri nequeat, et residuum erit ascensio recta MC super terram, qua per sextam huius in signiferi arcum conversa, propositum habebitur. | **249ᵛ**

Ut si datur obliqua ascensio alicuius nascentis in patrio solo ex signifero puncti graduum XXXII, his igitur gradibus CCCLX additis, atque de hac summa gradibus quadrantis LXXXX sublatis erit reliquum gradus CCCII ascensio

---

17. Proposition.

Bestimmung der Mitte des Himmels (M. C.) d. h. der Rektaszension und Länge des gerade kulminierenden Ekliptikpunktes aus der ascensio obliqua des gerade aufgehenden Punktes. (Fig. 20.)

In Fig. 20 ist $\alpha_{M.C.} = M'\mathfrak{W}N'O + OV = 270^0 + A.O.$, bzw. $\alpha_{M.C.} = 90^0 - AO$, wenn V zwischen M' und $\mathfrak{W}$ liegt. Aus $\alpha_{M.C.}$ erhält man dann nach Prop. 6 $\lambda_{M.C.}$.

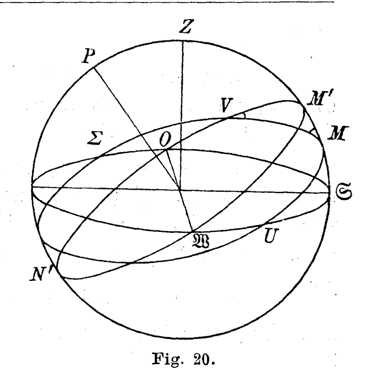


Fig. 20.

M. C. recta, cui per sextam huius ex orbe signifero respondet arcus ab capite arietis usque in caput aquarii numerans, id est signa zodiaci decem; quod erat ostendendum.

Propositio XVIII.

Angulum ex concursu eclipticae et meridiani provenientem circa quotlibet ipsius eclipticae punctum agnoscere.

In signis semicirculi eclipticae ascendentis, qui a principio capricorni inchoans in caput cancri finitur, angulus talis inventus erit borealis orientalis. |

249r Et ut rem ipsam summarie dicam, principio capricorni in meridiano constituto talis incidentiae angulus septemtrionalis orientalis quadrans est. Deinde idem sensim minuitur, quousque par fiat maximae declinationis solis complemento, quod contingit arietis capite meridianum obtinente. Deinde rursus augetur, quousque cancri principium ad meridianum pervenerit, quia tunc, velut prius in principio capricorni, quadrans quoque fiat.

Ab hoc autem initio cancri per reliqua sex signa medietatis signiferi descendentis eundem incidentiae seu concursus angulum inveniemus orientalem austrinum, qui de capite cancri usque in principium librae minuitur in dies, usquequo fiat par complemento maximae solis declinationis, ab initio autem librae in principium capricorni, usque ad quadrantem iterum crescet.

Pro hoc igitur angulo inveniendo ad organum intrabimus primo aut quinto introitu cum complemento maximae declinationis solis et declinationis [a]) puncti |

250v eclipticae dati; arcus itaque repertus angulum, qui petebatur, ostendet.

Sit ergo puncti dati finis noni gradus tauri, cui per secundam huius competit declinatio graduum XIIII minut. XXX fere, cuius complemento graduum LXXV minut. XXX cum complemento maximae declinationis solis graduum LXVI et semis per introitum primum aut quintum destinato ad ipsum meteoroscopium angulus reportabitur graduum LXXI minut. XX fere, qui borealis appellabitur, quoniam semicirculum eclipticae ascendentem possidet.

Eiusdem quoque concursus seu incidentiae angulus alia deprehendetur via, facto scilicet introitu primo aut quinto, per intervallum zodiaci, quod puncto signiferi dato atque proximo aequinoctiali puncto, et eiusdem inter-

a) In der Hs. fehlt maximae declinationis solis et.

---

18. Proposition.

Bestimmung der Neigung der Ekliptik gegen die Meridianebene, wenn die Deklination des gerade kulminierenden Punktes der Ekliptik gegeben ist.

Kulminiert der Steinbock, so ist der Neigungswinkel $\eta = 90^0$, dann nimmt er ab bis auf $23\frac{1}{2}^0$ $(= \varepsilon)$, was eintritt, wenn der Widder kulminiert, hierauf wächst er wieder auf 90^0 bis zur Kulmination des Krebses und nimmt wieder bis auf $23\frac{1}{2}^0$ für die Kulmination der Wage ab. In Fig. 20 ist: $MM' = \delta_m$, $\sphericalangle V = \varepsilon$, $\sphericalangle M = \eta$, also ist $\sin \eta = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta_m}$ d. h. man bestimmt η, indem man Aufg. 1 oder 5 auf $90^0 - \varepsilon$ u. $90^0 - \delta_m$ anwendet. Beispiel: $\delta = 14^0\ 30'$, $\eta = 71^0\ 20'$ (numerisch $71^0\ 18'$).

valli rectam ascensionem ex quinta huius acceptam, numerus enim hac ratione nobis oblatus iterum eundem patefaciet angulum.

Sit ergo *M. C.* punctus tauri caput, quod a proximo distat aequi|noctio 250r verno gradibus XXX signi arietis, quorum per quintam huius ascensionem rectam grad. XXVIII fere cum gradibus XXX introitu primo aut quinto intra meteoroscopium demergens excipio angulum huiusmodi concursus, capitis scilicet tauri, cum meridiano graduum ferme LXX et tertii sive minutorum XX.

Propositio XIX.

Cuiuslibet in signifero puncti meridianam super horizontem datum elevationem cognoscere.

Aequinoctiorum tempore, hoc est in punctis zodiaci aequinoctialibus, quae sunt arietis et librae principia, meridianam hanc elevationem scimus esse parem regionariae latitudinis complemento. Sed puncto dato semicirculum signiferi borealem occupante ipsi regionariae latitudinis complemento proposito puncti declinationem quidem adicimus, | in altero vero signiferi medietate, scilicet 251v austrina, puncto hoc constituto eandem declinationem subtrahimus, ut meridiana scilicet dati in signifero puncti constet elevatio.

Ut si velim capitis tauri meridianam habere altitudinem pro patrio horizonte; huius in signifero puncti declinatio per secundam huius est fere graduum XI et semis, quibus complemento patriae latitudinis grad. XXXX min. XXXIII adiectis ipsa producetur elevatio meridiana pro tauri capite graduum ferme LII min. III.

Sit iterum propositum pro capite piscium meridianam altitudinem in eodem horizonte perscrutari; ex eadem secunda huius declinatio capitis piscium est ferme graduum XI et semis, quibus patriae latitudinis complemento demptis altitudo remanebit meridiana petita graduum XXIX minutarum XXX; quod rursus intentionem absolvit nostram.

Propositio XX.

Data vel ascensione vel descensione | obliqua in qualibet re- 251r gione cognitae latitudinis, modo eiusdem ascensionis aut descen-

---

2. Methode: In Fig. 20 ist: $VM = \lambda_m$, $VM' = \alpha_m$, $\sin\eta = \frac{\sin\alpha_m}{\sin\lambda_m}$ d. h. man wendet Aufgabe 1 oder 5 auf α_m u. λ_m an. Beispiel: $\lambda_m = 30^0$, $\alpha_m = 28^0$, $\eta = 70^0\ 20'$ (num. $69^0\ 52'$).

19. Proposition.

Bestimmung der Kulminationshöhe eines Punktes des Tierkreises.

Für die Tag- und Nachtgleiche ist die Höhe des Kulminationspunktes $h = 90^0 - \varphi$, im allgemeinen $h = 90^0 - \varphi + \delta$, wobei δ pos. oder neg. genommen wird. Beispiel: für den Stier ist $\delta = 11\frac{1}{2}^0$, $90^0 - \varphi = 40^0\ 33'$, $h = 52^0\ 3'$; $\delta = -11\frac{1}{2}^0$, $90^0 - \varphi = 40^0\ 33'$, $h = 29^0\ 30'$.



sionis initium de vernali aequalitate sit sumptum, zodiaci arcum in eiusdem regionis horizonte cum illa per ortum indagare.

Nulla ergo data vel ascensione vel descensione in subiecto horizonte caput arietis ortum aut occasum tenere scimus, quae si dimidius fuerit circulus, initium librae quaesitum zodiaci finit arcum. At eadem vel ascensione vel descensione oblata quantalibet alioquin arcum ei debitum sic investigabimus ac inprimis intentum absolvemus de ascensione, atque deinceps pro descensione idem agemus.

Igitur ex XVII huius M. C. pro data obliqua inquiratur ascensione, post- 252v haec ex|antepraemissa concursus seu incidentiae angulus pro M. C. reperto etiam innotescat. Cognoscamus demum per praemissam eiusdem M. C. pro subiecta regione meridianam altitudinem; meteoroscopium itaque octavo introitu ingrediamur cum altitudine meridiana M. C. atque angulo concursus seu incidentiae supra quadrantem numerato, numerumque sic exceptum arcui zodiaci inter signorum [a]) initium et M. C. comprehenso detrahentes, si M. C. alium zodiaci teneat semicirculum, subtrahendo quidem punctum zodiaci occidentale, addendo autem orientale cognoscemus, at occidentali zodiaci puncto cognito punctum orientale nos latere nullatenus poterit, etenim alterum alteri per diametrum opponitur, pari quoque ratione orientali noto non ignorabimus accidens ex signifero punctum.

Proponatur ergo ascensio obliqua gradus XXXII, cui zodiaci arcus est inveniendus, qui eidem in horizonte patrio cooriatur; tunc itaque pro M. C. 252r per XVII | huius capitis aquarii reperitur. Angulus vero concursus eiusdem M. C. cum meridiano per antepraemissam constat fere gradibus LXXVIII minutis XXXX, M. C. altitudo meridiana per praemissam erit quasi gradus XX minuta XXI; cum qua et angulo praedicto meteoroscopium octavo ingrediens introitu grad. LXII min. XV fere percipio, quiebus demptis ex arcu zodiaci inter signorum initium, et M. C. cadente, nam M. C. in semi circulo signiferi ascendente constituitur, signa zodiaci remanent VII grad. XXVII min. XXXXV fere, qui-

a) Nach *signorum* hat Hs. *zodiaci* gestrichen.

20. Proposition.

Bestimmung des Bogens zwischen dem kulminierenden und dem aufgehenden Punkt der Ekliptik aus der ascensio obliqua (des aufgehenden Punktes) (Fig. 21) und damit der Länge des aufgehenden Punktes (Fig. 20).

Aus AO ergibt sich $\alpha_m = 270^0 + AO$ nach Prop. 17, η nach Prop. 18. die Höhe von MC h_m nach Prop. 19. Dann erhält man den Bogen zwischen MC und dem gerade untergehenden Punkt der Ekliptik MU mit Aufg. 8. ($\operatorname{tg} \varrho = \operatorname{tg} h : \cos \eta$); der Bogenabstand zwischen dem Frühlingspunkt u. MC ist $270^0 + AO$, also der Abstand des gerade untergehenden Punktes $\sigma = 270^0 + AO - \varrho$. Erstes Beispiel: $AO = 32^0$, $MC = 302^0$, $\eta = 78^0\ 40'$, $h = 20^0\ 21'$. Resultat $\varrho = 62^0\ 15'$ (num. $62^0\ 5'$), $\sigma = 7$ signa $27^0\ 45' = 237^0\ 45'$ (statt $239^0\ 45'$). Zweites Beispiel: $AO = 202^0$, $MC = 111^0$ (statt 112^0) $\eta = 81^0$, $h = 62^0\ 33'$. Resultat: $\varrho = 85^0\ 45'$ (num. $85^0\ 22' = 2$

bus in signifero de signorum initio computatis ex scorpio grad. constat XXVII min. XXXXV occidisse, quae in ortu grad. XXVII cum min. XXXXV tauri constituentur; quod est propositum.

Alia rursus ascensio detur obliqua in eodem horizonte grad. CCII. Itaque per XVII M. C. erit gradus XXI cancri fere, angulus concursus incidentiaeve per antepraemissam grad. LXXXI, altitudo autem M. C. meridiana grad. LXII min. XXXIII, cum qua super basi computata | et angulo incidentiae de 253v praesenti organo per VIII introitum elicio grad. LXXXV min. XXXXV, hoc est signa duo grad. XXV min. XXXXV fere. His ergo M. C. adiectis, quoniam ipsum in descendenti signiferi dimidio constituitur, summa proveniet signorum VI grad. XVI min. XXXXV, quibus inter signa et eorum partes distributis liquebit cum data ascensione obliqua, ex librae signo perortos fuisse supra eundem horizontem patrium grad. XVI min. XXXXV; quod rursus est intentum.

Haec quoque propositio solis absolvetur aequedistantibus. Ingrediamur ergo instrumentum nostrum secundo introitu cum complemento altitudinis meridianae atque cum angulo incidentiae extracti. Deinde arcus complementum cum altitudine meridiana primo aut quinto introitu ad meteoroscopium remittatur; arcus demum itaque repertus M. C. dematur ipso medietatem signiferi possidente ascendentem, aut eidem adiungatur reliquum zodiaci medietatem tenenti, quodque sic eveniet. Arcus erit zodiaci datae respondens obliquae ascensioni. Sit iterum data pro horizonte patrio obliqua ascensio grad. XXXII. Igitur cum complemento altitudinis | meridianae M. C. grad. LXIX 253r min. XXXIX et cum concursus angulo grad. LXXVIII min. XXXX supra quadrantem numerato per introitum secundum ad meteoroscopium mihi ingredienti gradus offeruntur ferme LXVII, cum quorum complemento grad. XXIII et cum altitudine meridiana grad. XX min. XXI primo aut quinto introitu instrumentum idem repetens invenio grad. LXII fere cum quarto gradus; quibus a M. C. ablatis relinquuntur de scorpii signo occidisse grad. XXVII min. XXXXV, ut prius inventum est. Inde quoque oriens eclipticae punctus innotescet in grad. XXVII min. XXXXV tauri; quod est intentum.

Sit demum ascensio data grad. CCII. Meteoroscopium igitur intrando

---

signa $25^0\,45'$, also (hier ist die Summe zu nehmen) $\sigma = 196^0\,45' = 6$ signa $16^0\,45'$.

2. Methode (per solos aequedistantes). Man wendet auf $90^0 - h$ u. η Aufgabe 2 an ($\sin\chi = \cos h \sin\eta$), dann auf h u. $90^0 - \chi$ Aufgabe 1 oder 5 ($\sin\varrho = \frac{\sin h}{\cos\chi}$); das Resultat ist wieder der obige Winkel ϱ. Beispiel: $AO = 32^0$, $90^0 - h = 69^0\,39'$, $\eta = 78^0\,40'$. Resultat: $\chi = 67^0$ (num. $66^0\,50'$) und $\varrho = 62^0\,15'$ (num. $62^0\,52'$); das weitere wie oben. Zweites Beispiel: $AO = 202^0$, $\eta = 81^0$; hieraus $\chi = 27^0$ und $\varrho = 85^0\,45'$ wie oben.

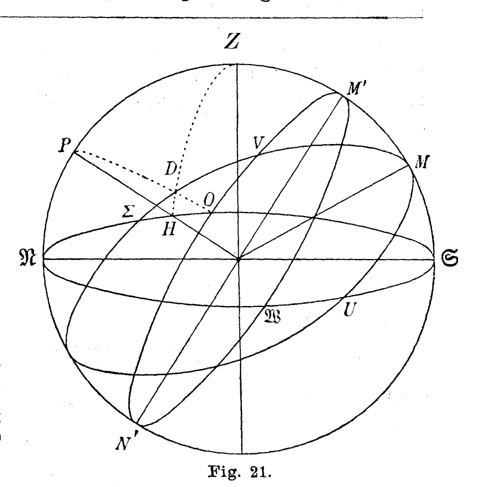


Fig. 21.

cum complemento inventae altitudinis M. C. atque cum angulo concursus praedicto grad. LXXXI per introitum secundum reperimus ferme grad. XXVII; horum complementum graduum LXIII cum altitudine meridiana grad. LXII primo aut quinto introitu intra meteoroscopium remittentes excipimus, ut prius, quasi grad. LXXXV cum minutis XXXXV, quibus medio caeli congre-254r gatis emergunt, ut ante, signa VI grad. XVI min. XXXXV quae | datae obliquae ascensicni de zodiaco cooriuntur; quod est iterum propositum.

Propositio XXI.

Quod praecedens subicit via, quam Ioannes de Regiomonte ostendit, inquirere.

Ascensionem obliquam, quae nobis proponitur, habeamus, perinde atque rectam, cui arcum ex zodiaco competentem per VI huius discamus, horum arcuum scilicet initio sumpto de puncto aequinoctii vernalis. Non ignoremus etiam, per secundam huius declinationem puncti arcum zodiaci iam inventum terminantis; eius quoque puncti a proximo aequinoctio recessus cognitus esto, cuius per quintam huius ascensio recta nos lateat minime, quam deinde cum suo arcu zodiaci primo aut quinto introitu areae praesentis organi committentes, arcum quendam excipiemus, qui primum vocetur inventum.

255v Si | huiusmodi eclipticae punctum terminale medietatem zodiaci occupet descendentem, aut eodem arcu de gradibus CLXXX detracto, si punctus idem terminalis ascendenti eclipticae insideat semicirculo, et primum nobis inventum iterum relinquetur, accedamus posthaec intra meteoroscopium cum inventa declinatione atque cum elevatione polari per introitum secundum; arcus itaque a nobis inventus secundum statuatur inventum; facto deinceps introitu primo aut quinto cum complemento huius inventi secundi atque cum polaris altitudinis complemento, arcus hac via repertus tertium appelletur inventum, quod primo detrahatur invento, et residuum cum secundi complemento inventi meteoroscopio per secundum destinetur introitum; arcusque inventus gradibus auferatur LXXXX; cum reliquo demum atque cum invento secundo per primum aut quintum introitum meteoroscopio incidentes, arcum excipimus, quo adiecto ad arcum eclipticae, quem ab initio per datam ascensionem obliquam, perinde atque rectam, inveniebamus, si punctus talem zodiaci arcum terminans teneat semicirculum signiferi ascendentem, aut eodem dempto, si idem punctus

---

21. Proposition.

Methode des Johannes Regiomontanus zur Lösung der vorhergehenden Aufgabe (Fig. 21).

Man betrachtet die gegebene ascensio obliqua α_1 als recta und sucht zu α_1 (bzw. $180^0 - \alpha_1$) die zugehörigen Werte λ_1 und δ_1. (Im $\triangle\ VOD$ ist $VO = \alpha_1$, $VD = \lambda_1$, $OD = \delta_1$). Dann bildet man $\sin I = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \lambda_1}$ (Aufg. 1, I = inventum primum, im $\triangle\ VDO$ ist $\sphericalangle\ VDO = I$), $\sin II = \sin \delta_1 \cdot \sin \varphi$ (Aufg. 2, im $\triangle\ HOD$ ist $DO = \delta_1$, $\sphericalangle\ H = 90^0$, $\sphericalangle\ O = \varphi$, $DH = II$), $\sin III = \frac{\cos \varphi}{\cos II}$ (Aufg. 1, im $\triangle\ HOD$ ist $\sphericalangle\ D = III$), ferner $I \pm III = \nu$ ($\nu = \sphericalangle\ HD\,V$

in altera reperiatur zodiaci medietate, et liquebit intentum. Ibi tum hoc etiam poterimus uti compendio, ut residuum tertii inven|ti, de primo subtracti et 255r super quadrante numeratum cum invento secundo intra meteoroscopium introitu mittentes octavo. Postremum hunc arcum extrahamus[a]), quo iuncto vel subtracto arcu zodiaci ab initio reperto liquebit intentum.

Repetam eiusdem Ioannis exemplum, sub quo proponitur ascensio obliqua grad. CCXXXII min. XXXVIII, cui ad horizontem, in quo polus borealis elevatur grad. XLVIII., explorandus est arcus zodiaci coascendens. Praesenti itaque ascensioni tamque rectae de signifero conveniunt gradus XXV scorpii, quorum terminus ex autumnali aequinoctio removetur gradibus zodiaci LV, quibus ascensio recta per quintam huius ferme est grad. LII min. XXXX.

Ilis itaque duobus arcubus ad meteoroscopium primo aut quinto introitu missis gradus redduntur ferme LXXVII, qui primum dicantur inventum, quoniam punctus eclipticae grad. XXIII scorpii claudens in eius semicirculo constituitur descendenti. Deinde introitu secundo idem ingressus instrumentum cum declinatione finis vicesimi quinti gradus scorpii grad. XIX et min. IIII atque cum altitudine polari gradium XXXXVIII per introitum secundum excipio inventum grad. quasi XIII min. XXXX, cuius complemento grad. LXXVI | min. 256v XX cum complemento polaris altitudinis gra.. XLIII per quintum aut primum introitum ad meteoroscopium remisso tertium prodibit inventum grad. XXXXIII min. XXXXV fere, quo dempto grad. LXXVII, inventi scilicet primi, relinquuntur gradus XXXIII min. XV ferme, quos cum complemento inventi secundi grad. LXXVI min. XX secundo introitu intra meteoroscopium relegans recipio gradus XXXII, quorum complemento grad. LVIII cum invento secundo grad. XIII min. XXXX primo aut quinto introitu ad meteoroscopium remisso arcus reddetur grad. XVI min. XXX fere, quibus ex grad. XXV scorpii diminutis relinquuntur ex scorpii signo grad. VIII min. XXX; quod est intentum.

Propositum itaque absolvere utroque laboramus modo, qui tamen in praecedenti traditur, meo quidem iudicio et brevior et facilior videtur, utro igitur utamur, nostra prodibit intentio.

Arcus demum zodiaci pro data descensione respondens invenitur, dempto descensioni datae semicirculo atque cum reliquo per praesentem aut per praemissam arcum eclipticae quaesitum semicirculo rursus adicientes habebimus intentum. | 256r

a) Hs. hat exttrahamus.

$= 180^0 - \Sigma DH$), $\sin x = \sin \nu \cdot \cos II$ (Aufg. 2, im $\triangle\, \Sigma DH$ ist $\sphericalangle \Sigma = 90^0 - x$), endlich $\sin y = \frac{\sin II}{\cos x}$ (Aufg. 1, im $\triangle\, \Sigma DH$ ist $y = \Sigma D$); dann ist (in Fig. 20) $\Sigma V = \lambda_1 \pm y$.

Statt zu bilden siu $x = \frac{\sin \nu}{\cos II}$ und $\sin y = \frac{\sin II}{\cos x}$ kann mau auch direkt bilden: $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} II : \cos \nu$ (Aufg. 8); dies folgt nämlich aus

$$\sin y = \frac{\sin II}{\sqrt{1 - \sin^2 \nu \cos^2 II}}.$$

Beispiel: $\alpha_1 = 232^0\, 38'$, $\varphi = 48^0$. Resultate: $\lambda_1 = 235^0$, $\lambda_1 - 180^0 = 55^0$, $\alpha_1 - 180^0 = 52^0\, 40'$; $\delta_1 = 19^0\, 4'$, $I = 77^0$, $II = 13^0\, 40'$, $III = 43^0\, 45'$, $x = 32^0$, $y = 16^0\, 30'$, $\lambda_1 - y = 218^0\, 30' = 8^0\, 30$ des Skorpions.

Propositio XXII.

Caeli medium quocumque tempore post meridiem dato rimari.

Verum solis locum pro tempore dato ex motuum tabulis addiscamus. Cuius ex quinta huius ascensio recta quaeratur, subiectum deinde tempus per huius XIIII in gradus commutemus aequatoris, et eisdem rectae solis ascensioni coacervatis recta medii caeli producitur ascensio, qua demum M. C. per sextam huius non latebit. At non huius obliviscamur cautionis, hoc scilicet aggregato circulum, id est gradus CLX, superante. Nam his ex eo sublatis reliquum M. C. ascensionem manifestabit rectam.

Velut sole in partibus XXVI collocato leonis post meridiem aliquem horis X min. XXXI jubear M. C. reperire; igitur per XIII huius, hoc tempus dabit in aequatore gradus CLVII min. XXXXV. His adiectis rectae solis ascensioni, quae per quintam huius habetur fere grad. CXXXXVIII min. XVI, summa proveniet grad. CCCVI min. I, cui per VI huius respondent in M. C. seu in horizonte | recto grad. III min. XXXXII aquarii; quod erat ostendendum. 257v

Propositio XXIII.

Quocumque momento post meridiem aliquem exhibito super quovis notae latitudinis horizonte ascendens signiferi punctum investigare.

In hoc etiam, quemadmodum in praemisso problemate, solis opus habemus vero loco.

Ad propositum itaque momentum M. C. recta quaeratur ascensio, cui si quadrans adiungetur, obliqua proveniet ascensio horoscopantis, scilicet ex zodiaco puncti, quare per XX et eius sequentem huius ascendens signiferi punctum non latebit.

Quemadmodum solis cursu complente partes V piscium, actis post meridiem horis XVII min. XXXXI horoscopans, si velim zodiaci punctum super

---

22. Proposition.

Bestimmung des gerade kulminierenden Sternbildes der Ekliptik, wenn die Länge und der Stundenwinkel der Sonne bekannt ist.

Zunächst verwandelt man den Stundenwinkel t_s (nach Prop. 13) in Grade, und bestimmt aus der Länge nach Prop. 6 die Rektaszension der Sonne α_s; die Summe $\alpha_s + t_s$ ist die Rektaszension α des kulminierenden Punktes, dessen Länge λ sich aus Prop. 6 ergibt. Beispiel: $\lambda_s = 26^0$ des Löwen $= 146^0$, $t_s = 10^h\,31^m = 157^0\,45'$. Hieraus $\alpha_s = 148^0\,16'$ (num. $143^0\,40'$; der Verfasser bestimmt fälschlich $\operatorname{tg}\alpha_s = \operatorname{tg}\lambda_s : \cos\varepsilon$ statt $\operatorname{tg}\alpha_s = \operatorname{tg}\lambda_s \cdot \cos\varepsilon$) $\alpha_s + t_s = \alpha = 306^0\,1'$, $\lambda = 303^0\,42'$ (num. $303^0\,42'$) d. h. es kulminiert der Punkt, dessen Länge $3^0\,42'$ des Wassermanns ist.

23. Proposition.

Bestimmung der Länge des gerade aufgehenden Tierkreiszeichens aus der Rektaszension und dem Stundenwinkel der Sonne.

Man bestimmt zunächst nach Prop. 22 die R. A. des kulminierenden Punktes (α), und nach Prop. 19 seine Höhe h. Dann ist $\alpha + 90^0$ die ascensio

horizonte patrio cognoscere, per praemissam igitur M. C. habet grad. IIII, quorum rectae ascensionis gradibus CCXXXXII, qua|drante coniuncto ascensio resultat obliqua graduum CCCXXXII, quibus per XX et suam sequentem praesentis operis ascendens invenitur graduum VII aquarii, qui meae momento geniturae quasi perorti fuere. Propositum itaque patet. 257r

Propositio XXIIII.

Idem per horas et earum minutias ab occasu sumptas iuxta integri morem horologii, quo Italia et quaedam nationes aliae hac utuntur aetate, perscrutari.

Datum ab occasu tempus per XIIII huius in aequatoris gradus conversum adiciatur ascensionibus obliquis puncti in signifero solis sedi per diametrum oppositi coacervata itaque summa obliquam reddet ascensionem horoscopantis in signifero puncti, qui demum per XX et suam sequentem huius innotescet. | 258v

Ut si velim post occasum solis in fine grad. VII aquarii constituti ad patrium horizontem horis VII min. XXXI oriens zodiaci quaerere punctum, loco huius solis per diametrum grad. VII leonis obicitur, cui per XVI huius ascensio invenitur obliqua ad eundem horizontem grad. CVI min. XXXX fere, his additis gra. CXII min. XXXXV horas VII min. XXXI efficientibus, ascensio producetur obliqua horoscopii quaerendi graduum CCXIX min. XXV, quibus pro horizonte patrio grad. XXVIII et semis librae cooriuntur fere; quod est intentum.

Propositio XXV.

Omni momento post meridiem aliquem dato solis elevationem super quemlibet horizontem discutere.

Ibi a meridiano distantia solis opus est, quam per huius decimam quartam reperiemus horis et earum minutiis, quibus oblati tempus momenti a

---

obliqua; hieraus findet man nach Prop. 20 die gesuchte Länge λ_{Σ}. Beispiel: $\alpha_s = 335^0$, $t = 17^h\,41^m$. Resultate: $\alpha = 242^0$, $h = 4^0$, A. O. $= 332^0$, $\lambda_{\Sigma} = 307^0$.

24. Proposition.

Lösung der gleichen Aufgabe, wenn die Länge der Sonne (λ_s) und die seit ihrem Untergang verstrichene Zeit (t_s) gegeben ist. Methode, wie sie in Italien benutzt wird.

Beispiel: $t_s = 7^0\,31'$, $\lambda_s = 307^0$. Das Beispiel wird nur angedeutet: $\lambda_s - 180^0 = 327^0$; die A. O. dieses Punktes ergibt sich nach 16. zu $106^0\,40'$ (daß der Tagbogen aus 14 bestimmt wird, wird nicht gesagt); dann ist A. O. $+ t_s$ $= 106^0\,40' + 112^0\,45' = 219^0\,12$ der gesuchte Winkel λ_{Σ}.

25. Proposition.

Bestimmung der Höhe der Sonne, wenn die geographische Breite, die Deklination und die Meridiandistanz d. h. der Stundenwinkel gegeben sind. (Fig. 22).

258r meridie ante | vel posterius removetur in gradus atque eorum minutia conversis. Quae quidem distantia vel quadrantem aequabit aut eo minor erit aut maior, et horum quotlibet praeter postremum bifariam continget, scilicet sole vel declinationem possidente aliquam vel nullam. Distantia namque quadrante maior non eveniet, nisi sole borealem habente declinationem; si sol quidem declinationis careat recessu, non multo negotio propositum absolvemus. Immo per brevissimum perstringemus computum. Nam habitam dati momenti a meridie distantiam ex gradibus LXXXX minuentes reliquum cum complemento regionariae latitudinis per introitum secundum meteoroscopio destinemus; ipsa enim altitudo solis apparebit subito.

Velut si solis aequatorem tenentis supra patrium horizontis cupiam altitudinem duabus post meridiem horis auxilio huius organi numerare, horae duae 259v per XIIII huius gradus distantiae ipsius XXX praebent | cum complemento graduum LX, atque cum complemento latitudinis regionis patriae meteoroscopium secundo ingrediens introitu mox recipio desideratam solis altitudinem graduum XXXIIII min. X fere. Sole autem semicirculum zodiaci percurrente borealem, quod proponitur, paulo difficilius explorabitur, excepto solis unico situ per distantiam ante meridiem grad. LXXXX posito, quo faciliter aeque, ut ante, quando declinationibus sol ipse carebat, eius supra horizontem datum invenietur altitudo. Meteoroscopium enim secundo accedentes introitu cum altitudine polari atque cum solis declinatione quaesita solis altitudo nos nequaquam latebit.

Ut sole geminorum caput tenente pro regione patria quadrans sit ipsa distantia; igitur iuxta praemissam doctrinam meteoroscopio incidens cum patrialatitudine atque declinatione solis ferme grad. XX min. XII investigatam 259r reperio solis altitudinem grad. XV min. X fere. |

Quando autem distantia haec fuerit inferior, ingrediendum est ad organum hoc cum distantiae complemento super basim accepto atque solis declinatione per tertium introitum, arcusque repertus primum dicatur inventum; regula quoque sic manente per introitum quartum alius exceptus arcus inventum

---

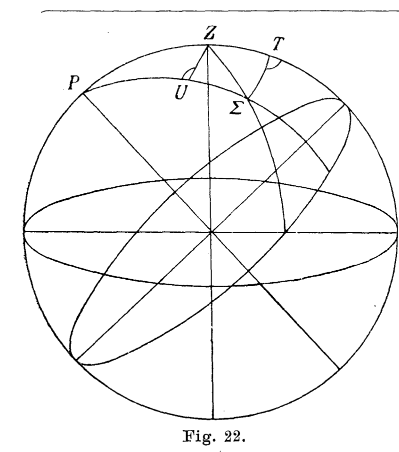


Fig. 22.

Zunächst wird der Fall $\delta = 0$ behandelt; dann ist $\sin h = \cos \varphi \cos t$. Dementsprechend wird Aufg. 2 auf $90^0 - \varphi$ und $90^0 - t$ angewandt. Beispiel: $\varphi = 49^0 27'$, $t = 2^h = 30^0$. Resultat: $h = 34^0 10'$ (num. $34^0 10'$).

Ein zweiter Spezialfall ist $t = 90^0$ für eine beliebige Deklination; dann ist $\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta$. Lösung gleichfalls mit Aufgabe 2 für φ und δ. Beispiel: $\varphi = 49^0 27'$, $\delta = 20^0 12'$. Resultat: $h = 15^0 10'$ (num. $15^0 12'$).

Lösung des allgemeinen Falles: Man bildet $\cos I = \cos \delta \cdot \sin t$ (Aufg. 3, im $\triangle P\Sigma T$ ist $\sphericalangle T = 90^0$ $\sphericalangle P = t$, $P\Sigma = 90^0 - \delta$, $\Sigma T = 90^0 - I$), dann $\cos II = \operatorname{cotg} I \operatorname{cotg} t$ (Aufg. 2, im $\triangle P\Sigma T$ ist $PT = 90^0 - II$), $x = II + 90^0 - \varphi (90^0 - x = ZT = PT - PZ = (90^0 - II) - (90^0 - \varphi))$, endlich $\sin h = \sin I \cdot \sin x$

nominetur secundum, quo adiuncto ad regionariae latitudinis complementum, si solis declinatio sit borealis, aut eodem invento secundo gradibus et minutis, si qua continet, eiusdem complementi detracto constituta declinatione solis austrina. Qui enim hac via comperitur arcus, cum invento primo per secundum introitum meteoroscopio destinandus est, et quaesita solis altitudo manifestabitur.

Sole rursus geminorum caput occupante fiat, ut cupiam horis quatuor ante vel post meridiem patriae horizontis elevationem solis invenire, meteoroscopium itaque intrans, velut hoc sonat praeceptum, cum solis declinatione grad. XX min. XII atque cum complemento distantiae meridianae graduum LX inprimis elicio primum inventum grad. XXXV min. XXXXV; deinde inventum secundum graduum | XXXVI min. XX fere, cui si patriae latitudinis adiciam 259v complementum gradus congregantur LXXVI cum minutis LIII, quibus et primo invento iuxta praeceptum hoc organo nostro remissis solaris altitudo reddetur grad. XXXIII min. XXXX fere,

Ubi demum proposita distantia superaverit aequatoris quadrantem, eam quadranti dementes residuum cum declinatione solaris intra organum inter aequidistantes numerata per tertium introitum committamus prius invento comperto primo. Deinde regula sic firmata secundum quarto introitu inventum excipientes, et ab eo complementum polaris altitudinis deducamus. Denique per hoc aggregatum[a]) atque primum inventum introitu secundo solaris exibit altitudo.

Sol itaque constituatur, ut antea, sub geminorum initio, et intentio sit eius altitudinem supra nativum solum, id est horizontem Norimbergensem elicere horis ante postve meridiem eiusdem civitatis septem, quae per XIIII huius gradus efficiunt solaris paralleli CV, quibus quadrante dempto reliquum graduum XV supra basim numeratum cum declinatione solis introitu tertio ad meteoroscopium inferens pro invento primo accipio gradus fere XXV | regula 260r

a) Hs. hat aggrediatur.

(Aufg. 2, im $\triangle\, \Sigma T Z$ ist $Z\Sigma = 90^0 - h$). Beispiel: $\varphi = 49^0\,27'$, $\delta = 20^0\,12'$, $t = 4^h = 60^0$. Resultat: $I = 35^0\,45'$, $II = 36^0\,20'$, $x = 76^0\,53'$, $h = 33^0\,40'$.

Zweites Beispiel (für $t > 90^0$): $\varphi = 49^0\,27'$, $\delta = 20^0\,12'$, $t = 7^h = 105^0$. Dann ist zu nehmen $t - 90^0 = 15^0$; es ergibt sich $I = 25^0$, $II = 55^0\,10'$, $x = II - (90^0 - \varphi) = 14^0\,37'$, $h = 5^0\,50'$.

2. Methode (per aequedistantes). Man bildet $\cos I = \sin t \cdot \cos\delta$ (Aufgabe 2, $90^0 - I = \Sigma T$, wie oben), $\sin x' = \frac{\sin\delta}{\sin I}$ (Aufg. 1, $90^0 - x' = PT$), $II' = (90^0 - \varphi) \pm x\,(90^0 - II' = ZT = PT - PZ = (90^0 - x) - (90^0 - \varphi))$, $\sin h = \sin II \cdot \sin I$ (Aufg. 2, im $\triangle\, ZT\Sigma$ ist $Z\Sigma = 90^0 - h$, wie oben).

Beispiel: $\varphi = 49^0\,27'$, $\delta = 20^0\,12'$, $t = 2^h = 30^0$; Resultat: $I = 72^0$, $x = 23^0$, $II = 63^0\,33'$, $h = 51^0\,49'$.

Zweites Beispiel (für $t > 90^0$): $t = 7^h = 105^0$, sonst die gleichen Daten. Resultat: man verwendet $180^0 - t = 75^0$, $I = 25^0$, $x = 54^0 45'$, $II = 90^0 - \varphi - x = 14^0\,12'$, $h = 5^0\,50'$.

deinde sic quiescente per introitum quartum inventum extrahitur secundum graduum LV et min. X fere, quibus eiusdem latitudinis regionariae complemento subtracto gra. XIIII cum min. XXXVII fere relinquuntur. His demum cum invento primo grad. XXV per introitum secundum ad organum hoc remissis altitudo prodibit quaesita graduum V et min. L fere.

Aequedistantibus quoque idem sic efficiemus. Etenim pro distantia minore gradibus LXXXX ingrediendum est in primis cum eadem distantia et cum declinationis complemento ad meteoroscopium per introitum secundum, arcus itaque compertus, si gradibus auferatur LXXXX, primum relinquit inventum, quo cum ipsa solis declinatione illic per quintum aut primum introitum remisso numerus quidem prodetur, qui declinatione constituta boreali polaris altitudinis complemento congregatus aut eidem sublatus, si solis austrina fuerit declinatio, secundum conficiet inventum, per quod demum atque inventum primum introitu secundo solis exibit altitudo.

Quaeramus itaque solis altitudinem supra patrium solum sub initio geminorum constituti pro horis a meridie duabus, quae per XIIII huius distantiam reddunt grad. XXX, quam cum complemento declinationis | grad. LXIX min. XXXXVIII meteoroscopio per introitum inducens secundum gradus excipio XXVIII, quorum complementum gra. LXII, inventi scilicet primi, cum solis declinatione grad. XX min. illuc primo aut quinto introitu si remittatur, grad. eliciuntur XXIII, quibus complemento polaris altitudinis adiunctis partes emergent LXIII min. XXXIII; eas demum per secundum introitum inferentes meteoroscopio solis elevationem inveniemus grad. LI min. XXXX fere.

260v

Distantiam deinceps a meridiano positam maiorem gradibus LXXXX subtrahamus semicirculo, reliquum cum declinationis solaris complemento per introitum secundum meteoroscopio inferentes arcum excipimus, qui quadranti detractus primum relinquit inventum, cum quo deinde atque cum ipsa declinatione introitu primo aut quinto organum hoc ingredientes arcum quendam trahamus, cui si polaris altitudinis complementum detrahatur, secundum remanet inventum, quod cum invento primo illuc secundo introitu deductum solis altitudinem nobis reportabit.

Sole igitur geminorum caput iterum obtinente ad eundem horizontem patrium nunc intendo solis altitudinem reperire computatis horis ante vel post meridiem septem, quae per XIIII huius distantiam constituunt graduum CV. His itaque quadrantem superantibus et idcirco a semicir|culo sublato gradus remanent LXXV, quos cum solaris declinationis complemento grad. LXIX min. XXXXVIII per introitum secundum meteoroscopio immittens gradus accipio LXV, quorum complementum graduum XXV primum dicitur inventum, quod deinde cum declinatione solari graduum XX min. XII primo aut quinto introitu illuc demersum gradus exhibebit LIIII et min. XXXXV fere, quibus detracto

261r

---

26. Proposition.

Bestimmung der Sonnenhöhe nach Johannes Regiomontanus.

Man bildet $\cos I = \sin t \cdot \cos \varphi$ (Aufg. 2, im $\triangle PZU$ ist $\sphericalangle U = 90^0$, $\sphericalangle P = t$, $PZ = 90^0 - \varphi$, $UZ = 90^0 - I$), dann $\sin x = \frac{\sin \varphi}{\sin I}$ (Aufg. 1, im $\triangle PZU$ ist $PU = 90^0 - x$), $II = \delta \pm (90^0 - x)$, (je nachdem $t \lessgtr 90^0$ ist,

polaris altitudinis complemento secundum relinquetur inventum graduum XIIII min. XII, quibus demum cum invento primo per introitum secundum remissis altitudo solis offeretur quasi graduum V min. L. In ceteris autem solis sitibus opus hoc nihil refert a praecedentibus.

Propositio XXVI.

Eandem solis altitudinem alia quadam via, cui Joannes de Regiomonte ingreditur, rimari.

Sole igitur in aequatoris declinatione constituto distantiaque gradibus LXXXX maiore posita eam ex semicirculo minuamus, per reliquum autem et polaris altitudinis complementum secundo introitu numerus est excipiendus, quo grad. LXXXX detracto primum remanet inventum, quo deinde | atque [261v] regionis latitudinem per primum aut quintum introitum arcus habebitur, cui si detraxerimus solaris complementum declinationis, residuum secundum erit inventum. Cum his demum inventis duobus secundo introitu solis elicitur altitudo. In regione, cuius latitudo est grad. XXXXVIII, ut illius utar exemplo, sit distantia a meridiano grad. CV, quibus aequales horae septem constant sole in principio geminorum constituto. Quare de grad. CLXXX subtrahens gradus CV relinquo graduum LXXV, cum quibus atque complemento regionariae latitudinis graduum XLII secundo introitu meteoroscopium ingrediens accipio grad. XXXX min. V fere, quibus quadranti demptis primum restabit inventum grad. XXXXIX min. LV fere, quos deinceps ad organum cum regionis latitudine grad. XXXXVIII deportanti mihi per primum aut quintum introitum numerus[a]) offertur grad. LXXVII min. XXXXV fere, quibus si gradus LXIX min. XXXXVIII complementi solaris declinationis abstulero, secundum remanebit inventum graduum VII min. LVII. Cum his itaque duobus inventis, primo videlicet et secundo, per secundum introitum quaesita solis altitudo mihi manifestabit grad. V min. XXX fere. Sin autem a meridiano distantia quadrante minor extiterit, ergo | cum ea et complemento polaris alti- [262r] tudinis secundo introitu meteoroscopium ingrediamur, arcuque reperto grad. LXXXX detracto residuum erit inventum primum, quod deinde cum altitudine polari per introitum primum aut quintum reddet nobis arcum, cuius complemento solis declinationi addito, si borealis ipsa fuerit, aut ex eodem complemento eadem declinatione sublata, secundum prodibit inventum. Haec demum inventa duo quaesitam solis altitudinem secundo monstrabunt introitu. Cuius etiam pro regione subiecta per eundem exhibetur exemplum tale.

Sit itaque sol, ut ante, in capite geminorum, cum distantia meridiana graduum LX, id est horarum aequalium quatuor, cum qua et polaris altitudinis

a) Hs. hat *numerans.*

$90^0 - II = U\Sigma = P\Sigma - PU = 90^0 - \delta - 90^0 - x)$ und $\sin h = \sin I \cdot \sin II$ (Aufg. 2, wie oben).

Beispiel: $\varphi = 48^0$, $\delta = 20^0 12'$, $t = 105^0$. Resultat: $I = 49^0 55'$, $x = 77^0 45'$, $II = 7^0 57'$, $h = 5^0 30'$.

Zweites Beispiel ($t < 90^0$): $t = 60^0$, sonst die gleichen Daten. Resultat: $I = 54^0 50'$, $x = 65^0 30'$, $II = 90^0 - x + \delta = 48^0 42'$, $h = 34^0 40'$.

complemento graduum XXXXII per introitum secundum arcus extrahitur grad. XXXV min. X fere, cuius complementum grad. LIIII min. L pro primo habeatur invento, quod deinde cum regionaria latitudine grad. XXXXVIII quinto aut primo introitu porrigit nobis ex organo praesenti grad. LXV min. XXX fere, cuius complementum grad. XXIIII min. XXX fere solis declinationi grad. XX min. XII addito secundum producetur inventum graduum XXXXIIII min. XXXXII fere, quibus intra meteoroscopium introitu secundo cum invento primo missis solis restituetur altitudo grad. XXXIIII et min. XXXX fere. In aliis 262v autem solis sitibus | a praecedentis traditione ipse non recedit; quare eam in praesenti repetere supervacaneum iudicabam.

Propositio XXVII.

Solis in semicirculo eclipticae boreali constituti altitudinem horizontalem in circulo magno per verticem dati horizontis atque eiusdem duas cum aequatore sectiones eunte computare.

Id est solis elevationem supra datum horizontem numerare, quando ipse gradibus LXXXX seu horis sex a meridie removetur. Hoc problema latebit neminem, quicumque praemissae declarationem accuratius inspexerit, in ea praecipue parte, qua traditum est, qualiter sole borealem tenente declinationem atque a meridiano gradibus LXXXX seu horis aequalibus sex recedente ipsius altitudo supra datum debeat inveniri horizontem.

Propositio XXVIII.

263r Distantiam solis horizontalem a cir|culo verticali cognoscere.

Verticalis circulus is est, qui per verticem horizontis atque utrasque eius cum aequatore sectiones evadit, ab hoc circulo solis distantia dicitur a plerisque azimut arabico nomine; ad eam igitur agnoscendam per declinationis solaris complementum atque per solis a meridiano distantiam secundo introitu arcus quidem inveniatur, cum quo deinde atque complemento altitudinis solis alius arcus primo aut quinto compertus introitu extrahatur, quo gradibus LXXXX dempto azimut seu distantia solis a circulo verticali remanebit.

Velut ad horizontem patrium aequalibus horis quatuor a meridie solis motu geminorum principium occupante eiusdem azimut scire cupiens accipio ex XXV huius aut antepraemissa solis altitudinem supra eundem horizontem pro dato momento graduum XXXIII et min. XXX. Deinde secundo introitu

---

27. Proposition.

Bestimmung der Sonnenhöhe an dem durch Zenit, Ost- und Westpunkt gelegten Vertikalkreis.

Man löst die Aufgabe der 25. Prop. für den Fall $t = 6^h = 90^0$.

28. Proposition.

Bestimmung des Azimuts der Sonne.

Das Azimut wird hier von Osten bzw. Westen aus gezählt (Fig. 22). Es ist im $\triangle PZ\Sigma$ $\cos a : \sin t = \cos\delta : \cos h$. Man wendet auf $90^0 - \delta$ und t Aufg. 2

per complementum declinationis solaris grad. LXIX min. XXXXVIII atque distantiam datam graduum LX arcus quidam habebitur grad. LIIII min. XXX, quo cum solaris altitudinis complemento grad. LV min. XXX per introitum quintum aut primum gradus eliciuntur LXXXII min. XV fere, quibus quadranti detra|ctis quaesita relinquitur solis azimut, idest a circulo verticali distantia, quae semper meridionalis habetur data solis altitudine superante altitudinem eiusdem in circulo verticali, septemtrionalis vero, solis altitudine minore, quam sit eius altitudo super circulo verticali; ad id ergo explorandum praemissa erit consulenda. 263v

Propositio XXIX.

Angulum ex horizontis et dati eclipticae puncti coincidentia concursuque compaginatum agnoscere.

Duo sunt anguli huiusmodi, orientalis et occidentalis. Orientalis est, qui in orientali hemisphaerio signifero clauditur et horizonte, occidentalis, qui circulis eisdem[a]) in occidentis plaga comprehenditur.

Librae si principium oriatur, angulum hunc polaris altitudinis complementum et maxima solis declinatio conflabunt. Arietis autem initio surgente talis angulus remanebit subtracta complemento regionariae latitudinis maxima solis declinatione, sed dato | puncto alibi in ecliptica constituto, angulis ille ita per[s]crutandus est. Etenim puncto tali orientali, septemtrionalem eclipticae semicirculum possidente, ipsius portio medio caeli et puncto oriente comprehensa semicirculo detrahatur; reliquumque cum altitudine meridiana M. C. per XIX huĩus quaesitae, intra meteoroscopium introitu primo aut quinto missum reportabit angulum, qui quaerebatur. At si ascendens zodiaci punctum in meridiano signiferi reperiatur semicirculo, arcus zodiaci de M. C. altitudine meridiana quinto aut primo introitu quaesitum rursus exhibebit angulum. 264r

Sin autem pro puncto zodiaci dato velimus angulum huiusmodi occidentalem habere, invenire necesse est angulum talem orientalem pro puncto eclipticae, quod priori dato per diametrum opponitur. Nam quantocunque angulo quispiam signiferi punctus oritur, cum tanto etiam eidem per diametrum oppositus occidit, et contra.

Velut caput tauri cum tanto oritur angulo, quanto ipsi per diametrum oppositum scorpii principium occidit, et e contrario. In patrio itaque horizonte | perortis[b]) ex tauri signo gradibus XXIX min. X propositum esto angulum 264v

a) Hs. hat *eiusdem*. b) Hs. hat *parortis*.

---

an ($\sin x = \cos\delta \cdot \sin t$, $x = \Sigma T$), dann auf x und $90^0 - h$ Aufg. 1 ($\cos a = \frac{\sin x}{\cos h}$, $\sphericalangle \Sigma Z T = 90^0 - a$).

Beispiel: $t = 4^h$, $\delta = 20^0 12'$, $h = 23^0 30'$. Resultat: $x = 54^0 30'$, $a = 7^0 45'$.

29. Proposition.

Bestimmung des Winkels zwischen Ekliptik und Horizont, wenn ein bestimmter Punkt des Tierkreises gerade aufgeht.

Es ist ein östlicher und ein westlicher Winkel zu unterscheiden.

huiusmodi cognoscere. Igitur per XVI et XVII huius medium caeli erit ferme principium aquarii, cuius altitudo meridiana per XIX huius invenitur quasi graduum XX min. XXI, subtracto deinde arcu zodiaci inter M. C. et oriens zodiaci punctum comprehenso de semicirculo, ut ante admonetur, remanent gradus LX min. L, qui cum altitudine meridiana grad. XX min. XXI introitu primo aut quinto dabunt fere grad. XXIIII, qui sunt anguli quantitas quaesiti.

Item quoque angulus alia quadam ratione sic invenitur. Per XVIII huius notus sit angulus, qui ex eclipticae atque meridiani fit concursu circa datum oriens zodiaci punctum; huius etiam puncti per secundam huius declinatio cognoscatur, quae gradibus LXXXX dematur. Reliquum itaque cum altitudine poli si primo aut quinto introitu intra organum hoc mittatur, arcus emerget, qui praemisso incidentiae angulo demptus horizontalem pro puncto dato relinquet incidentiae cum horizonte angulum.

265r Volens igitur ad eundem horizontem laborare pro | eodem angulo inveniendo gradibus XXIX cum minutis X de[a]) tauro exortis; huius itaque puncti datum arcum ex tauri signo terminantis, angulum concursus eius cum meridiano invenio per XVIII huius grad. fere LXXVIII min. XXX. Intrans deinde ad meteoroscopium primo introitu aut quinto, cum complemento declinationis eiusdem puncti gradus LX min. XXXIIII atque cum patria latitudine grad. XXXXIX min. XXVII excipio gradus LIIII et semis fere, quos ubi praemisso concursus angulo detraxerim, angulus remanebit, qui quaerebatur grad. XXIIII fere, quod iterum nostram efficit intentionem.

Si propositus signiferi punctus arietis capiti vicinius accesserit, qui si librae initio fuerit propinquior, arcum iam inventum addamus angulo concur-

a) Hs. hat *d. t.*

Wenn die Wage aufgeht, so ist dieser Winkel $\chi = 90^0 - \varphi + \varepsilon$, beim Aufgang des Widders $\chi = 90^0 - \varphi - \varepsilon$.

Allgemeiner Fall. Man bestimmt zunächst den Bogen $\psi = \Sigma M$ (M ist der gerade kulminierende Ekliptikpunkt) nach Prop. 16 und 17 und die (mittägliche) Höhe h dieses Punktes. Dann ist $\sin\chi = \frac{\sin h}{\sin\psi}$, d. h. man wendet Aufg. 1 an.

Beispiel: $\lambda_\Sigma = 59^0 10'$, $\lambda_M = 300^0$, $h_M = 20^0 21'$, $\psi = \Sigma M = 240^0 50'$; $\Sigma M - 180^0 = 60^0 50'$, $\chi = 24^0$. Den westlichen Winkel erhält man, wenn man den östlichen für den von dem gegebenen um 180^0 entfernten Ekliptikpunkt bestimmt.

2. Methode. Man bestimmt nach Prop. 18 den Winkel η zwischen Ekliptik und Meridianebene $\left(\sin\eta = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta_m}\right)$, dann mit Aufgabe 1, auf φ und $90^0 - \delta$ angewandt, $\left(\sin x = \frac{\sin\varphi}{\cos\delta}\right)$ einen Winkel x. Es ist nicht ersichtlich, wie der Verfasser zu dieser Ableitung kommt. Der im Beispiel angegebene Wert für $90^0 - \delta$ würde einer unmöglichen Deklination entsprechen. Dann ist der gesuchte Winkel $\chi = \eta - x$.

Beispiel: $\lambda = 59^0 10'$, $\eta = 78^0 30'$, $90^0 - \delta = 60^0 34'$, $\varphi = 49^0 27'$, $x = 54^0 30'$, $\chi = 24^0$.

sus eclipticae cum meridiano, cuius deinde aggregationis summa de semicirculo sublata relinquit propositum; hac itaque ratione nostram obtinebimus intentionem, de orientalis incidentiae angulo meridiani cum ecliptica, quem si de aliquo zodiaci puncto super occidua horizontis medietate cognoscere velimus, tunc talis occidentalis incidentia erit quaerenda pro eclipticae puncto, qui per diametrum dato examussim opponitur, velut doctrina praecedens admonet. Huiusmodi enim angulus repertus pro puncto | dato erit occiduus. Haec itaque 265v se habent latitudine regionis maximam solis declinationem excedente, quid autem deinceps foret agendum in libello problematum latius admonebo.

Propositio XXX.

Angulum ex signifero ac elevationis circulo constitutum orientali zodiaci puncto cognito perdiscere.

Dati ergo puncti, circa quod talis constituitur angulus, horizontalem altitudinem per XXV aut eius sequentem capiatur, cum qua et dati puncti vel ab ascendente vel occidente zodiaci puncti, utri eorum datum punctum vicinius accesserit, distantia supra regulam computata decimus fiat introitus, arcuque reperto patebit intentum. Sit ergo punctus super horizontem patrium datus, qui grad. XVI arietis finiat, apud quem angulus ex ecliptica et altitudinis circulo compositus esto investigandus oriente geminorum gradu XV. Eiusdem puncti ab ascendente, cui ipsum magis accedit, distantia graduum habetur LIX, cum qua et cum dati puncti supra eundem ho|rizontem elevatione grad. XXIIII 266r per introitum decimum meteoroscopium accedenti mihi gradus offeruntur LXXIIII cum minutis XX, qui sunt quantitas anguli quaesiti.

Idem quoque solis invenietur aequedistantibus hoc pacto; cum duobus

---

30. Proposition (Fig. 23).

Bestimmung des Winkels zwischen Ekliptik und Höhenkreis (Vertikalkreis d. Zenit, Ost- und Westpunkt) aus der Länge und Höhe des genau im Osten stehenden Punktes der Ekliptik und der Länge des gerade aufgehenden Punktes.

Die Differenz der beiden Längen ergibt den Abstand des Punktes Σ_2 vom Punkt Σ_1. Dann ist $\cos \nu = \operatorname{tg} h_2 : \operatorname{tg}(\lambda_2 - \lambda_1)$. Also Lösung mit Aufgabe 10.

Beispiel: $\lambda_1 = 16^0$, $\lambda_2 = 75^0$, $h_2 = 24^0$, $\nu = 74^0\,20'$.

2. Methode (per aequedistantes). Man wendet Aufg. 1 auf $90^0 - (\lambda_2 - \lambda_1)$ und $90^0 - h$ an $\left(\sin x = \frac{\cos(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos h_2}\right)$ $(x = 90^0 - \Sigma_1 O)$. Dann auf $90^0 - x$ und $\lambda_2 - \lambda_1$ $\left(\sin \nu = \frac{\cos x}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}\right)$.

Beispiel: $\lambda_2 - \lambda_1 = 59^0$, $h = 24^0$, $x = 34\frac{1}{2}^0$, $\nu = 74^0\,20'$.

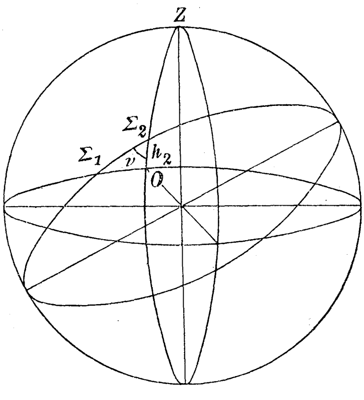


Fig. 23.

complementis, distantiae scilicet et elevationis, primus aut quintus fiat introitus. Deinde cum arcus inventi complemento atque cum ipsa distantia primus aut quintus iterum fiat introitus. Quod enim ita colligetur, desideratus erit angulus.

Velut in praemisso videbimus exemplo, pro quo datae distantiae complementum grad. XXXI cum altitudinis dati puncti complemento grad. LXVI primo aut quinto introitu nobis mittentibus gradus restituuntur XXXIIII et semis, quorum complementum grad. LV et semis cum praemissa distantia eodem primo aut quinto introitu remittentes quaesitum excipimus angulum, velut ante, grad. LXXIIII et min. XX fere.

Propositio XXXI.

Portiones horizontales, quas horarii circuli de horizontis peripheria resecant, explicare. |

266v Circulos eos appello horarios, quorum per mundi polos euntium proximi quique quindenis in aequatore gradibus a se recedunt, qui quoque idcirco nuncupationem ab horis sortiuntur, quod tempus, quo quidem primo motu gradus in aequatore revolvuntur, aequalis efficitur hora una, sive de meridie, sive a solis aut ortu vel occasu horarum fiat supputatio, quovis igitur modo illarum fiat computus, ut propositum absolvamus, earum a meridie recessus discatur.

Ipsis itaque initium de meridie sumentibus horizontales huiusmodi portiones duo, quas claudunt horarum circuli, hac praecipue via deprehenduntur. Ipsa namque regula super latitudinis regionariae complementum in quadrante

---

31. Proposition.

Bestimmung der durch die Stundenkreise (Kreise durch die Weltachse, die um je 15^0 voneinander abstehen) auf dem Horizont abgeschnittenen Bögen.

Man stellt das Lineal auf $90^0 - \varphi$ am Quadranten und bestimmt die Schnittpunkte der inclinati 15^0, 30^0 mit dem Lineal. Es ergeben sich:

Tab. 1.	Werte Werners	Tab. 2.	Berechnete Werte
1^h	11^0 $6'$	1^h	11^0 $30'$
2^h	32^0 $45'$	2^h	23^0 $41'$
3^h	37^0	3^h	37^0 $14'$
4^h	52^0 $45'$	4^h	52^0 $46'$
5^h	71^0	5^h	70^0 $35'$

Aus Fig. 24 ergibt sich $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} t \cdot \sin \varphi$. Hieraus berechnen sich die Werte der zweiten Tabelle.

Konstruktion eines „Horologium solare".

Die Konstruktion geht aus Fig. 25 hervor; die Teilung geschieht entsprechend der Tabelle vom Punkte A aus nach rechts und links. Dann wird ein Winkel $MNO = \varphi$ so auf dem Horolog befestigt, daß seine Ebene senkrecht dazu steht, der eine Schenkel mit der Linie AE und der Scheitel N mit dem Mittelpunkt E zusammenfällt. Der Schatten des anderen Schenkels zeigt dann die Sonnenzeit an.

posita inclinatus, qui de quadrantis peripheria quindenis distat partibus, cum eiusdem quadrantis circumferentia eos separabit ex regula horizontis[a]) gradus, qui post aut ante meridiem horae uni debentur. Deinde inclinatus ab quadrantis peripheria gradi. XXX remotus cum eadem periphe|ria eodem penitus modo (267r) ex regula segregabit horizontis gradus horis duabus ante vel post meridiem sumptis convenientes, et ita de reliquis horariis huiusmodi arcubus agendum est.

Ut autem id cognitu facilius fiat, propone tales horarum portiones super horizonte scrutari patrio. Regula igitur super patriae latitudinis complemento grad. XXXX min. XXXIII in praesentis organi quadrante posita primum quidem pro arcu unius horae comperio gradus XI min. VI, pro horis duabus eiusdem horizontis gradus XXXII min. XXXXV fere, pro horis tribus partes XXXVII, pro quatuor horis gradus LII min. XXXXV, pro horis quinque partes horizontales LXXI fere. Habitis his numeris haud multo labore conficiemus horologium solare.

Hoc modo circulus $ABCD$, cuius centrum E super planitie quadam sive in marmore, sive aerea ta|bula seu assere bene planato designetur, cuius cir- (267v) cumferentia duabus protactis diametris AC et BD[b]) in quatuor distinguatur quadrantes. Ipsamque quadra AB per aequas XC secetur partes atque diametro AC supposita tanquam meridiana linea unus circini pes intra punctum affigatur, alter mobilis in peripheriam quadrantis AB translatus usque ad gradus XI min. VI extendatur; ibique nota F posita. Idem deinde circini pes mobilis in circumferentiam quadrantis AD moveatur ad eiusque contactum G

a) Hs. hat *horizontis* korr. aus *horizontalis*. b) Hs. hat BC.

2. Methode der Konstruktion der gesuchten Bögen auf dem Horizont (per aequedistantes). Man wendet Aufg. 2 auf t und $90^0 - \varphi$

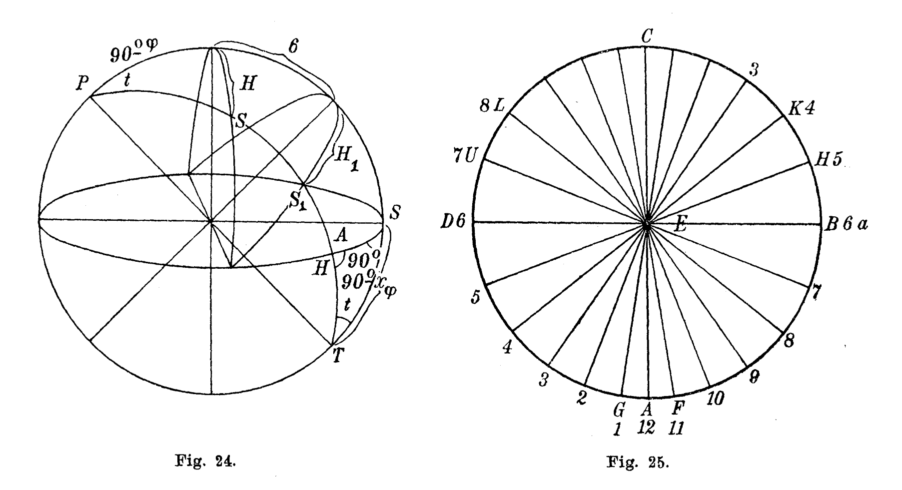


Fig. 24. Fig. 25.

an $(\sin x = \sin t \cdot \cos\varphi \ (90^0 - x = \sphericalangle THS))$. Dann Aufgabe 1 auf $90^0 - x$ und $90^0 - t \ (\sin(90^0 - A) = \cos t : \cos x)$.

Beispiel: $t = 1^h = 15^0$, $\varphi = 49^0 27'$, $x = 8^0 40'$, $A = 11^0 6'$.

signum scribatur. Protactis posthaec duabus rectis EF et EG duae constabunt horarum lineae, quarum una horae undecimae ante meridiem, altera primae post eundem horae serviet, haud secus inventis auxiliantibus numeris ceterarum describemus horarum lineas; BD autem diameter duas ostendet horas, sextam[a]) scilicet ante meridiem, et sextam post eundem. Huius namque circuli $ABCD$ puncto A nostris admoto pectoribus, notaque BA dextris, signo vero D ad laevam posito semidiameter EB sextae horae ante meridiem, ED vero semidiameter horae sextae post meridiem serviet. |

268r At quartam et quintam horam ante meridiem atque septimam horam et octavam post meridiem sic liniabimus defixo uno circini pede intra B punctum, altero in peripheria BA extenso super horae septimae antemeridianae punctum, eodem quoque pede revoluto ad circumferentiam quadrantis BC ibique nota H posita circini etiam non[b]) mutati pedem unum locemus ad punctum D, altero circumferentia quadrantis CD admoto punctus unus signetur. Defixo iterum uno circini crure super B puncto reliquum extendamus super peripheriam quadrantis AB ad horae octavae lineam eodemque revoluto in peripheriam quartae BC atque puncto K signato, transferemus circinum sic extensum cum uno eius crure intra D punctum, alteroque circumferentiae quadrantis CD applicato nota L scribatur, protactis demum de centro E rectis quatuor ad puncta quatuor H, I, K, L atque horarum numeris, ut decet,
268v adnotatis apud singularum lineas horarum, sic videlicet, | ut iuxta punctum K quatuor scribuntur, circa H quinque, sic continue numeros augendo[c]) usque ad XII, qui iuxta punctum A scribantur. Post haec circa G unitas ponatur et ad proximo sequentem lineam horariam binarius, qui numerus horarius continuo crescat usque ad VIII sicut octonarius prope L notam scribatur.

Postremo planus sumatur angulus MNO aequalis altitudini polari, velut pro numeris horarum praemissis, qui sit aequalis grad. XXXXII min. XXXII[!]. Is tamen pro diversis horizontibus differentium[?] latitudinem in dies[?] variatur, cuius apex N super E horologii umbilico firmetur; eiusdem vero anguli MNO planum ad lineam meridianam AE perpendiculariter erigatur. Itaque tandem praesens sciotericon consumabitur horologium, eius usus is erit: Descripta linea meridiana super plano aliquo firmiter quiescente, ad horizontis-

a) Hs. hat *septam*. b) Nach *non* hat Hs. das Wort *positi* gestrichen.
c) Hs. hat *numero saugendo*.

32. Proposition.

Bestimmung der Abschnitte der Stundenkreise auf dem Vertikalkreis.

Aus Fig. 24 folgt: $\operatorname{tg} H = \operatorname{tg} t \cdot \cos \varphi$ (Aufg. 6).

Die erhaltenen Werte sind:		Die berechneten:	
t	H	t	H
1^h	$9^0\ 30'$	1^h	$9^0\ 53'$
2^h	$20^0\ 30'$	2^h	$20^0\ 34'$
3^h	$32^0\ 45'$	3^h	$33^0\ 2'$
4^h	48^0	4^h	$48^0\ 24'$
5^h	$67^0\ 30'$	5^h	$67^0\ 36'$

que posito aequedistantiam, cui deinceps meridianae lineae diameter AC horologii huius sic applicetur, ut ab illa nec ad dextram neque ad sinistram declinet. Punctus quoque A seu semidiameter AE, quae meridionalem indicat horam | pectus nostrum ad meridiem conversum aspiciat, per horologiumque ita locatione sol ipse irradians singulas indicabit nobis horas. Nam umbra anguli nunc erecti, mox ostendet intra lineas horarias praesentis momentum temporis. 269r

Sed post longam digressionem revertor ad illud, de quo prius oratio defluxerat; hoc quoque propositum aequedistantibus sic fiet: Nam organum ipsum ingredientes cum horis a meridie in gradus resolutis atque cum regionariae latitudinis complemento secundo introitu quendam comprehendimus arcum, quo LXXXX gradibus ablato arcus quidam remanet, qui per introitum primum aut quintum cum complemento intervalli horarii arcum nobis porriget, quo LXXXX gradibus ablato propositum relinquetur.

Velut in eodem horizonte pro una hora a meridie talem horizontis portionem reperire volens ingredior introitu secundo cum gradibus XV horae uni debitis atque cum complemento patriae latitudinis grad. XXXX min. XXXIII et offendo gradus VIIII min. | XXXX fere; horum complemento grad. LXXX min. XX cum complemento horae unius in gradus resolvere grad. LXXV; deinde per introitum primum aut quintum gradus eliciuntur LXXVIII min. LIIII, quibus quadranti detractis quaesitus horizontis arcus relinquitur grad. XI min. VI. 269v

Propositio XXXII.

Portiones arcuales, quas horarii circuli ex orbe verticali separant[a]), computare.

Posita itaque regula in quadrante super regionis latitudinem mox inclinatus ille quindenis gradibus a quadrantis peripheria discedens cum eadem ex regula, velut in praemissa dictum est, portionem separabit uni horae ante vel post meridiem numeratae debitum, pari quoque modo inclinatus grad. XXX ab eadem quadrantis circumferentia recedens ex regula secabit verticalis portionem circuli horis duabus ante aut post meridiem sumptis com|petentem et inclinatus grad. XXXXV portionem horis tribus convenientem praebebit et ita de ceteris circuli verticalis portionibus agendum est. 270r

a) Hs. hat siperans.

Mittels dieser Werte wird ein dem Vertikalkreis ansprechendes Horolog konstruiert, das zu dem ersten und seiner Meridianlinie senkrecht gestellt wird.

2. Methode (per aequedistantes). Man wendet auf t und φ Aufg. 2 an ($\sin x = \sin t \cdot \sin \varphi$, im $\triangle\, PZS$ ist $\sphericalangle\, PSZ = 90^0 - x$), dann auf $90^0 - x$ und $90^0 - t$ Aufg. 1 $\left(\cos H = \frac{\cos t}{\cos x}\right)$. Beispiel: $t = 1^h = 15^0$, $\varphi = 49^0\, 27'$, $x = 11^0\, 20'$, $H = 9^0\, 30'$.

33. Proposition.

Bestimmung der Abschnitte der Stundenkreise auf einem gegen den Horizont geneigten durch O und W gehenden Kreise (Neigungswinkel σ).

Ut autem id intellectu fiat lucidius, propono verticalis [a]) circuli portiones ad patrium horizontem pro horis singulis a meridie recensitis inquirere. Applicata igitur regula patriae latitudini super quadrantis peripheria, comperio talis portionis arcum pro hora una graduum ferme VIIII min. XXX, pro horis duabus a meridie grad. XX min. XXX, pro tribus horis grad. XXXII min. XXXXV, pro quatuor horis grad. XXXXVIII minuto nullo, pro horis quinque grad. LXVII min. XXX. His itaque numeris pari ratione, velut in praecedenti traditum est, sciotericum conficiemus horologium, cuius scilicet usus omni serviet loco, cuius latitudo fuerit grad. XXXXIX min. XXVII; ita tamen, ut eiusdem horologii planum ad horizontem perpendiculariter erigatur atque e regione meridiei sit positum, ita, quod meridiana linea eidem sit perpendicularis. |

270ᵛ Aequedistantibus idem quoque persolvemus, in primis facto introitu secundo cum latitudine regionis atque cum horaria de meridiano distantia, deinde cum arcus extracti complemento atque complemento eiusdem distantiae horariae primus aut quintus fiat introitus, arcum itaque compertum ex LXXXX gradibus auferentes reliquum pro investigata verticalis circuli portione teneamus.

Velut pro una hora post aut ante meridiem sumpta per introitum ingrediens secundum cum grad. XV et latitudine patriae regionis graduum XXXXIX min. XXVII excipio partes XI min. XX, quorum complementum graduum LXXXIII min. XXXX cum horariae distantiae complemento grad. LXXV per primum aut introitum quintum meteoroscopio remittens accipio grad. LXXX et semis, quibus quadranti detractis quaesita relinquitur verticalis circuli portio graduum IX et semis fere; haud aliter agimus pro ceteris horis.

Propositio XXXIII. |

271ʳ Tales horarum arcus in circulo super horizontis planum inclinato quidem, ad meridianum autem erecto, dinumerare.

Huiusmodi formam domiciliorum perhibent tecta in meridiem exposita, quae ad horizontis declinantur planam superficiem.

Talis inclinationis angulum complemento polaris elevationis adiciamus. Quod si aggregatum hoc quadrans extiterit, ipsum erit nobis inutile, quod eveniet quidem angulo inclinationis regionis latitudinem aequante.

Sin autem idem aggregatum gradus exsuperat LXXXX, ipsum semicirculo detrahetur reliquum erit servandum. Sic quoque aggregatum idem ser-

a) Hs. hat verticulis.

Lösung ist gleicher Weise wie Prop. 32, nur tritt (vgl. Fig. 24) an die Stelle von $90^0 - \varphi$ der Winkel $90^0 - \varphi + \sigma$ d. h. $\operatorname{tg} H_1 = \sin(90^0 - \varphi + \sigma) \cdot \operatorname{tg} t$. Die gefundenen und berechneten Werte sind für $\sigma = 15^0$.

t	H_1 (gef.)	H_1 (ber.)
1^h	$8^0\ 16'$	$8^0\ 37'$
2^h	$18^0\ 15'$	$18^0\ 5'$
3^h	$29^0\ 4'$	$29^0\ 30'$
4^h	$44^0\ 10'$	$44^0\ 25'$
5^h	$64^0\ 45'$	$64^0\ 39'$

vandum est, eo gradibus LXXXX minore, super quod in quadrantis peripheria numeratum regula ponatur et iuxta praecedentis aut antepraemissae doctrinam quaesitae horarum portiones ex eadem regula percipientur.

Sit ergo planum, quod super meridiano erectum quidem, ab horizonte autem patrio gradibus inclinetur XV, eius igitur patriae la|titudinis complemento graduum XXXX min. XXXIII congregatis excrescunt gradus LV min. XXX, quo iuxta praecedentium doctrinas, posita scilicet regula [a]) in quadrantis peripheria super grad. LV min. XXXIII, comperio pro una hora de meridie computata grad. VIII min. XXI, pro duabus horis grad. XVIII min. XV, pro tribus horis gradus XXIX min. IIII, pro horis quatuor gradus XXXXIIII min. X, pro quinque horis grad. LXIIII min. XXXXV. 271v

Aequedistantibus id etiam sic fiet, inprimis introitu secundo per praemissum vel aggregatum vel residuum, atque cum horaria distantia, deinde per extracti arcus complementum atque complementum horariae distantiae primo aut quinto introitu. Arcus enim nunc elicitus quadranti sublatus intentum monstrabit.

Velut si secundus fiat introitus cum grad. LV min. XXXIII praemissi aggregati atque cum horaria distantia grad. XV, offerentur grad. XII min. X fere; complementum. | grad. LXXVII min. L cum complemento distantiae horariae grad. LXXV primo aut quinto introitu illuc remissam nobis exhibebit gradus LXXXI min. XXXXV, quibus quadranti sublatis remanent grad. VIII min. XV; quod iterum est intentum. 272r

Propositio XXXIIII.

Magni alicuius in sphaera orbis super horizontem erecti quidem, ad meridianum vero inclinati, cognito huius inclinationis angulo, eiusdem quoque cum aequatore inclinationem explorare.

Cognita dati orbis super meridianum inclinatione ipsius et aequatoris inclinationem sic cognoscemus; facto scilicet introitu octavo cum ipso inclinationis angulo atque cum regionis latitudine supra basim numerata quidam praebebitur arcus, quo denuo cum eadem latitudine per introitum quintum aut primum ad meteoroscopium misso quaesitum | nanciscemur angulum. Arcus autem primo repertus est servandus; eo namque consequenter indigebimus. Hic autem arcus primum vocetur inventum et est brevior aequatoris portio dato circulo atque meridiano comprehensa. 272v

a) Hs. hat *regula* korr. aus *doctrina*.

---

2. Methode (per aequedistantes) ebenso wie oben. Für den Fall $\sigma = \varphi$ erhält man keine Lösung.

34. Proposition.

Bestimmung des Winkels zwischen dem Äquator und einer Ebene, die auf dem Horizont senkrecht steht und mit der Meridianebene einen Winkel α bildet.

Aus Fig. 26 folgt: $\cos \psi = \sin \alpha \cos \varphi$. Der Verfasser bildet jedoch zuerst $\operatorname{tg} I = \operatorname{tg} \varphi : \cos \alpha$ (Aufg. 8, im $\triangle ZM'H$ ist $ZH = I$, nach dem Text

Sit ergo datus circulus, qui ad patrium horizontem erigatur, ad meridianum vero inclinetur, graduum LXXV quantitate. Volens itaque propositum angulum reperire, organum ipsum ingredior cum dato angulo inclinationis grad. LXXV et cum datae regionis latitudine grad. XXXXIX min. XXVII super basim numerata, per octavum scilicet introitum, et invenio grad. LXX min. XXXXV fere, qui primum fuit inventum atque servandum est; nam eo sequens propositio opus habebit. Cum hoc deinde invento atque cum eadem latitudine grad. XXXXIX min. XXVII per primum aut quintum introitum angulus, qui quaerebatur, patebit gradus LII min. XV fere.

Id etiam aequedistantibus sic fiat. Inprimis faciamus introitum secundum cum dato inclinationis angulo atque complemento latitudinis; deinde inventi arcus complementum atque complementum datae inclinationis meteoroscopio remittamus per primum aut quintum introitum, exceptique arcus complemen-273r tum | primum dicatur inventum, quo demum atque ipsa altitudine polari per primum rursus aut quintum introitum investigatae inclinationis angulus constabit.

Velut in praemisso circulo, cuius a meridiano [a]) inclinationis angulus grad. LXXV subicitur, volens pro patria regione dati circuli atque aequatoris inclinationem reperire meteoroscopium accedens secundo introitu cum grad. LXXV et complemento patriae latitudinis grad. XXXX min. XXXIII invenio gradus XXXVIII min. XXXXV fere, quorum complementum, scilicet gradus L min. XV, atque dati anguli seu inclinationis complementum graduum XV primo aut quinto introitu illuc remittens arcum excipio, cuius complementum primum vocatur inventum, et est fere graduum LXX min. XXXXV; agendo ulterius iuxta doctrinam praemissam angulus quaesitus habebitur, ut ante, graduum LII min XI.

Proposition XXXV.

Portionis horarias orbis in sphaera magni, cuius planum ad 273v meridiani quidem superficiem | inclinetur, ad horizontem vero erigatur invenire.

a) Nach *meridiano* hat Hs. das Wort *inclinationis* gestrichen.

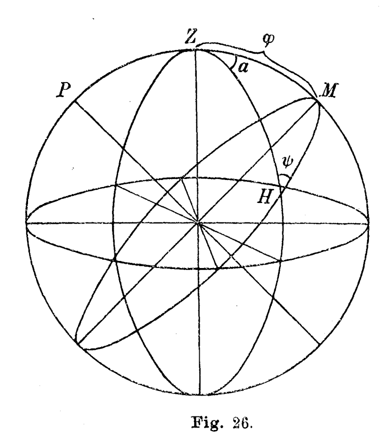


Fig. 26.

wäre jedoch $I = HM$) dann $\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin I}$ (Aufg. 1), warum dieser Umweg gewählt wird, ist nicht ersichtlich.

Beispiel: $\varphi = 49^0\,27'$, $\alpha = 75^0$. Resultat: $I = 70^0\,45'$, $\psi = 52^0\,15'$. Numerisch ergibt sich $I = 77^0\,31'$, $\psi = 51^0\,6'$.

2. Methode (per aequedistantes).

Man bildet $\sin x = \sin\alpha \cdot \cos\varphi$ (Aufg. 2); anstatt jedoch zu schließen, $\psi = 90^0 - x$, bildet der Verfasser $\cos I' = \frac{\cos\alpha}{\cos x}$ und $\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sin I'}$.

Habemus ergo primum inventum praemissae atque inclinationem orbis dati cum aequatore, cum qua et cum invento primo praemissae super basim computato introitus fiat octavus, aut cum eodem invento primo praemissae supra basim computato atque cum elevatione polari tertius fiat introitus, utrolibet enim modo quispiam ingreditur, idem semper excipiet, exceptusque arcus primum huius inventum appelletur, et est brevior dati orbis arcus, inter communem eius cum aequatore sectionem et meridianum comprehensus.

Pro huius igitur arcus prima a meridiano portione horaria reperienda gradus XV addamus complemento primi inventi praemissae et cum aggregati huius complemento supra basim numerato atque cum aequatoris inclinatione per praemissam reperta octavus fiat introitus, arcusque, qui reperitur, primo huius invento detractus quaesitam relinquet portionem horariam, haud aliter reliquae horariae reperi|entur portionis. Nam primi praemissae invento complemento toties quindenis inveniamus gradus, per quot horis horariam portionem scire desideramus, et cum aggregati huius complemento deinde pro hora una, ut prius agentes, intentum habebimus. 274r

Idem autem longe facilius sic efficietur; nam inclinatio aequatoris per praemissam inventa supra quadrantis circumferentiam computetur, superque regula ad finem eius applicata inventum huius primum numeretur, atque inclinatus ille notetur, qui per huius inventi super regula iam numerati terminum transeat, ab eo versus meteoroscopii latus totiens quindenos numerabimus inclinatos, singulos saltem gradus repraesentantes, quot horariae portiones ex primo huius invento inveniri poterint.

Ut si fuerit oblatus magnus in sphaera circulus super meridianum patrium inclinatus quantitate graduum LXXV; in eo propositum esto horarias invenire portiones. Inventum huius primum ex praemisso est fere grad. LXXVII min. L et per praemissam dati circuli ab aequatore inclinatio graduum habetur LII min. XV super qui|bus in quadrantis peripheria numeratis, applicata regula et in ea primum huius inventum numeretur, atque a fine huius numerationis versus latus quadrantis inter circulos inclinatos quindeni computentur gradus. Nam inclinatus hunc computum claudens cum inclinato, qui eidem initium dedit ex regula quendam separabit arcum ex eodem circulo dato uni 274v

---

Beispiel: $\varphi = 49^0\,27'$, $\alpha = 75^0$. Resultat: $x = 38^0\,45'$, $I = 70^0\,45'$ $\psi = 52^0\,11'$; es folgt aber $\psi = 90^0 - x = 51^0\,16'$ (num. $51^0\,6'$).

35. Proposition.

Bestimmung der Abschnitte der Stundenkreise auf einem zum Horizont senkrechten und gegen den Meridian geneigten Kreis (Fig. 27).

Man bildet $\operatorname{tg} I = \operatorname{tg}\varphi : \cos a$ (Aufg. 8, im $\triangle ZAB$ ist $\sphericalangle Z = a$, $ZA = \varphi$, $ZB = I$), dann $\cos x = \frac{\cos I}{\cos\varphi}$ (Aufg. 7, im $\triangle ABZ$ ist $x = AB$) oder $\sin x = \sin I \cdot \sin a$ (Aufg. 2). Dann ist $y = x - t = AB - AD = BD$ (oder wie der Verfasser schreibt $y = 90^0 - (90^0 - x + t)$, ferner $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} y : \cos\psi$ (Aufg. 8, im $\triangle \Sigma BD$ ist $z = \Sigma B$). Dann ist der gesuchte Abschnitt $\nu = I - z = ZB - \Sigma B = Z\Sigma$.

a meridie convenientem horae; pari modo ceterae horariae portiones invenientur. Hac itaque via unico contextu omnes inveniemus horarum portiones in primo huius invento contentas.

Velut pro una hora a meridiano numerata grad. X min. XX, pro horis duabus partes XXIII min. XL, pro tribus horis gradus XXXX min. XX, pro quatuor horis gradus LXI min. XXXV. Sed ne prima huius doctrina cuipiam difficilis appareat, ea tali declarabitur exemplo. Sit enim, ut ante, circulus datus, cuius ad meridianum inclinatio constituatur graduum LXXV. Huius igitur circuli, ut prius, ad aequatorem inclinatio erit grad. LII min. XV, primumque praemissae inventum constat gradibus LXX min. XXXXV, atque propositum esto horariam portionem meridia|no proximam, et in primo huius invento grad. LXXVII min. L contentam computare. Igitur complemento primi praemissae inventi addo gradus XV, aggregatum erit grad. XXXIIII min. XV, cum quorum complemento grad. LV min. XXXXV supra basim numerato et cum inventa aequatoris inclinatione per octavam introitum comperio grad. LXVII min. XXX, quibus ex primo huius invento demptis quaesita portio relinquit horaria grad. X min. XX.

Idem etiam solis efficiemus aequedistantibus. Nam complemento primi praemissae inventi, totiens iterum quindenos addamus gradus, quot horarum portionem huiusmodi habere cupimus, ac cum hoc aggregato atque cum inclinatione aequatoris per praemissam inventa per secundum introitum meteoroscopium consultantes arcum recipimus, quo ex grad. LXXXX dempto reliquum cum aggregati praemissi complemento per primum aut quintum introitum illuc remittatur, arcumque hoc modo susceptum primo huius invento detrahentes horariam relinquemus portionem.

Esto rursus intentio ad patrium horizontem in | eodem circulo dato pro una a meridiano hora portionem horariam investigare.

Igitur complemento primi praemissae inventi gradus addo XV, eritque aggregatum hoc grad. XXXIV min XV, cum quibus et cum praedictae inclinationis angulo grad. LII min. XV per secundum introitum excipio gradus XXVI min. X, quorum complementum grad. LXIII min. L cum aggregati praemissi complemento graduum LV min. XXXXV per primum aut quintum

---

Beispiel: $\varphi = 49^0\,27'$, $a = 75^0$. $I = 77^0\,50'$, $\psi = 52^0\,15'$.

Die Tabelle enthält die angegebenen und die berechneten Werte für die einzelnen Stunden.

t	v	v ber.
1^h	$10^0\,20'$	$10^0\,48'$,
2^h	$23^0\,40'$	$23^0\,46'$,
3^h	$40^0\,20'$	$40^0\,12'$,
4^h	$61^0\,35'$	$61^0\,13'$,
5^h	—	$84^0\,32'$.

2. Methode (per aequedistantes). Man wendet Aufg. 2 auf $90^0 - y$ und ψ an ($\sin u = \cos y \cdot \sin\psi$, im $\triangle BD\Sigma$ ist $\sphericalangle\,\Sigma = 90^0 - u$), dann Aufg. 1 auf y und $90^0 - u$ $\left(\sin z = \frac{\sin y}{\cos u}\right)$.

introitum praebebit mihi gradus LXVII min. XXX, quibus primo invento[a]) sublatis quaesita portio remanebit horaria grad. X min. XX.

Atqui hora quinta plerumque et aliae horae hoc pacto non possunt haberi, quod tunc potissimum accidit, quando primum praemissae inventum minus fuerit gradibus quindenis ad propositum horarum numerum multiplicatis. Illo igitur primo praemissae invento ex istis ablato reliquum cum aequatoris inclinatione supra quadrantem sumpta per octavum introitum meteoroscopio commissum tribuet arcum, qui primo huius invento iunctus investigatam componet dati circuli portionem.

Ut in tali exemplo invenienda sit hora|ria portio quinque conveniens horis, quae grad. LXXV efficiunt; differentia primi praemissae inventi et graduum LXXV constat grad. IIII min. XV; cum his itaque et aequatoris inclinatione graduum LII min. XV supra quadrantis peripheriam computata per introitum octavum gradus exibunt VI min. XXXXV, quibus primo huius invento congregatis quaesita prodibit horaria portio grad. LXXXIIII min. XXXV. 276r

Hoc ipsum quoque fiet ipsis aequedistantibus; intrando scilicet per introitum quintum cum eiusdem differentiae complemento et aequatoris inclinatione, deinde facto introitu primo aut quinto cum arcus reperti complemento atque cum eadem differentia; nam portio deprehenditur, qua primo huius invento adiecta propositum constabit. Haec hactenus ostensa sunt de breviore dati circuli portione, quam in praesenti primum huius inventum appellare libuit, eam inquam dati circuli portionem, quae meridiano et horizonte conclusa meridionali plagae vel ab occidente vel ab oriente appropinquat. | 276v

Sed nunc declarandum est, qualiter longior orbis dati portio, idest reliqua eiusdem dati circuli portio, quae ab eodem meridiano usque ad reliquam eiusdem cum aequatore sectionem extenditur, ni arcus sit horarios secanda. Primo igitur praemissae invento pro hora una de meridie gradus XV adiunguntur, pro duabus a meridie horis grad. XXX, pro tribus horis grad. XXXXV, idest totiens eidem primo praemissae invento quindeni congregentur gradus, quot horarum a meridie desiderabimus habere portionem. Siquidem aggregatum hoc circuli qua-

a) Hs. hat *quadranti*.

Der Fall $t = 5^h$ (bei dem $t > x$, und deshalb $v = I + z$ ist) wird eigens behandelt. $z = 6^0\,43'$, $v = 84^0\,35'$.

Um den zweiten Schnittpunkt der Stundenkreise mit dem gegebenen Kreise zu berechnen, ist zu bilden $y = x + t$, $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{tg} y}{\cos \psi}$ und $v = z - I$.

1. Beispiel: $t = 1^h$, $y = 85^0\,45'$, $z = 87^0\,40'$, $v = 9^0\,50'$ (num. $9^0\,42'$). Ebenso per aequedistantes; Resultat $z = 9^0\,40'$.

2. Beispiel: $t_2 = 2^h$, $y_2 = 100^0\,45'$, dann wird $180^0 - y_2 = 79^0\,15'$ verwandt; Lösung per aequedistantes: $v = 18^0\,45'$ (num. $19^0\,11'$).

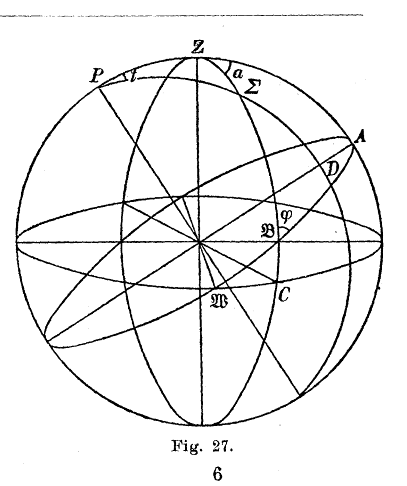


Fig. 27.

drante minus fuerit, cum eo supra basim numerato atque cum inclinatione aequatoris per praemissam inventa introitus fiat octavus; ex arcuque comperto, si primum huius inventum dematur, portio remanebit horaria, quam quaerebamus.

Ut in eodem circulo dato si velimus primum habere arcum a meridie in eius longiore portione contentum, primum praemissae inventum augendum est grad. 277r XV, eritque aggregatum hoc grad. LXX|XV min. XXXXV, cum quibus et aequatoris inclinatione gra. LII min. XV supra quadrantem recensita per octavum introitum gradus producuntur LXXXVII min. XXXX, quibus, si primum huius auferatur inventum, erit reliquum graduum IX min. L fere; portioscilicet horaria.

Sed idem aequedistantibus ita fiet. Nam eiusdem aggregati complemento et aequatoris inclinatione per introitum secundum[a]) arcus elicitur, quo gradibus LXXXX detracto arcus relinquitur, qui cum ipso aggregato per primum aut quintum introitum arcus demum nobis exhibebitur, cuius complementum ostendet propositum.

Velut in praemisso exemplo complementum talis aggregati est fere grad. IIII min. XV, cum quibus et gradibus LII min. XV aequinoctialis inclinationis per introitum secundum fere gradus III cum minutis XX excipiuntur, quorum deinde complementum grad. LXXXVI min. XXXX cum ipso aggregato grad. LXXXV min. XXXXV per primum aut quintum introitum producet nobis gradus LXXXVII min. XXX fere. Quibus si primum huius inventum dematur, remanebunt grad. IX min. XXXX, quaesitae scilicet horariae portionis.

277v Sin autem, quod ex aggregatione quindenorum graduum | atque primi praemissae inventi colligitur, supra quadrantem creverit, ipsi quadrans dematur, residuum cum aequatoris inclinatione per introitum secundum meteoroscopio committatur. Reperti deinde arcus complementum cum eiusdem complemento residui per primum aut quintum introitum restituet nobis arcum, quo gradibus LXXXX detracto, reliquum vero primi huius inventi complemento si coniungatur, portio horaria iterum extabit quaesita.

Propositum esto iuxta problema hoc pro duabus a meridie horis arcum horarium in longiore dati orbis portione perscrutari, bis igitur quindenis gra-

a) Hs. hat *sekundi.*

Um die Werte für die weiteren Stunden zu finden, bildet man $\operatorname{tg} y_2 = \operatorname{tg} z_2 \cos \psi$ (Aufg. 6), im vorliegenden Falle: $y_2 = 64^0$, addiert hierzu 15^0 und erhält so $y_3 = 79^0$ dann mit Aufg. 8 $\operatorname{tg} z_3$ und hieraus ν_3. Ebenso für ν_4 usw.

Die Tabelle enthält die gefundenen und berechneten Werte:

t	ν gef.	ν ber.
1^h	$9^0\,40'$	$9^0\,42'$
2	$18^0\,45'$	$19^0\,11'$
3^h	$28^0\,45'$	$29^0\,13'$
4^h	$44^0\,25'$	$40^0\,46'$
5^h	$54^0\,45'$	$64^0\,59'$
6^h	79^0	$83^0\,17'$
7^h	$95^0\,35'$	$95^0\,28'$

dibus pro duabus horis primo praemissae invento additis erit aggregatum graduum C min. XXXXV, quibus ablato quadrante relinquuntur gradus X min. XXXXV, quos cum aequatoris inclinatione grad. LII min. XVI per introitum secundum meteoroscopio commendans excipio gradus VIII min. XXXI, quorum complemento grad. LXXXI min. XXX cum praedicti complemento residui gradus LXXIX min. XV per introitum primum aut quintum illuc remisso gradus producentur LXXXIII et semis, quibus quadranti sublatis | gradus XVI min. XXXX residuant, et eisdem cum primi huius inventi complemento congregatis quaesita constabit horaria portio grad. XVIII min. XXXXV fere. 278r

Pro singulis autem horis, ut ante, singulas huiusmodi portiones horarias unico contextu sic inveniemus, si dempto primo huius invento ex integris horarum portionibus ipsum proxime superantibus atque residui complementum in regula super aequatoris inclinationem in quadrante posita numeretur. Ac deinde, velut prius, ab inclinato per finem dicti eiusdem complementi transeunte pro singulis horis continuis quindenos computemus versus quadrantis latus inclinatos, huiusmodi autem computatio eo usque continetur, quousque id fieri queat.

Sic enim ex regula inter inclinatos quindenis a se gradibus distantes quaesiti horarum arcus apparebunt, qui singuli[a]), si de quadrantibus singulis demantur, et eorum residua seu complementa primi huius inventi adiciantur, earundem horarum portiones horariae a meridie computabuntur, seu a meridiano initium | habebunt.

Velut in praemisso exemplo duarum portio horarum a meridie super longiorem illam dati circuli portionem sumptarum est ex prius inventis grad. XVIII min. XXXXV, quibus detracto primi huius inventi complemento erit reliquum grad. VI min. XXX, cuius complementum grad. LXXXIII min. XXX si numeravero supra regulam in quadrantis peripheria aequatoris inclinationi applicatam, eundem arcum in regula finiet septuagesimus nonus inclinatus, praesertim inclinatis organo hoc ad singulos gradus descriptis, cui proxime quindenis distans gradibus est sexagesimus quartus, qui pro tertia a meridie hora secabit ex regula gradus LXXIII et semis. 278v

a) Hs. hat *singuli* korr. aus *singulis*.

36. Proposition.

Bestimmung des Winkels zwischen Äquator und einem Kreise, der mit dem Meridian den Winkel a_1, mit dem Horizont den Winkel a_2 bildet (Fig. 28).

Man bildet $\sin I = \frac{\cos a_1}{\sin a_2}$ (Aufg. 1, im Dreieck $A\mathfrak{S}D$ ist: $\measuredangle D = a_1$, $\measuredangle A = a_2$, $A\mathfrak{S} = 90^0 - I$), dann $\cos II = \frac{\cos I}{\sin a_1}$ (Aufg. 1, $DA = 90^0 - II$). Hierauf $\sin x = \frac{\sin II}{\sin I}$ (Aufg. 1, im $\triangle A\mathfrak{S}D$ ist $\mathfrak{S}D = 90^0 - x$, also $ZD = x$). Dann ist $DM' =$

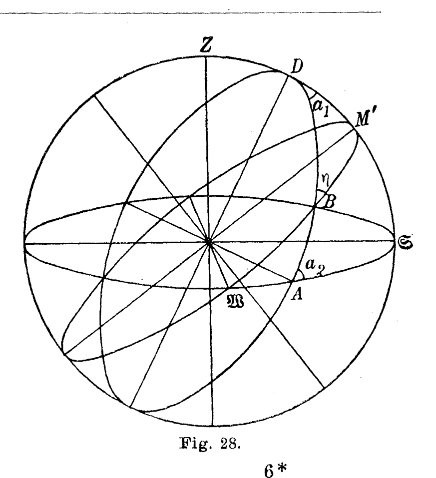


Fig. 28.

Posthaec est inclinatus XLIX, qui ex regula pro quarta a meridie hora separabit gra. LII min. L; quarto pro quinta[a]) hora XXXIIII inclinatus ex memorato arcu praebebit grad. XXXXVII min. XXX; quinto pro sexta hora XIX inclinatus ostendet grad. XXIX min. XV; postremo pro septima hora per 279r quartum inclinatum exhibentur gradus | VI min. XXX. Horum arcuum complementis singulis si grad. XVIII min. XXXXV coacerventur, habebimus pro hac longiore dati circuli portione pro singulis a meridie horis portiones horarias singulas.

Velut pro hora una grad. IX min. XXXX, pro horis duabus grad. XVIII min. XXXXV, pro tribus horis grad. XXVIII min. XXXXV, pro quatuor horis grad. XXXXIIII min. XXV, pro quinque horis grad. LIIII min. XXXXV, pro sex horis grad. LXXIX min. nulla, pro septem horis grad. LXXXXV min. XXXV.

Propositio XXXVI.

Dato orbe in sphaera magno, ad quem non tam horizon, quam meridianus inclinetur, cognitis eorundem ad illum inclinationibus eiusdem quoque orbis inclinationem cum aequatore perscrutari.

279v Primus igitur fiat aut quintus introitus cum com|plemento inclinationis meridiani et inclinatione horizontis; extractus itaque arcus primum sit inventum; id autem horizontis portio est inter duas eius conclusa sectiones, quarum idem horizon unam cum orbe dato, alteram vero cum aequatore, communem habet. Cum huius deinde primi complemento inventi atque cum inclinatione meridiana primus aut quintus rursus pateat introitus; arcusque utro hoc elicitus introitu quadranti demptus secundum relinquit inventum, cum quo et cum invento primo si per primum aut quintum rursus introitum meteoroscopio incidamus, arcum excipiamus; qui si comple[me]nto regionariae latitudinis par fuerit, propositum absolvere non potuerimus. Eodem vero arcu latitudinis complementum aut excedente aut econtra minus, ergo de maiori tollatur, ac cum residuo et inclinatione meridiani secundus fiat introitus; arcus quidam excipitur, quo quadranti detracto residuum cum inclinationis meridianae complemento per primum aut quintum introitum arcum nobis porriget; eius complementum tertium dicatur inventum, et est aequatoris meridiano et dati orbis 280r circulo comprehensus. Cum huius demum tertii inventi com|plemento atque cum comple[me]nto inclinationis meridianae per primum aut quintum introitum nostram habebimus intentionem; haec est dati circuli seu orbis cum aequatore inclinationem.

a) Hs. hat *quinta* korr. aus *primam*.

$\pm (ZM' - ZD) = \pm (x - \varphi)$ oder $\psi = 90^0 - DM' = 90^0 - x + \varphi$. Nun bildet man $\sin y = \sin \psi \cdot \sin a_1$ (Aufg. 2, im $\triangle DM'B$ ist $\sphericalangle B = 90^0 - y$, d. h. = dem gesuchten Winkel η). Der Verfasser bildet jedoch weiterhin $\cos III = \frac{\cos a_1}{\cos y}$. III ist dann $= BC =$ dem Bogen des Äquators zwischen dem Schnittpunkt mit dem Kreis und dem Meridian. Der gesuchte Winkel η ergibt sich rückwärts aus $\sin \eta = \frac{\cos a_1}{\cos III}$ d. h. $\eta = 90^0 - y$.

Velut si magnus aliquis in sphaera circulus detur, ad quem meridianus quidem grad. LXXV, horizon vero gradibus XXXX declinet, atque proponatur a quopiam inclinationem eiusdem orbis cum aequatore perscrutari.

Per praemissam ergo doctrinam ingredienti mihi ad meteoroscopium cum partibus LXXV meridianae inclinationis atque cum inclinatione horizontis graduum XXXX offeruntur grad. XXIII min. XXXXV, inventum scilicet primum, quo ex partibus LXXXX sublato reliquum erit graduum LXVI min. XV, cum quibus deinde et partibus LXXV iuxta dictam praeceptorum partes accipio[a]) LXXI cum minutiis XXX ferme, quorum complementum, scilicet partes XVIII min. XXX, secundum perhibent inventum, cum quo et gradibus XXIII min. XXXXV, primi scilicet inventi, meteoroscopium iuxta primum aut quintum rursus introitum ingressus extraho gradus quasi LII; ex hoc itaque arcu[b]), nam is patriae latitudinis complementum superat, eiusdem latitudinis | complemento detracto gradus XI cum minutiis XXVII remanebunt, cum quibus et complemento meridianae inclinationis iuxta praecedentem doctrinam gradus excipiuntur XV min. XXX ferme, cuius complementum pro tertio habeatur invento. Sed priori arcu grad. XV min. XXX cum inclinationis meridianae complemento per primum aut quintum introitum ad meteoroscopium remisso inclinatio quaesita deprehenditur graduum ferme LXXVI, quod fuit propositum, et id hoc modo solis constat aequedistantibus, opusque hoc ab illa via, quam inclinati ostendunt, unius tamen introitus differt compendio, quapropter eam haud iniuria brevitati consulens praetereo. 280v

Propositio XXXVII.

Supradictam aequatoris inclinationem cum declinatone horizontali atque cum horizontis arcu, qui duobus suarum comprehenditur sectionum punctis, quorum unum cum aequatore, alterum vero cum orbe dato com|mune possidet, investigare. 281r

Igitur meteoroscopium consulemus cum dato horizontis arcu et inclinatione horizontali iuxta secundum introitum. Arcus enim sic[c]) elicitus inventum esto primum; cum huius deinde complemento atque complemento dati arcus horizontalis primus aut quintus fiat introitus; extractique complementum arcus secundum appellatur inventum, cum quo et horizontis arcu dato iterum iuxta primum aut quintum introitum tertius eliciatur arcus, cui latitudinis regionariae complementum detrahatur, si maior eodem complemento fuerit,

a) Hs. hat *accipio* korr. aus *excipio*. b) Hs. hat *arcu* korr. aus *gradu*.
c) Hs. hat si.

Beispiel: $a_1 = 75^0$, $a_2 = 40^0$, $\varphi = 49^0\,27'$. Resultat: $I = 23^0\,45^0$ (num. $23^0\,45'$), $II = 18^0\,30'$ (num. $18^0\,38'$), $x = 52^0$ (num. $52^0\,30'$. Nun bildet der Verfasser $\psi = x - 90^0 + \varphi = 11^0\,27'$ an Stelle von $\psi = 90^0 - x + \varphi = 88^0\,3'$ und erhält aus diesem Wert $III = 74^0\,30'$, $\eta = 76^0$.

37. Proposition.

Bestimmung dieses Neigungswinkels, wenn die Neigung des Kreises gegen den Horizont a_2 und der Bogen am Horizonte zwi-

aut econtra latitudinis complementum arcui huic auferatur, si is eodem complemento vincatur; par enim esse non poterit. Nam ita nulla continget elevatio polaris mundi supra circulum datum[a]), atque frustra tentabimus sequentes propositiones duas huius auxilio perficere. Quidquid enim sic nobis vel praebebitur additione vel subtractione tertium dicatur inventum, cum quo et complemento inventi primi secundus si fiat introitus, atque cum arcus excepti com|plemento necnon et cum primo invento primus aut quintus introitus si fiat, arcus habebitur, cui quartum sit nomen inventi.

281v

Sed hoc etiam inventum breviter indagabimus cum invento primo super basi numerato atque cum invento tertio per introitum octavum, at prior inquisitio solis fit aequedistantibus.

Hic enim modus unico nos relevat introitu. Hoc autem inventum quartum aequatoris est portio duabus sui sectionibus interiacens, quarum unam cum dato circulo, alteram cum horizonte communem possidet; cum eo demum invento quarto cumque primo inventu per primum aut quintum introitum nostrum vocabimus intentum.

Sit ergo datus in sphaera circulus magnus, cuius supra patrium inclinatio sit horizontem grad. XXXX. Arcus autem horizontis inter eundem circulum et punctum horizontis, qui ortui vel occasui debetur aequinoctiali, sit grad. XXIII min. XXXXV. Igitur iuxta praemissam praeceptionem inventum primum erit graduum XV, et est meridianae inclinationis complementum. Inventum autem secun|dum grad. XVIII min. XXX. Sed tertium inventum constabit grad. XI min. XXVII. At quartum inventum erit ferme grad. XV min. XXX, cum quo demum atque invento primo quaesitae quantitas inclinationis invenitur grad. LXXVI fere; quod est intentum.

282r

Propositio XXXVIII.

In hemisphaerio superiori cuiusdam magni supra sphaeram orbis, ad quem non tam meridianus, quam horizon inclinetur, co-

a) Hs. hat datum korr. aus ?.

schen dem Westpunkt und dem Schnittpunkt des gegebenen Kreises, mit ihm a gegeben ist (Fig. 28).

Man bildet $\sin I = \sin a_2 \cdot \sin a$ $(I = 90^0 - BDM')$, $\cos II = \frac{\cos a}{\cos I}$ $(II = 90^0 - AD)$, $\sin x = \frac{\sin II}{\sin a}$ $(x = 90^0 - \mathfrak{S}D = ZD)$. Nach dem Verfasser ist nun zu bilden $(III = \pm x - 90^0 + \varphi)$. Es ist aber zu nehmen: $III = 90^0 - DAM' = 90^0 \pm (x - \varphi)$. Dann $\sin y = \sin III \cdot \cos I$ $(y = 90^0 - B)$ und $\sin IV = \frac{\sin I}{\cos y}$ oder direkt mittels Aufgabe 8: $\operatorname{tg} IV = \operatorname{tg} I : \cos III$; $IV = 90^0 - BM' = \mathfrak{W}B$. Endlich ist $\sin \eta = \frac{\sin I}{\sin IV}$. Auch hier würde unmittelbar folgen $\eta = 90^0 - y$.

Beispiel: $a_2 = 40^0$, $a = 23^0 45'$. Resultat: $I = 15^0$, $II = 18^0 30'$, $III = 11^0 27'$, $IV = 15^0 30'$, $\eta = 76^0$.

gnito utriusque inclinationis angulo contingentes in eodem orbe arcus horarios computare.

Igitur ex antepraemissa inclinatio aequatoris cum orbe dato reperta cum tertio eiusdem invento supra basim numerato per octavum introitum si mittam ad organum, arcus prodibit, qui primum huius appelletur inventum; et est portio dati circuli bre|vior meridiano et aequatore comprehensa. 282v

Ut sit datus orbis seu circulus, qui ad meridianum inclinetur grad. LXXV, ad horizontem vero grad. XXXX; ad inveniendum igitur primum huius inventum reperio inprimis per antepraemissa[m] dati orbis inclinationem ab aequatore grad. LXXVI, et eiusdem antepraemissae tertium inventum est grad. LXXIIII min. XXX; cum his itaque per hanc praeceptionem primum huius inventum invenitur grad. LXXXVI min. XXX.

Idem etiam solis inveniemus aequedistantibus; facto inprimis introitu secundo cum complemento tertii antepraemissae inventi et cum inclinatione aequatoris; posthaec arcus extracti complementum cum tertio antepraemissae invento meteoroscopio per primum aut quintum introitum si remittamus, primum huius prodibit inventum.

Ut in eodem exemplo in primis huius secundo introitu ingrediens cum aequatoris inclinatione grad· LXXVI atque cum complemento tertii antepraemissae inventi grad. XV min. XXX invenio grad. ferme XVI; cum horum deinde complemento grad. LXXIIII atque cum tertio antepraemissae invento grad. LXXIIII min. XXX per primum aut quintum introitum idem | organum repetens excipio primum huius inventum grad. LXXXVI min. XXX fere. Ipsum autem primum huius inventum sic in horarias est distinguendum portiones. Pro hora namque una post vel ante meridiem sumpta gradus XV addantur complemento tertii antepraemissae inventi atque cum huius aggregati, si minus ipsum quadrante fuerit, complemento et cum aequatoris inclinatione super quadrantem numerata per octavum introitum arcus eliciatur, quo dempto ex invento huius primo relinquitur portio unius a meridie horae, quam primum huius inventum continet. 283r

Ut sit, velut pridem, datus orbis tam ad meridianum, quam ad horizontem inclinatus, sitque declinatio ipsius ad hunc quidem gradum LXXV, ad illum

---

38. Proposition.

Bestimmung der Schnittpunkte der Stundenkreise mit einem gegen Horizont und Äquator geneigten Kreise (Neigungswinkel a_2 und a_1) Fig. 29.

Man löst zunächst die Aufgabe der Prop. 36. (Die mit römischen Zahlen bezeichneten Winkel von 36 sind mit einem ′ versehen.) Dann bildet man (Aufg. 8): $\operatorname{tg} I = \operatorname{tg} III' : \cos \eta$; ($BM' = III'$, $I = BD =$ dem Bogen des Kreises zwischen Meridian und Äquator.)

Beispiel: $a_1 = 75^0$, $a_2 = 40^0$, $\eta = 76^0$, $III' = 74^0\,30'$, $I = 86^0\,30'$. Man kann I auch per aequedistantes finden; man bil-

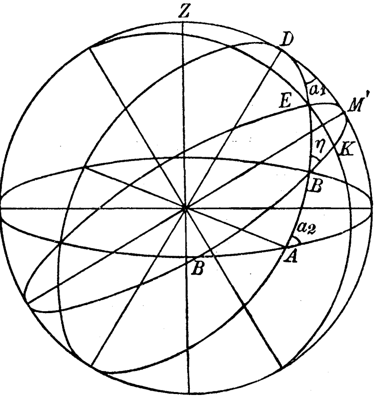


Fig. 29.

vero partium XL. Inclinatio igitur aequatoris per antepraemissam partium reperitur LXXVI. Inventum quoque tertium eiusdem habetur graduum LXXIIII min. XXX. Sit ergo propositum reperire arcum in breviore dati circuli portione uni a meridiano debitum horae; igitur complemento tertii antepraemissae 283ᵛ inventi partes XV iungantur. Erit | ergo collectum graduum XXX et semis. Cum eorum itaque complemento, scilicet partibus LIX et semis, super basim numerato et inclinatione aequatoris grad. LXXVI iuxta introitum octavum ad meteoroscopium ingressus partes offendo LXXXII min. XXI, quibus demptis ex primo huius invento grad. LXXXVI min. XXX partes relinquentur IIII min. XV, portio quaesitae videlicet horae. Sed horaria haec intervalla in primo huius invento contenta facilius ita unicoque reperientur contextu; posita videlicet regula super aequatoris inclinatione in quadrante numerata, deinde ab eo inclinato, quo supra regulam primum huius inventum terminatur, XV versus instrumenti umbilicum gradibus numeratis huiusque numerationis termino per inclinatum, qui eundem continet exitum, regulae collato ex ea quaesitus arcus horarius non ignorabitur.

Posthaec a principali inclinato pari ratione inter ipsos inclinatorum arcus grad. LX transitis duarum a meridie horarum portionem regula commonstrabit et ita de reperiendis ceterarum a meridie horarum portionibus. In eodem primo huius contentis agendum erit; hac ergo via iuxta praemissum exem-284ʳ plum | pro una a meridie hora ex primo huius invento partes obtinent IIII cum minu. XV, pro horis duabus partes IX min. XLIX, pro tribus horis gradus XVIII min. L, pro horis quatuor gradus exibunt XXXVIII cum minutiis XXX.

Idem quoque sic aequedistantibus fiet. Facto scilicet introitu secundo cum aggregato ex partibus horariis atque complemento tertii antepraemissae inventi et cum inclinatione aequatoris; ac deinde cum extracti arcus complemento et cum complemento dicti aggregati iuxta primum aut quintum introitum ingredientes arcum offendemus, quo sublato partibus primi huius inventi quaesita relinquetur horaria portio.

Velut in exemplo praecedenti, si cum praemissae aggregationis summa grad. XXX et semis atque cum inclinatione aequatoris meteoroscopium accedens partes excipiam XXIX min. XXX ac cum eorum deinde complemento graduum LX et semis et cum complemento praemissi aggregati partium LIX et semis iuxta primum aut quintum introitum idem organum repetiero, partes

---

det $\sin x = \cos III' \cdot \sin \eta$ (Aufg. 2, $x = 90^0 - D$) und $\sin I = \frac{\sin III'}{\cos x}$; Beispiel: $x = 16^0$, $I = 86^0 30'$.

Es ist $M'K = t = 1^h = 15^0$, also $BK = BM' - M'K = 74^0 30' - 15^0 = 59^0 30'$. (Der Verfasser bildet $90^0 - III' + 15'$ und dann hiezu das Komplement.) Man bildet $\operatorname{tg} BE = \operatorname{tg} BK : \cos \eta$ (Aufg. 8), dann ist $DE = BD - BE =$ der einer Stunde entsprechende Abschnitt. Beispiel: $BK = 59^0 30'$, $BE = 82^0 21'$, $DE = 4^0 15'$ (!). Die Lösung erhält man direkt mit dem Meteoroskop, wenn man η am Quadranten, BM' und BK an der Basis und BE und BD am Lineal mißt. Ebenso für 2^h, 3^h, 4^h. Resultat: $2^h : 9^0 49'$, $3^h : 18^0 50'$, $4^h : 38^0 30'$. Oder auch hiefür per aequedistantes; d. h. man bildet nicht direkt $\operatorname{tg} BE = \operatorname{tg} BK : \cos \eta$, sondern erst

offerentur LXXXII cum minutiis XV, quibus ex primo huius invento sublatis, videlicet ex partibus LXXXVI[a]) min. XXX, remanent iterum |, velut prius, 284v partes IIII min. XV, quae uni a meridie horae pertinent; pari modo reliqua horarum spatia reperientur, addendo scilicet complemento tertii antepraemissae inventi, pro horis duabus a meridie grad. XXX, pro horis tribus grad. XXXXV, pro quatuor horis grad. LX, pro quinque demum horis grad. LXXV. Ergo cum tali aggregato, si quadrante fuerit ipsum inferius, sic erit agendum. At, ubi quadrantem excesserit, quadrante eidem coacervationis summae detracto cum reliquo atque cum aequatoris inclinatione supra quadrantem computato iuxta introitum octavum arcus extrahitur, quo ad primum huius inventum iuncto propositarum a meridie horarum portio conflabitur.

Velut in praecedenti problemate partibus horarum quinque, gradibus scilicet LXXV[b]), complemento tertii antepraemissae inventi coniunctis proveniet huius aggregationis numerus graduum LXXXX min. XXX; eidem quoque modo detractis partibus XC erit reliquum min. XXX, cum quibus ferme colligo gra. II min. XV.

His itaque primo huius invento coacervatis partes crescunt LXXXVIII min. XXXXV, quae sunt quaesita quinque horarum portio. | 285r

Denique idem aequedistantibus ita fiet; facto introitu secundo cum eiusdem residui complemento atque cum aequatoris inclinatione; ac deinde cum extracti arcus complemento atque cum eodem residuo iuxta primum aut quintum introitum arcus exceptus primoque huius invento additus nostram exhibebit intentionem.

Ut in proximo exemplo eiusdem residui complementum est gradus LXXXIX min. XXX; cum quibus atque cum aequatoris inclinatione grad. LXXVI partes eliciuntur quasi LXXVI; cum horum deinde complemento grad. XIIII[c]) et cum eodem residuo grad. semis arcus excipitur grad. II min. XV, quos, si primo huius invento addidero, partes crescent LXXXVIII min. XXXXV[d]), ut ante; quod iterum est propositum.

Pluribus ita horarum portionibus par erit ratio inveniendis. Quod si opus hoc continuaverimus usque ad horas XII, non latebunt nos reliqua horarum

a) Hs. hat LXXXV korr. aus LXXXII. b) Hs. hat LXX.
c) Hs. hat XIV korr. aus XXXX. d) Hs. hat LXXXV.

$\sin \xi = \cos KB \cdot \sin \eta$ ($\xi = 90^0 - \sphericalangle BEK$), dann $\sin BE = \frac{\sin BK}{\cos \xi}$; Beispiel: $\xi = 29^0 30'$, $BE = 82^0 15'$, $DE = 4^0 15'$.

Für den Fall $BM' < t$ ist zu bilden $BK = t - BM'$ und auf diesen Winkel Aufgabe 8 anzuwenden; DE ist dann $= DB + EB$. Beispiel: $t = 5^h = 75^0$; $BM' = 30'$, $BE = 2^0 15'$, $DE = 88^0 45'$. Oder wieder per aequedistantes.

Dann gibt der Verfasser eine Reihe, die für einen anderen Kreis (dessen Neigungswinkel aber nicht angegeben sind) gelten $1^h : 3^0 23'$, $2^h : 6^h 40'$, $3^h : 10^0 40'$, $4^h : 16^0 15'$, $5^h : 25^0 10'$; $6^h : 43^0 40'$, $7^h : 12^0$ (!)

Für den Fall $BK = t - BM' > 90^0$ ist zu rechnen mit $180^0 - BK$. Beispiel: $t = 11^h = 165^0$; $180^0 - BK = 30'$, $DE = 15' + 90^0 + 86^0 30' = 176^0 45'$. Oder wieder per aequedistantes.

intervalla in reliquo eiusdem dati orbis semicirculo contenta. Nam ea ex illorum diametro collocata pares horarum sortientur portiones. |

285v Poteris denique hic, si penitus hebeti non sis ingenio, per praemissum compendium ad unicum meteoroscopii ingressum omnes tales horarios arcus colligere; quo fit, ut praemisso problemate pro alio semicirculo pro hora una a meridie gradus inveniamus III min. XXIII, pro duabus horis partes VI cum min. XXXX, pro tribus horis gra. X min. XXXX, pro horis quatuor partes XVI min. XV, pro quinque horis gradus XXV min. X, pro horis sex partes XLIII min. XXXX, pro septem horis partes XII [?] min. nullum.

Verum ita est agendum ipso aggregato semicirculum non excedente; quod ubi contigerit, eidem aggregato semicirculus erit demendus, et residui complementum supra basim numeratum cum ipsius aequatoris inclinatione per octavum introitum arcum exhibebit, quo ex grad. LXXXX dempto atque reliquo ad quadrantem et primum huius inventum pariter accepta coniuncto propositum emerget.

Ut si nostra fuerit intentio horis post meridiem undecim datis in eodem orbe portionem horariam computare; igitur aggregatum ipsum ex grad. CLXXX

286r et semis | constabit. Eis ergo si semicirculus detrahatur, erit gradus semis reliquus, cuius itaque complementum partium LXXXIX et semis supra basim computatum cum ipsius aequatoris inclinatione introitu octavo praebebit mihi ferme grad. LXXXIX cum quartis tribus unius, quibus quadranti detractis erit reliquum min. XV. His ergo primo huius invento et quadranti pariter adiectis erit summa haec grad. CLXXVI min. XXXXV, quaesita scilicet portio horarum undecim.

Idem quoque solis efficiemus aequedistantibus; misso scilicet residuo illo, cum aequatoris inclinatione per secundum introitum ad meteoroscopium, arcus itaque deprehensi complemento cum eiusdem residui complemento ad meteoroscopium per primum aut quintum introitum reducto quendam deinde venabimur[a]) arcum, cuius complemento ad primum huius inventum et quadrantem pariter adiuncto nostra demum resultabit intentio.

Velut in eodem problemate residuum illud post semicirculi ex illo aggre-

286v gato detractionem, relictum est gradus semis | , qui cum inclinatione aequatoris partium LXXVI per introitum secundum porriget nobis min. XXXX, quorum complementum grad. LXXXIX min. XX cum complemento eiusdem residui grad. LXXXIX et semis dabit per primum aut quintum introitum grad. LXXXIX et min. XXXXV; hoc complemento min. XV ad primum huius inventum et quadrantem pariter adiecto excrescet portio quaesita grad. CLXXVI min. XXXXV, horis scilicet 11 conveniens. Ad si tale aggregatum semicirculus fuerit ad unguem quadrans, primo huius invento congregatus ostendet propositum.

Propositio XXXIX.

Propositi magni in sphaera orbis, ad quem pariter horizon et meridianus inclinentur, portiones horarias cum horizontis incli-

287r natione cognita cum eius quoque agnita | portione inter aequatorem et orbem datum comprehensa prope veritatem supputare.

Opus hoc a praecedenti parum variat; nam ibi quartum antepraemissae inventum in praecedenti dicitur complementum tertii antepraemissae inventi.

a) Hs. hat *venabimur* korr. aus *venabitur*.

Per antepraemissam itaque inclinatio quaeratur aequatoris ad datum circulum, cum qua videlicet inclinatione ac cum quarti antepraemissae inventi complemento supra basim numerato arcus quidam per octavum extrahatur introitum, qui primum huius sit inventum.

Velut in solo patriae sit datus orbis aliquis magnus, cuius planum non tantum ad meridianum, verum etiam ad horizontem patriae eiusdem pariter inclinetur, horizontali quidem inclinatione constituta graduum XXXX; horizontis vero portione comprehensa inter eius cum aequatore sectionem et oblatum circulum posita grad. XXIII min. XXXXV, propositum | esto eundem circulum datum in portiones secare horarias. 287v

Igitur in primis per antepraemissam reperio aequatoris inclinationem ferme graduum LXXVI. Inventum autem eiusdem antepraemissae quartum partium fere XV et min. XXX. Cum huius itaque inventi complemento grad. LXXIIII et semis supra basim, velut praecipitur, recensito atque cum aequatoris inclinatione per octavum introitum primum huius excipio inventum partes fere LXXXVI et semis.

Idem quoque primum huius inventum reperitur aequedistantibus, ita facto inprimis introitu secundo per aequatoris inclinationem atque quartum antepraemissae inventum arcusque comperti complemento cum quarti antepraemissi inventi complemento ad meteoroscopium per primum aut quintum introitum remisso primum huius prodibit inventum.

Velut in eodem exemplo meteoroscopium per introitum secundum ingredienti mihi cum quarto antepraemissae invento gradus XV et semis atque cum inclinatione aequatoris grad. LXXVI offerun|tur gradus ferme XVI, quorum 288r complementum graduum LXXIIII cum complemento quarti antepraemissae inventi grad. LXXIII et semis per primum aut quintum remittens introitum colligo primum huius inventum fere partium LXXXVI et semis, quo habito ad propositum descendamus absolvendum.

Addamus igitur quarto antepraemissae invento pro singulis propositarum horarum partes quindenas, ita, ut pro una a meridie hora grad. XV, pro duabus duplum, pro trium horarum spatio triplum, hoc est gradus adiciantur XXXXV, ac ita deinceps pro quavis hora quindenos adicendo partes, quo denique aggregato LXXXX gradibus ablato, si minus ipsum quadrante fuerit, et reliquo super basim recensito atque cum aequatoris inclinatione iuxta introitum VIII intra meteoroscopium misso arcus extrahitur, qui primo huius invento demptus relinquet intentum.

Ut si pro orbe dato velim unum eius a me|ridie horarium arcum in breviori eius portione deprehensum invenire; igitur quarto eiusdem antepraemissae invento grad. XV et semis adicio partes XV. Hoc denique aggregato grad. XXX et semis [a]) gradibus LXXXX sublato partes remanent LIX cum minutiis XXX, cum quibus atque cum inclinatione praemissa dicto modo gradus invenio LXXXII cum quarto. His demum ex primo huius invento sublatis desiderata remanebit horaria portio grad. IIII min. XV fere. 288v

Idem quoque sic aequedistantibus habebitur. Facto scilicet introitu secundo cum eodem aggregato atque cum aequatoris inclinatione arcusque hoc modo quaesiti complementum cum complemento praemissi aggregati primo aut

---

a) Nach *semis* hat Hs. die Worte *adicio partes* gestrichen.

quinto introitu ad meteoroscopium remittatur. At arcus iam denuo repertus primo huius invento sublatus propositum relinquit.

Velut in eodem problemate ipsum aggregatum, quod habetur grad. XXX 289r min. XXX, cum aequatoris inclinatione | grad. LXXVI, si secundo introitu committatur organo praesenti, partes exibunt XXIX min. XXX. Harum deinde complementum graduum LX et semis cum ipsius aggregati complemento grad. LIX et semis[a]) reportabit nobis per primum aut quintum introitum grad. LXXXII et quartum fere, quibus ex primo huius invento sublatis quaesita portio relinquitur horaria grad. IIII et quarti fere. Non est aliter laborandum pro pluribus horis.

At huiusmodi horarias portiones, quas primum huius inventum continet, longe faciliori perquiremus indagatione; posita videlicet regula in quadrante super aequatoris inclinationem; atque si, velut in praecedentibus traditum fuit, ab eo inclinato, qui primum huius inventum super regulam ab meteoroscopii umbilico versus eius peripheriam numeratum terminat, quindenae partes versus eundem umbilicum pro singulis horarum portionibus inter ipsos inclinatos recenseantur, ipsi namque inclinati, qui tales quindenarum partium supputationes faciunt, quaesitas horarum portiones ex regula illico tumultuarieque manifestant. Hac itaque via pro unius horae a meridie portione partes prodibunt IIII cum 289v quarto, pro horis duabus | grad. IX min. XXXXV, pro horis tribus partes 18 min. L, pro quatuor horis partes XXXVIII min. XXX. Ubi vero idem aggregatum gradus exsuperat LXXXX, ipsi aggregato partibus demptis XC reliquum in basi computatum cum aequatoris inclinatione meteoroscopio iuxta introitum octavum si committatur, reddet nobis arcum, quo acervato partibus inventi huius primi crescet intentum.

Velut in praemisso problemate, si velim horarum quinque a meridie portionem ex eo propositi orbis medietate, in qua primum huius inventum constituitur, invenire, iungo igitur gradus LXXV pro quinque horis quarto antepraemissae invento; eritque aggregatum hoc partium XC min. XXX; a quibus si minuam quadrantem, erit reliquum grad. semis, qui cum aequatoris inclinatione grad. LXXVI supra quadrantem computata iuxta introitum octavum offert nobis partes duas cum quarto, quibus ad primum huius inventum coacervatis conflabitur quinque a meridie horarum portio grad. LXXXVIII min. XXXXV; quod est intentum.

Hac quoque computandi ratione poterimus alias a meridie horarias por- 290r tiones in reliqua dati orbis medietate contentas investigare. | Nam arcus horarii pro hoc semicirculo reperti sunt illis in altera dati orbis medietate,

a) Nach *semis* hat Hs. die Worte *cum ipsius aggregati* gestrichen.

---

39. Proposition.

Bestimmung der Schnittpunkte der Stundenkreise mit einem Kreise, wenn dessen Neigung gegen den Horizont und der Bogen am Horizont zwischen dem Schnittpunkt mit dem Kreis und dem Westpunkt gegeben ist.

Man bestimmt, wie in Prop. 37 den Meridianwinkel α, den Neigungswinkel gegen den Äquator η, und den Bogen zwischen Äquator und Meridian $BC = 90^0 - \text{IV}$. Das Zahlenbeispiel ist das gleiche; die Resultate sind:

ex diametro positis aequales singulis. Igitur hac via incedemus pro reliqua dati orbis medietate in horarios arcus partienda, quousque praemissum aggregatum semicirculo fuerit inferius. Huiusmodi etiam horarum arcus unico reperiemus introitu; posita scilicet regula supra aequatoris inclinationem in quadrante censitam; illud quoque residuum, quod relinquitur detracto quadrante de illo aggregato, quod grad. LXXXX proxime superat, ab meteoroscopii umbilico versus eius peripheriam super basim computatur; atque ab inclinato numerationis huius exitum claudentem quindenis gradibus pro horis singulis inter ceteros inclinatos versus eandem peripheriam recensitis mox ipsi inclinati eorundem quindenorum graduum numeratorum concludentes singuli quaesitas horarum ostendent portiones.

Velut in exemplo saepius repetito tale residuum fuit gradus semis. Igitur iuxta praemissam hanc doctrinam reperio pro horis VI a meridie grad. CXXXV min. nullo, pro horis VIII partes CLXIII et min. | XXXX, pro novem [290v] horis grad. CLXIX cum min. XV, pro X horis grad. CLXXIII et min. XV. Verumtamen hos arcus inprimis ex meteoroscopio non elicimus, sed alios quosdam, quorum cum primo huius invento coacervatorum tales procreantur arcus. Velut pro horis VI invenimus partes XLVIII et semis, pro septem horis grad. LXVIII et quartum unius, pro horis VIII grad. LXXVII et quartum unius, pro novem horis grad. LXXXII cum quartis tribus, singulis ad primum huius inventum adiectis praecedentes emergunt arcus.

Sed quando primum illud aggregatum, de quo in primis habita est mentio, semicirculum supergreditur, ipsi ergo semicirculus auferatur, residuique complementum supra basim numeratum cum aequatoris inclinatione iuxta introitum octavum arcum nobis praebebit, cuius complementum, si summae primo huius invento atque quadrante constanti superaddatur, propositarum rursus horarum a meridie in subiecto circulo portionem habebimus.

Velut in orbe dato si velim horarum XI a meridie portionem extrahere, coniungo igitur pro undecim horis undecies quindenas partes, idest centum et LXV grad., ad quartum antepraemissae inventum. Excrescetque omnisque haec summa in gradus CLXXX min. XXX, quibus semicirculo sublatis erit reliqua [291r] pars huius semis, cuius complementum grad. LXXXIX et semis exhibebit nobis iuxta praeceptionem hanc grad. LXXXIX cum minutiis XXXXV, quibus ex quadrante subtractis min. XXXXV relinquuntur. His ergo additis summae ex quadrante et primo huius invento compositae proveniunt partes CLXXVI cum minutiis XXXXV, quas quaesita horarum XI portio continet.

Quae paulo sunt ante tradita solis efficere parallelis seu aequedistantibus, id ergo in primis agemus, ipso eodem aggregato quadrantem superante quidem,

t	KC	KC ber.	t	KC	KC ber.
1^h	$4^0\,15'$	$4^0\,37'$	7^h	$154^0\,45'$	$154^0\,10'$
2^h	$9^0\,45'$	$9^0\,20'$	8^h	$163^0\,40'$	$163^0\,\;8'$
3^h	$18^0\,50'$	$22^0\,40'$	9^h	$169^0\,15'$	$168^0\,42'$
4^h	$38^0\,30'$	$39^0\,35'$	10^h	$173^0\,15'$	$172^0\,65'$
5^h	$88^0\,45'$	$88^0\,34'$	11^h	$176^0\,45'$	$176^0\,23'$
6^h	$135^0\,\;0'$	$135^0\,24'$	12^h	180^0	180^0

minore vero, quam sit semicirculus, posito. Igitur ipsum semicirculo detrahatur residuum, cum aequatoris inclinatione iuxta secundum introitum meteoroscopio committendum est, arcusque comperti complementum cum complemento eiusdem residui per primum aut quintum introitum eidem organo remissum reportabit arcum, quo ad primum huius inventum adiecto nostram habebimus intentionem.

Velut in eodem orbe dato propositum sit horarum sex a meridie portio-291v nem inve|nire horariam; adiectis ergo sexies quindenis partibus, hoc est grad. LXXXX, ad quartum antepraemissae inventum erit huius aggregationis summa grad. CV et semis, quibus semicirculo detractis erit reliquum partium LXXIIII min. XXX, cum quibus atque cum aequatoris [a]) inclinatione comperio gradus LXIX min. XV, quorum complementum partium XX min XXXXV cum complemento praemissi residui grad. XV et semis per primum aut quintum introitum partes elicio fere XLIX et semis, quibus primo huius invento congregatis proposita crescet horarum portio graduum CXXXV min. nullo, quemadmodum paulo prius inventum est.

Postquam autem primum aggregatum illud semicirculo maius extiterit, ei semicirculus detrahatur, reliquum et aequatoris inclinationem secundo introitu ad meteoroscopium committentes arcum excipimus, cuius complemento cum complemento prioris residui ad idem instrumentum remisso, per primum scilicet aut quintum introitum, arcus prodetur, quo ex grad. LXXXX sublato residuoque ad grad. LXXXX et primum huius inventum pariter adiecto ipsa constabit intentio.

292r Velut in eodem orbe | propositum esto horarum undecim portionem computare; horae itaque XI gradus aequatoris tribuuntur CLXV. His quarto antepraemissae invento concervatis erit aggregatum partium CLXXX et semis, quibus subtracto semicirculo remanet gradus semis. Eo igitur cum aequatoris inclinatione per secundum introitum ad instrumentum commisso gradus unius duo fere praebentur tertia, hoc est min. XXXX, cuius complementum partium LXXXIX min. XX cum complemento eiusdem residui grad. LXXXIX et semis per primum aut quintum introitum grad. elicio LXXXIX cum minutiis

a) Nach *aequatoris* hat Hs. das Wort *circulo* gestrichen.

40. Proposition.

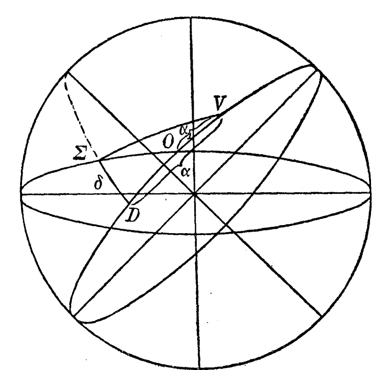


Fig. 30.

Bestimmung der geographischen Breite aus Länge und ascensio obliqua des aufgehenden Punktes des Tierkreises. (Fig. 30).

Man bestimmt mit Prop. 2 die Deklination $\Sigma D = \delta$ des gerade aufgehenden Punktes Σ, mit Prop. 5 seine Rektaszension $DV = \alpha$. Ist $OV = \alpha_1$, die ascensio obliqua, so bildet man $\alpha - \alpha_1 = \pm DO$ und wendet Aufg. 4 auf δ und $\alpha - \alpha_1$ an ($\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg} \delta : \sin(\alpha - \alpha_1)$, $\varphi = \sphericalangle DO\Sigma$. Beispiel: $\lambda = 90^0 = 3$ signa, $\alpha_1 = 59^0\,22'$. Resultat: $\alpha = 90^0$, $\alpha - \alpha_1 = 30^0\,33'$ (!), $\delta = \varepsilon$, $\varphi = 49^0\,30'$.

XXXXV, quorum complementum minutiarum XV ad quadrantem atque ad primum huius inventum pariter accepta coniunctum constituit grad. CLXXVI min. XXXXV, qui sunt quaesita horarum XI portio; hoc demum uno dati orbis semicirculo in horarios arcus distincto alterius semicirculo horaria, velut dictum est, partitio nobis non celabitur. Sed si principale illud aggregatum semicirculo par ad unguem fuerit, primo huius invento quadrans addatur; propositumque nostrum erit perspicuum. |

Propositio XXXX.

292ᵛ

Alicuius signiferi arcus cogniti de signorumque computati principio proposita ascensione obliqua per eam, quanta sit eius latitudo regionis, in qua talis ascensio contingit, succinctim perquirere.

Per secundam ergo huius declinatio reperiatur eius puncti, qui datum in zodiaco claudit arcum. Propositae deinde ex signifero portionis per quintam huius rectam sciamus ascensionem, qua si minor fuerit ascensioni datae obliquae detracta vel econtra obliqua si minor haec fuerit rectae, sublata quidam relinquitur arcus, qui super basim nostri numeratus organi cumque declinatione iam pridem inventa per introitum quartum organo eidem commissus arcum referet, qui grad. LXXXX submotus quaesitam residuabit latitudinem.

Ut ab initio arietis [a]) trium signorum obliqua sit ascensio grad. LIX min. XXII. | Eorum quoque signorum ascensio recta quadrans est. Harum autem ascensionum differentia est partium XXX min. XXXIII, quae super basim recensita et cum ipsa declinatione solis maxima, quae propositi ex zodiaco arcus fini debetur, iuxta meteoroscopium per introitum quartum missa tribuet nobis grad. XXXX min. XXX fere, quibus ex quadrante sublatis desiderata relinquetur latitudo partium XLIX min. XXX; quod est intentum.

293ʳ

Idem quoque solis efficitur aequedistantibus. Facto scilicet introitu secundo cum ipsius differentiae complemento atque cum complemento ipsius de-

a) Hs. hat *arietis* korr. aus *latitudinis*.

---

2. Methode (per aequedistantes). Man bildet $\sin x = \cos(\alpha - \alpha_1) \cdot \cos\delta$ (Aufg. 2, $\Sigma O = 90^0 - x$) und $\cos\varphi = \frac{\sin\delta}{\cos x}$ (Aufg. 1). Beispiel: $x = 52^0\,20'$, $\varphi = 49^0\,30'$.

41. Proposition.

Bestimmung der geographischen Breite aus den Längen zweier Punkte des Tierkreises und ihrer ascensio obliqua (Fig. 31 u. 32).

Die ascensio obliqua des zweiten Punktes ist nicht wie gewöhnlich auf den Frühlingspunkt, sondern auf den ersten Punkt bezogen.

Gegeben ist λ_1, λ_2 und $A = CC'$. Man bestimmt zunächst nach Proposition 2 und 5. α_1, α_2 und δ_1, δ_2. Dann ist $C'D = \alpha_1 - \alpha_2 - A = \varrho = \sphericalangle C'PD$. Man bildet: $\sin I = \cos\delta_1 \sin\varrho$ ($I = B'F$ im $\triangle B'FP$), dann $\sin x = \frac{\sin\delta_1}{\cos I}$ ($PF = 90^0 - x$) und $x - \delta_2 = II$ ($II = FA$). Hierauf: $\sin y = \cos II \cdot \cos I$

clinationis, arcusque reperti complementum cum ipsa declinatione per primum aut quintum introitum referet nobis complementum quaesitae latitudinis, quo grad. LXXXX sublato ipsa remanebit latitudo.

Ut in eodem exemplo complementum differentiae ascensionum habetur grad. LIX min. XXVII, complementum vero declinationis eiusdem est grad. LXVI min. XXX.

Haec ergo per introitum secundum exhibebunt grad. LII min. XX fere, quorum deinde complementum partium | 293v XXXVII min. XXXX cum ipsa declinatione subiecta grad. XXIII min. XXX per primum aut quintum introitum gradus offert XXXX et ferme min. XXX, quibus de quadrante sublatis quaesita relinquitur latitudo partium XLIX min. XXX. Verum his modis propositum semper absolvemus, dum ascensio, quae proponitur, obliqua semicirculum non aequaverit.

Proposito XXXXI.

Sin autem obliqua datur ascensio, quae cuipiam signiferi pertineat portioni, cuius termini fuerint altrinsecus cogniti, alibi quoque, quam ex capite arietis inchoatae, latitudinem quoque regionis, in qua contingit ascensio talis, manifestam efficere.

Proposito[a]) zodiaci arcu, cuius fines altrinsecus | 294r aequaliter ab altero solstitiorum removentur, ascensio recta par obliquae erit ascensioni, eorundem quoque finium declinationis necessario pares esse probantur. Quamobrem tale problema incassum suscipimus ad solvendum.

Sin autem puncta duo, quae arcum signiferi propositum finiunt, a punctis solstitialibus per imparia recesserint intervalla atque ambo eundem eclipticae

a) Hs. hat propositio.

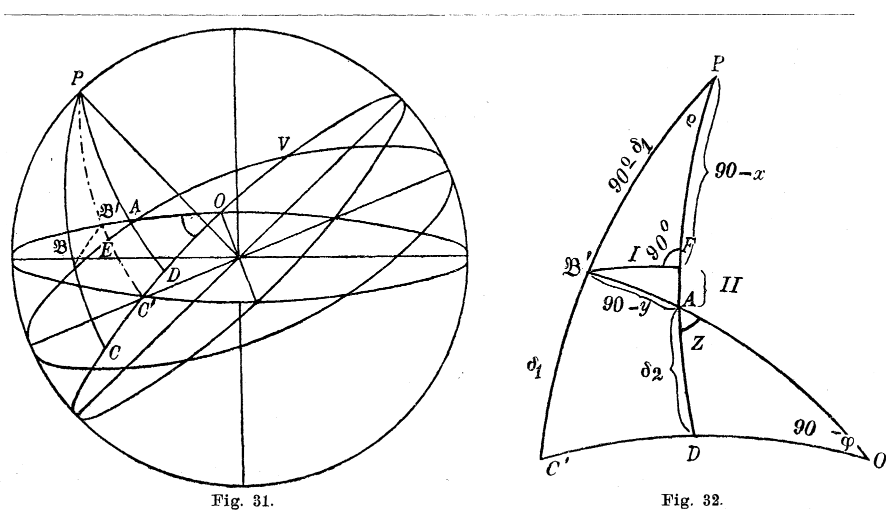


Fig. 31. Fig. 32.

$(B'A = 90^0 - y)$, $\sin z = \frac{\sin I}{\cos y}$ $(z = \measuredangle B'AF = \measuredangle DAO)$ und endlich $\sin \varphi = \sin z \cdot \cos \delta_2 \, (90^0 - \varphi = DOA)$.

semicirculum vel borealem vel austrinum possideant, igitur per secundam huius eorum declinationes addiscamus, quae per hanc[a]) hypothesim impares sunt, per quintum quoque eiusdem propositae signiferi portionis recta non nobis desit ascensio, quam auferamus ex obliqua, si haec minor fuerit, aut econtra, si illa fuerit minor; excessus igitur alterius ad alteram earum vocetur differentia, quam cum complemento maioris declinationis per secundum introitum meteoroscopio inferentes primum excipiemus inventum, cuius complementum cum numerosiori declinatione primo aut quinto introitu ad meteoroscopium remittentes deque reperto arcu, si declinatio minor, auferatur, secundum relinquitur inventum, cum cuius complemento atque cum complemen|to primi inventi meteoroscopium secundo ingredientes introitu quendam excipimus arcum, cuius complemento et primo invento ad meteoroscopium primo aut quinto remissis introitu quidam prodibit arcus, qui cum minoris declinationis complemento per introitum secundum quaesitam manifestabit regionis latitudinem. 294v

Ut arcus zodiaci proponatur graduum XXXVIII, qui de fine XXVI gradus arietis inchoans in quarto geminorum exeat gradu, qui horizonte peroriatur aliquo cum aequatoris gradibus XXV et min. LIIII.

Sit ergo in voto huiusmodi horizontis latitudinem perscrutari. Recta propositi arcus ascensio per quartam huius invenitur quasi grad. XXXVII min. LIIII, cui si data diminuatur ascensio obliqua, partes remanent XII.

Propositus autem zodiaci arcus in termino principali tenet declinationem borealem graduum ferme X, cuius complementum partium LXXX, in fine vero eiusdem plagae declinationem obtinet grad. XXI, cuius complementum partium LXIX, quod cum differentia duarum ascensionum graduum XII introitu secundo | praebebit primum inventum partium XI min. X fere, cuius complementum 295r

a) Hs. hat *hans.*

Beispiel: $\lambda_1 = 64^0$, $\lambda_2 = 26^0$, $A = 25^0\,54'$. Resultat: $\delta_1 = 21^0$, $\delta_2 = 10^0$, $\alpha_1 = 62^0$, $\alpha_2 = 24^0\,6'$, $\varrho = 12^0$, $I = 11^0\,10'$, $x = 21^0\,30'$, $II = 11^0\,30'$, $y = 74^0$, $z = 35^0\,30$ (num. 45^0!) $\varphi = 44^0\,15'$ (num. $44^0\,15'$).

Eigens wird der Fall behandelt, daß die eine Deklination nördlich $(+)$ und die andere südlich $(-)$ ist. Ist die südliche Deklination δ_2, so ist sie mit dem negativen Vorzeichen in Rechnung zu ziehen, d. h. es ist $II = x + \delta_2$.

Beispiel: $\lambda_2 = 346^0$, $\lambda_1 = 64^0$, $A = 44^0\,42'$. Resultat: $\delta_2 = -5^0\,32'$, $\delta_1 = 21^0$, $\alpha_2 - \alpha_1 = 74^0\,52'$, $\varrho = 30^0$, $I = 27^0\,50'$, $x = 24^0$, $II = 29^0\,32'$, $y = 50^0\,20'$, $z = 47^0\,20'$, $\varphi = 46^0\,50'$.

42. Proposition (Fig. 33).

Bestimmung der Länge eines gerade aufgehenden Tierkreiszeichens aus seiner Morgenweite und der Länge des gerade kulminierenden Tierkreiszeichens. Bestimmung der geographischen Breite.

Die Morgenweite ist für jeden Ort, für den $\varphi > 0$ ist, $>$ als die Deklination. Im Falle $\lambda_M = 90^0$ oder $= 270^0$ ist die Morgenweite $\mu = 0$.

grad. LXXVIII min. L cum maiori declinatione grad. XXI primo aut quinto introitu ad meteoroscopium item translatum gradus offert XXI cum min. fere XXX; quibus minori sublata declinatione relinquuntur partes XI et semis, secundum videlicet inventum, cuius complementum partium LXXVIII min. XXX cum complemento inventi primi grad. LXXVIII min. L iuxta introitum secundum exhibet partes LXXIIII fere. His ergo de quadrante sublatis XVI remanent gradus, quos cum primo invento partium XI min. X per primum aut quintum introitum ad meteoroscopium remittens excipio gradus fere XXXV et semis, quos demum cum minoris complemento declinationis per secundum relegans introitum deprehendo investigatae latitudinem regionis partium XXXXIIII et quarti ferme unius.

Sin autem unus datae signiferi portionis terminus borealem occupet plagam, reliquo super austrinam constituto signiferi medietatem, igitur cum duarum ascensionum differentia et cum bo|realis declinationis complemento secundus fiat introitus, primumque inventum compertus arcus esto, cuius complementum cum eadem boreali declinatione per primum aut quintum introitum porrigat nobis arcum[a]) alium, qui austrinae coniunctus declinationi summam constituat, quae secundum appelletur inventum, quo de gradibus LXXXX detracto, reliquum cum inventi primi complemento per secundum introitum organo huiç immittamus, repertoque arcu LXXXX gradibus ablato residuum etiam cum primo invento per primum aut quintum introitum meteoroscopio inferentes arcum excipimus, quo demum cum austrinae complemento declinationis iuxta introitum secundum ad meteoroscopium illato scrutatae latitudo regionis non latebit.

295v

Ut si datus signiferi arcus gradus LXXVIII, cui concedat initium grad. XVI piscium, eundemque arcum quartus geminorum gradus finiat. Huiusmodi autem zodiaci portio in aliqua peroriatur regione cum gradibus aequatoris XXXXIIII et min. LII.

Esto igitur propositum investigare regionis eiusdem latitudinem. Principium autem arcus dati declinat ab aequatore in austrum gradibus V min. XXXII; finis | vero borealem possidet declinationem[b]) grad. XXI. Recta ascensio est

296r

a) Hs. hat *arcum* korr. aus *arcus*. b) Hs. hat latitudinem.

Man bestimmt nach Prop. 18 aus λ_M und α_M den Neigungswinkel zwischen Ekliptik und Meridian η. Dann ist im $\triangle \Sigma M \mathfrak{S}$ $\sin x = \frac{\cos \mu}{\sin \eta}$ (Aufg. 1, $x = \Sigma M$) und $\lambda + 360^0 = \lambda_M + 180^0 - x$, wenn $\lambda_M > 180^0$ oder $\lambda = \lambda_M + x$, wenn $\lambda_M < 180^0$.

1. Beispiel: $\lambda_M = 330^0$, $\mu = 31^0\,30'$. Resultat: $\eta = 77^0\,50'$, $x = 60^0\,45'$, $\lambda = 89^0\,15' = 29^0\,15'$ des Stieres.

2. Beispiel: $\lambda_M = 150^0$, $\mu = 14^0\,5'$. Resultat: $\eta = 77^0\,50'$, $x = 83^0\,20'$, $\lambda = 233^0\,20' = 23^0\,20'$ der Wage.

Zur Bestimmung der geogr. Breite sucht man nach Prop. 2 die Deklination δ; dann ist (im $\triangle \Sigma O D$) $\sin(90^0 - \varphi) = \frac{\sin \delta}{\sin \mu}$ (Aufg. 1).

partium LXXIIII min. LII; duarum ascensionum differentia est graduum XXX, quam cum declinationis complemento borealis intra organum iuxta quartum mittens introitum excipio primum inventum partium XXVII min. L, cuius posthaec complementum grad. LXII min. X cum declinatione boreali gra. XXI iuxta primum aut quintum introitum instrumento inferens, elicio partes fere XXIIII, quibus cum austrina collectis declinatione secundum prodibit inventum grad. XXIX et min. XXXII, quorum complementum partium LX min. XXVIII cum primi complemento inventi par. LXII min. X iuxta secundum exhibebit introitum partes fere L cum minutiis XX, quibus ex quadrante sublatis reliquum partium XXXIX min. XXXX cum primo invento grad. XXVII min. L per primum aut quintum introitum gradus prodet XXXXVII cum mi. XX, quo demum arcu atque complemento declinationis austrinae grad. LXXXIV min. XXX per introitum secundum iam pridem diuque investigata egredietur latitudo grad. XXXXVI et minutorum fere L, ad quam datus zodiaci arcus cum obliqua, quae proponebatur, ascensione peroritur.

Verum quando | exhibitae signiferi portionis termini ab punctorum altero aequinoctialium ad paria videlicet altrinsecus abeant intervalla, dimidium propositi eclipticae arcus medietatem ascensionis obliquae possidebit datae. 296v

Quamobrem cum dimidio propositae signiferi portionis atque cum oblatae ascensionis obliquae dimidio ad investigandum, quod quaeritur, iuxta praemissae progrediamur doctrinam.

Propositio XXXXII.

Dato medio caeli cum partibus amplitudinis ortivae punctum imprimis ex signifero horoscopans ac per eum posthac ipsius latitudinem regionis apprehendere.

Proposita regio latitudinem possidet, quotiens horoscopi ortiva amplitudo eiusdem superat declinationem. Nam haec declinatione hac minor esse nequit; etenim regione nullam obtinente latitudinem, ortus amplitu|do declinationem ascendentis adaequat. Capite quoque cancri vel capricorni medium caeli tenente propositio frustra conficitur. At medio caeli aliud possidente zodiaci punctum pro XVIII huius coincidentia M. caeli cum meridiano inprimis quae- 297r

---

1. Beispiel: $\lambda = 89^0 15'$, $\delta = 20^0 2'$, $\varphi = 49^0$.

2. Beispiel: $\lambda = 233^0 20'$, $\delta = 9^0 5'$, $\varphi = 49^0$.

2. Methode zur Bestimmung der geogr. Breite. Man bestimmt (im $\triangle \Sigma M \mathfrak{S}$) $M\mathfrak{S} = 90^0 - y$ aus $\sin y = \frac{\cos x}{\sin \mu}$ (Aufg. 1). Dann ist $ZM = y$ und $\varphi = ZM' = y \pm \delta_M$.

1. Beispiel: $x = 60^0 45'$, $y = 69^0 12'$, $\delta_M = 20^0 12'$, $\varphi = 49^0$.

2. Beispiel: $x = 83^0 20'$, $y = 28^0 48'$, $\delta_M = 20^0 12'$, $\varphi = 49^0$.

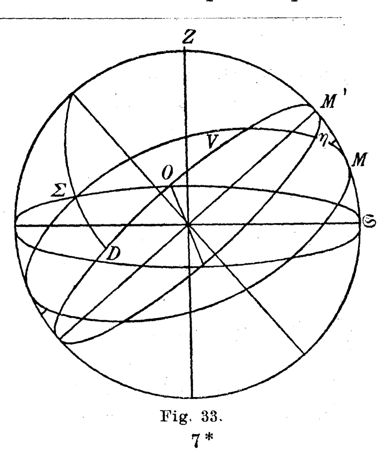


Fig. 33.

ratur, cum qua et cum ortivae complemento amplitudinis iuxta primum aut quintum introitum arcus extrahatur, quo partibus CLXXX, id est sex semicirculi signis dempto, si borealis fuerit talis incidentia, reliquum M. caeli continuatum adiectumque; horoscopans prodet zodiaci punctum.

Sin autem incidentia M. C. cum meridiano fuerit austrina, repertus arcus medio adiciendus est, quo tandem aggregato non latebit ascendens.

Ut dato medio caeli in aquarii capite cum amplitudine ortiva grad. XXXI min. XXX propositum esto horoscopans eclipticae punctum investigare. Per XVIII huius incidentia medii caeli cum meridiano borealis reperitur partium LXXVII min. L, cum quibus et complemento amplitudinis ortivae, scilicet graduum LVIII min. XXX, gradus offendo LX min. XXXXV |, id est signa duo min. XXXXV; quo arcu de signis sex dempto nam praemissae angulus incidentiae borealis est, remanent signa tria grad. XXIX min. XV, quibus M. C. adiectis invenio perortos grad. XXIX min. XV tauri; quod est intentum.

297v

Rursus esto propositum leonis exordio M. C. possidente cum amplitudine ortiva graduum XIIII min. V horoscopans eclipticae punctum perscrutari; medii caeli autem incidentia cum meridiano, velut ante habetur, grad. LXXVII min. L; cum ea igitur atque cum complemento amplitudinis ortivae grad. LXXV mi. LV per primum aut quintum introitum iterum ingressus excipio signa II grad. XXIII min. XX, quibus M. C. additis — nam austrina est incidentia — perspicuum erit de libra perortos fuisse grad. XXIII min. XX; quod rursus est intentum.

Sic ergo prima propositionis huius liquet particula. Ut autem ipsa regionis habeatur latitudo, igitur ex huius secunda horoscopi quaeratur declinatio, quae cum ipsius ortus amplitudine per primum aut quintum introitum arcum exhibebit, quo ex partibus XC detracto regionaria relinquetur | latitudo.

298r

Velut perortis partibus XXIX min. XV tauri declinatio reperitur grad. XX min. II, quibus cum ortus amplitudine grad. XXXI min. XXX per primum aut quintum introitum partes offeruntur XXXXI, quibus quadranti sublatis ipsa relinquitur latitudo grad. XXXXIX. Pe[r]ortis deinde grad. XXIII min. XX librae declinatio reperitur grad. VIII mi. V; quibus cum amplitudine ortus partium XIIII mi. V primo aut quinto introitu partes elicui XLI, quarum complementum grad. XXXXIX quaesita est latitudo.

Aliter etiam eadem invenitur latitudo cum complemento eius arcus, qui per complementum amplitudinis ortivae datae atque per M. C. incidentiam invenitur — nam huiusmodi complementum cum ortus amplitudine primo aut

---

43. Proposition.

Bestimmung der geogr. Breite aus der Länge des kulminierenden und der des aufgehenden Zeichens des Tierkreises. (Fig. 32 u. 33.)

Man bestimmt nach Prop. 18 den Winkel η; dann ist, wenn $\Sigma M = \mu$ der Bogen zwischen den beiden Punkten des Tierkreises ist, $\cos\varphi = \sin\mu \sin\eta$. (Unrichtig; Beispiel fehlt.)

Andere Lösung. Man bestimmt nach Prop. 5 die Rektaszension von $M: \alpha_M$; dann ist die ascensio obliqua horoscopi $OV = \alpha_1 = \alpha_M + 90^0$. Dann bestimmt man nach Prop. 5 die Rektaszension des gerade aufgehenden Punktes

quinto introitu intra meteoroscopium missum praebebit nobis arcum, cui si declinatio M. C. dematur, si ipsius incidentia fuerit borealis, aut eidem arcui eadem declinatio addatur, si talis incidentia fuerit austrina, et quaesitam habebimus | regionis latitudinem. 298ᵛ

Velut in primo exemplo huiusmodi arcus est gradus LX min. XXXXV, quibus ex quadrante sublatis erit reliquum grad. XXIX min. XV, quibus cum amplitudine ortiva horoscopi data grad. XXXI min. XXX per primum aut quintum introitum meteoroscopio commissis grad. exibunt LXIX min. XII, quibus declinatione M. C. — hoc est principii aquarii — gradus XX min. XII dempta quaesita remanet latitudo partium XLIX, velut ante fuerat inventa. Declinationis autem diminutio eam ob rem facta fuit, quia angulus incidentis medii caeli cum meridiano fuit borealis.

Eandem quoque regionis latitudinem comperiam per arcum in secundo exemplo inventum grad. LXXXIII min. XX. Huius namque complemento grad. VI min. XXXX atque data ortus amplitudine grad. XIIII min. V per primum aut quintum introitum gradus prodibunt XXVIII min. XXXXVIII, quibus cum M. C. declinatione grad. XX min. XII aggregatis — nam M. C. incidentia fuit austrina — crescunt grad. XXXXIX quaesitae latitudinis, qua rursus pars propositionis huius secunda liquet. |

Propositio XXXXIII. 299ʳ

Horoscopo medioque caeli cognito regionis producere latitudinem.

Ergo zodiaci portionem, quae medio caeli atque horoscopo intercipitur, si quadrante minor existat, aut eadem ex semicirculo dempta, si maior quadrante fuerit, reliquum cum incidentia M. C. et meridiani per XVIII huius inventa intra meteoroscopium secundo mittatur introitu; arcus itaque repertus ex quadrante sublatus ortivam horoscopi dati relinquit amplitudinem, qua deinde erit operandum.

Velut in praemissa commonui, hic exemplo non erit opus, cuius copiam in praecedenti exhibui propositione. Si quis ergo exemplarem efflagitaverit declarationem, ei praecedens consulenda est doctrina.

Eadem propositio XXXIII | aliter quoque sic fiet. 299ᵛ

Quaesitae per quintam huius M. C. ascensioni rectae gradus adiciantur LXXXX, et aggregatum erit ascensio obliqua horoscopi, cuius quoque per quin-

---

$DV = \alpha_\Sigma$ und bildet $OD = \triangle = \alpha_\Sigma - \alpha_1$. Ferner ermittelt man nach Prop. 2 die Deklination δ_Σ des Punktes Σ. Dann ist im $\triangle\, O\Sigma D$ $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\delta_\Sigma}{\sin\triangle}$ (Aufg. 4).

Beispiel: $\lambda_M = 300^0$, $\lambda_\Sigma = 59^0\,15'$. Resultat: $\alpha_M = 302^0\,12'$, $\alpha_1 = 32^0\,12'$, $\alpha_\Sigma = 57^0\,1'$, $\triangle = 24^0\,49'$, $\delta_\Sigma = 20^0\,2'$, $\varphi = 49^0$.

Lösung per aequedistantes. Man bildet $\cos\varrho = \cos\triangle\cos\delta_\Sigma$ (Aufg. 2) und dann $\cos\varphi = \frac{\sin\delta}{\sin\varrho}$ (Aufg. 5).

Beispiel: $\triangle = 24^0\,49'$, $\varrho = 31^0\,30'$, $\varphi = 49^0$.

tum huius recta innotescat ascensio. Harum igitur ascendentis ascensionum differentia sumpta cum eiusdem horoscopii declinatione super inclinatis numerata per quartum introitum intra meteoroscopium mittatur, acceptusque arcus quaesitae latitudinis erit complementum, quo gradibus LXXXX sublato regionis latitudo relinquitur.

Ut capite aquarii medium caeli tenente in aliqua regione perorti sint gradus XXIX min. XV tauri, M. C. recta ascensio per quintum huius invenitur fere grad. CCCII min. XII, quibus addito quadrante constabit obliqua horoscopi ascensio grad. XXXII min. XII. Eiusdem ascensio recta est per quintam huius grad. LVII mi. I. Harum ascensionum differentia habetur partium 300r XXIV | min. XXXXIX; per secundam huius. Horoscopus declinationem habet grad. XX min. II, quibus dicto modo intra meteoroscopium missis complementum quaesitae latitudinis resultat grad. XXXXI, quibus ex grad. LXXXX sublatis ipsa remanet latitudo grad. XXXXIX; quod est intentum.

Idem quoque solis efficiemus aequedistantibus; habita duplicis ascensionis differentia ascendentis zodiaci puncti, quod horoscopum dixi, velut praecedens admonet doctrina, eius itaque complementum cum complemento declinationis horoscopi secundo introitu intra organum mittentes arcum elicimus, cuius complementum ortiva est amplitudo eiusdem horoscopi; quam cum declinatione ipsius ascendentis quinto aut primo introitu ad meteoroscopium remittentes excipimus latitudinis complementum, quo LXXXX gradibus ablato ipsa relinquitur latitudo.

Velut in eodem exemplo differentia duarum ascensionum horoscopi est grad. XXIIII min. XXXXIX, cuius complementum cum declinationis comple- 300v mento ipsius horoscopi grad. LXIX min. LVIII | secundo introitu ad meteoroscopium inducens extraho partes LVIII et semis, quorum complemento grad. XXXI et semis, qui scilicet horoscopi ortiva amplitudo, et ipsa declinatione horoscopi grad. XX min. II primo aut quinto introitu colligo partes XLI fere, quarum complementum graduum XXXXIX est latitudo quaesita.

Propositio XXXXIIII.

Horizontalem solis ab orbe verticali recessum, quem arabice azimut plerique nominant, quo libet explorare momento.

Sit ergo nobis cognita imprimis horaria solis a meridiano remotio, quae si horis sex sive quadrante minor fuerit, ipsa cum complemento solaris declinationis meteoroscopio per secundum ingeratur introitum, arcusque inventus 301r cum complemento deinde solaris altitudi|nis per XXV aut XXVI huius compertae per primum aut quintum introitum meteoroscopio remittatur, arcusque iam demum inventi complementum solis azimut ostendet.

Velut si sol fuerit in capite geminorum, et propositum fuerit in patrio

---

44. Proposition.

Bestimmung der Entfernung der Sonne vom Vertikalkreis, des sogenannten „Azimuts“ (Fig. 34).

Ist der Stundenwinkel $t < 90^0$, so bildet man $\sin x = \sin t \cos \delta$ (Aufg. 2, im $\triangle P\Sigma T$ ist $T\Sigma = x$, $\sphericalangle T = 90^0$), dann $\cos A = \frac{\sin x}{\cos h}$ (Aufg. 5) A ist dann das gesuchte Azimut (vom Ost- bzw. Westpunkt aus gemessen.)

horizonte azimut eius invenire horis quatuor ante vel post meridiem; hoc tempore solis altitudo supra patrium horizontem est fere grad. XXXIIII min. XXXX. Per secundum vero huius solis declinatio est grad. XX min. XII. Denique quatuor horae distantiae solis a meridie praebent in aequatore grad. LX, quos cum praemissae declinationis complemento grad. LXIX min. XXXXVIII per introitum secundum meteoroscopio committens accipio partes LIIII min. XX, quas deinde cum complemento altitudinis solis supra patrium horizontem grad. LV min. XX per primum aut quintum introitum illuc remittens excipio gradus LXXXII, quibus ex quadrante sublatis remanent grad. VIII, quibus sol pro dato tempore a verticali circulo recedit.

Sin autem data solis distantia a meridie ad unguem sex constiterit horis, igitur primus aut quintus ad meteoroscopium fiat introitus cum complementis | duabus, declinationis videlicet atque altitudinis solis, arcusque elicitus quadranti demptus iterum relinquit intentum. 301v

Sit ergo, ut prius, sol in geminorum principio atque sex a meridie horis ad patrium horizontem solis altitudo grad. XV min. VII. Igitur cum complemento altitudinis eius[a]) grad. LXXIIII min. LIII atque cum declinationis complemento grad. LXIX min. XXXX per primum aut quintum introitum meteoroscopio incidens elicio partes LXXVI cum minu. XXX, quibus quadranti sublatis relinquuntur grad. XIII et semis, solis videlicet a circulo verticali recessus, qui quaerebatur.

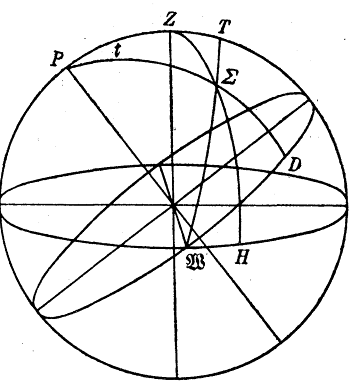


Fig. 34.

Ubi demum huiusmodi distantia solis a meridiano sex superaret horas eadem semicirculo detracta cum reliquo et solis altitudine perinde, atque dictum est, propositum conficiemus.

Ut sole geminorum exordium obtinente sit eius ad patrium horizontem altitudo grad. VI min. X. Distantia vero a meridie horarum VII, quae gradus efficiunt CV, quibus quadrantem exsuperantibus eos ex semicirculo diminuens, usque habeo reliquum gra. LXV, cum his igitur et complemento declinationis solaris | grad. LXIX min. XXXXVIII invenio iuxta introitum secundum partes fere LXV, quibus demum cum complemento altitudinis grad. LXXXIII min. L quinto aut primo introitu ad meteoroscopium remissis gradus offeruntur LXVI fere, quos auferens ex quadrante quaesitam relinquo solis a circulo verticali remotionem grad. XXIIII; quod est intentum. 302r

a) Hs. hat *eius* korr. aus *huius*.

Beispiel: $\lambda = 60^0$, $t = 4^h$ vor oder nach Mittag. Resultat: $h = 34^0 40^0$, $\delta = 20^0 12'$, $x = 54^0 20'$, $A = 8^0$.

Für den Fall $t = 6^h$ ist die Lösung einfach: $\frac{\cos\delta}{\cos h} = \cos A$.

Beispiel: $\lambda = 60^0$, $t = 6^h$. Resultat: $A = 13\frac{1}{2}^0$.

Im Falle $t > 90^0$ wird mit dem Winkel $180^0 - t$ gerechnet.

Beispiel: $\lambda = 60^0$, $h = 6^0 10'$, $t = 7^h$, $x = 65^0$, $A = 24^0$.

Propositio XXXXV.

Cuiusvis latitudine loci cognita, quanto tempore quaelibet signiferi portio verticalem praetereat orbem.

Si propositam libeat scire in orientali eiusdem verticalis orbis parte, igitur ad regionis latitudinem, quae par sit complemento latitudinis propositae, descensiones obliquae quaerantur per XVI pro debita zodiaci portione, quae post haec in horas et earum minuta[a]) per XIIII conversae quaesitum exhibebunt tempus. Sin autem propositum scire cupiamus in occidentali eiusdem verti-
302v calis circuli parte ascensiones obliquae pro eadem data signiferi portione | ad latitudinem, quae datae regionis latitudinis complemento coaequetur, inveniendae sunt, quae ut prius per XIIII huius in horas atque earum minutias conversae rursus intentum patefaciunt.

Ut volens agnoscere, quanto tempore verticalem patriae circulum in oriente totum arietis signum praetereat, ut in regione, cuius latitudo fuerit grad. XXXX min. XXXIII, per XVI huius invenio descensionem arietis obliquam partium XXXVII min. LIII, quae per XIIII huius temporis spatium praebent horarum II minutiarum XXXI secundorum XXXII. Tanto igitur tempore totum arietis signum in patria in verticali peroritur circulo; volens autem scire, quantum tempus aries totus absumat in eiusdem circuli verticalis occasu, per XVI huius quaero ad latitudinem grad. XXXX min. XXXIII ascensionem obliquam, quam invenio partium XVII min. LIIII, quibus per XIIII huius de tempore competunt hora I mi. XI secund. XXXVI, quibus totus aries firmamenti conversione verticalem circulum in occasu pertransit.

Propositio XXXXVI.

303r Duorum locorum, quibus eodem momento | ascendens commune cum diversis caeli mediis fuerit cognitum differentiam longitudinum atque polares altitudines inquirere.

a) Hs. hat *minuta* korr. aus *minutas*.

45. Proposition.

Bestimmung der Zeit, in der ein Teil des Tierkreises durch den Vertikalkreis hindurchgeht.

Für den östlichen Teil bestimmt man nach Prop. 16. die descensiones obliquae und verwandelt sie in Zeitmaß. Für den westlichen Teil die ascensiones obliquae.

Beispiel: $\varphi = 40^0\,33'$. Aufgabe: wielange braucht das ganze Sternbild des Widders? Resultat:

1. für den östlichen Teil: $dd_1 = 37^0\,53' = 2^h\,31^m\,32^s$.
2. für den westlichen Teil $\alpha\alpha_1 = 17^0\,54' = 1^h\,11^m\,36^s$.

46. Proposition.

Bestimmung der Längendifferenz und der geographischen Breiten zweier Orte, für die derselbe Stern gleichzeitig aufgeht. (Bekannt ist ferner an beiden Orten λ_M).

Differentia longitudinis eorundem locorum deprehendetur rectis medii caeli ascensionibus unius loci sublatis ex recta M. C. ascensione loci alterius; sed eorundem locorum latitudines per XXXXIII huius non ignorabimus.

Ut sint duo loca eiusdem momenti tempore pro communi horoscopo possidentia caput cancri. Unius autem horum locorum M. C. sit gradus V min. I. piscium, alterius vero M. C. sit gradus XXVII min. XXXXVIII aquarii. At gradus V min. I piscium recta ascensio est gradus CCCXXXVI min. LVII, sed gradus XXVII min. XXVIII aquarii ascensio recta constat gradibus CCCXXIX mi. LIX. Sublata itaque minore de maiore quaesita remanebit longitudinis differentia grad. VI min. LVIII, quod quidem est pars huius propositionis prior. In hoc itaque problemate ille locus orientalior habetur, cuius M. C. iuxta signorum successionem fuerit posterius. Velut hic | locus, cuius M. C. habet grad. V min. I piscium, est orientalior altero. 303v

Deinde per XXXXIII huius locus, cuius M. C. tenebat grad. V min. I piscium, habet latitudinem fere grad. XXXX min. XXXXV, alteri autem loco, cuius M. C. grad. XXVII min. XXVIII aquarii, erit regionaria latitudo fere grad. XXXXVIII min. L; quod est propositum.

Propositio XXXXVII.

Duorum locorum notas habentium latitudines cum communi eiusdem momenti horoscopi cognito longitudinis eorum differentiam habere.

Igitur per XVI huius communis horoscopi pro utriusque latitudine loci quaeratur obliqua ascensio, minori ergo dempta de maiori desiderata remanebit longitudinis differentia. Eorundem itaque locorum erit orientalior ille, qui pro communi horoscopo maiorem sortitur ascensionem obliquam.

Sint | ergo loca duo, quae pro communi horoscopo caput habeant cancri, et unius latitudo sit grad. XXXXII, alterius vero partium IL, et per XVI huius obliquam ascensionem initii cancri pro latitudine graduum XXXXII repe- 304r

---

Die Längendifferenz ergibt sich als Differenz der Rektaszensionen der beiden M; die Breiten aus Prop. 43.

Beispiel: Horoskop $\lambda_\Sigma = 90^0$, $\lambda_1 = 335^0\,1'$, $\lambda_2 = 327^0\,48'$. Resultat: $\alpha_1 = 336^0\,57'$, $\alpha_2 = 329^0\,59'$. Längendifferenz $\Delta = 6^0\,58'$. Der Ort ist der östlichere, dessen λ das größere ist. Nach 43 ergibt sich $\varphi_1 = 40^0\,45'$, $\varphi_2 = 48^0\,50'$.

47. Proposition.

Bestimmung der Längendifferenz zweier Orte verschiedener (bekannter) Breiten und mit „gemeinsamem Horoskop".

Man bildet die Differenz der nach Prop. 16 bestimmten ascensiones obliquae.

Beispiel: Horoskop $\lambda_\Sigma = 90^0$, $\varphi_1 = 42^0$, $\varphi_2 = 49^0$. Resultat: $\alpha_1 = 66^0\,57'$, $\alpha_2 = 59^0\,59'$. $\Delta = \alpha_1 - \alpha_2 = 6^0\,58'$.



rimus gradus LXVI min. LVII, pro latitudine vero grad. IL[a]) ascensionem obliquam horoscopi eiusdem reperimus grad. LIX min. LIX. Harum ergo ascensionum excessus graduum VI min. LVIII erit petita longitudinis differentia. Locus demum, cuius latitudo fuit grad. XXXXII[b]), est orientalior. Nam eius obliqua ascensio pro communi horoscopo reperta est numerosior.

Propositio XXXXVIII.

Oblatis duobus locis latitudines suas cum longitudinis differentia notas habentibus, sit ne communis eiusdem momenti horoscopus exactius investigare.|

304v Quando data loca diversos possidentia meridianos duas habuerint latitudines, quarum utraque complemento maximae solis declinationis aut par aut superior extiterit, eis potest accedere, ut communi participent horoscopo; verum quoniam loca talia propter horrorem intemperati gelu omnibus inepta sunt habitationibus, velut a multis iam nostrae aetatis hominibus exploratum est, de illis modo cura non erit ulla. Sin autem proposita loca fuerint cum duabus latitudinibus aequalibus, quarum utraque fuerit eodem complemento inferior, atque sub diversis locata meridianis, illa nullo unquam tempore communem habebunt horoscopium. Ubi vero sub eodem locantur meridiano utrumque punctorum signiferi aequinoctialium una primi motus conversione participant in ortu communi. Postquam demum loca dua nobis afferuntur cum suis latitudinibus disparibus et utrisque maximae solaris declinationis complemento minoribus diversos denique sortita meridianos; de illis propositionem

a) Hs. hat XXXIX. b) Hs. hat XXXXI.

---

48. Proposition.

Untersuchung der Frage, ob zwei Orte bestimmter geographischer Breite und Längendifferenz das gleiche Horoskop haben können.

Wenn die beiden Breiten größer als $90^0 - \varepsilon$ sind, so ist es möglich. Beweis: die Morgenweiten des Sternes an den beiden Orten sind sicherlich kleiner als die dem Aufgang des Krebses oder Steinbockes entsprechenden maximalen Morgenweiten μ_m, die durch die Gleichung $\sin \mu_m = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi}$ bestimmt ist. Ist $\mu_m = 90^0$ d. h. für φ_1 und $\varphi_2 > 90 - \varepsilon$, so ist es möglich, daß sie beide gleich sind; ist aber eine der beiden Breiten z. B. $\varphi_1 < 90 - \varepsilon$, so ist $\mu < \mu_{m1} < 90^0$ und möglicherweise μ_2 (zwar $< \mu_{m2}$, aber) $> \mu_{m1}$.

Haben beide Orte die gleiche Breite, so ist es unmöglich.

Der allgemeine Fall wird zunächst für den Fall, daß der Ort mit kleinerer Breite der östlichere ist, folgendermaßen behandelt.

Zunächst wird die maximale Morgenweite für den Ort φ_1 ($\varphi_1 > \varphi_2$) bestimmt aus $\sin \mu_{m1} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi_1}$. Dann muß die Morgenweite des Sternes jedenfalls kleiner sein als μ_{m1}.

hanc, quando scilicet locus minoris latitudinis altero habet se orientalior, ita perficiemus. Intrandum est enim inprimis ad meteoro|scopium primo aut quinto 305r introitu cum maxima solis declinatione atque cum maioris latitudinis complemento, arcusque hoc modo elicitus erit amplitudo ortus initii cancri vel capricorni pro latitudine maiori, quam quidem ortivam amplitudinem servabimus tanquam argumentum, cuius intuitu tandem discernemus, possitne propositio haec fieri an non.

Ingrediamur praeterea introitu secundo cum minoris latitudinis complemento atque cum differentia longitudinis data, porrectus itaque arcus primum sit inventum, cuius deinde complementum cum minori latitudine primo vel quinto introitu illuc remissam tribuet nobis arcum, qui maiori demptus latitudini secundum relinquit inventum, cuius denique complemento atque complemento primi inventi per introitum secundum arcus egreditur, qui partibus LXXXX sublatus tertium residuat inventum, quod si cum invento primo per primum aut quintum organo remittatur, arcus exibit, qui conferendus vocetur, quique si servatae ortus amplitudini coaequetur, data loca unico dumtaxat horoscopo in una firmamenti conversione communicabunt. Sin autem minor duobus, si maior nulla | unquam participabunt horoscopo. 305v

Velut datis duobus locis et unius scilicet occidentalioris latitudo sit grad. XXXXIX, alterius vero pactum XLII. Sed sit differentia longitudinis grad. VI. De eis ergo volens efficere propositum cum complemento grad. XXXXI maioris latitudinis atque cum maxima solis declinatione per primum aut quintum introitum ad instrumentum ingredior et accipio pro eadem latitudinem[a]) ortivam solstitialium zodiaci punctorum amplitudinem graduum ferme XXXIIII et min.

a) Hs. hat *latitudine*.

Berechnung der Morgenweite. In Figur 35 sind die beiden Bezugssysteme (Pol, Äquator, Horizont 1, Horizont 2) gezeichnet. Die gesuchte Morgenweite μ_1 ist nichts anderes als die Entfernung y des beiden Horizonten gemeinsamen Schnittpunktes Σ vom Ostpunkt O_1 des Horizontes $1 = O_1\Sigma$. Sie wird auf folgende Weise gefunden. Man bildet: $\sin I = \cos\varphi_2 \sin t$, wobei t die Längendifferenz und $90^0 - I = \sphericalangle PT\mathfrak{N}_2$ ist; dann $\sin x = \frac{\sin\varphi_2}{\cos I}$ $(x = PT)$, $II = \varphi_1 - x = T\mathfrak{N}_1$, $\cos III = \cos I \cos II$ $(III = \sphericalangle \mathfrak{N}_2\Sigma\mathfrak{N}_1)$, $\sin y = \frac{\sin I}{\sin III}$. $(\Sigma\mathfrak{N}_1 = 90^0 - y)$.

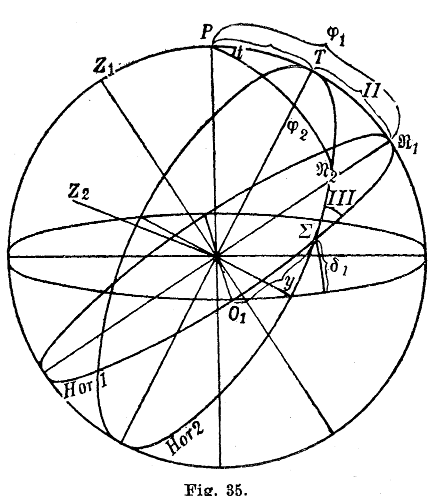


Fig. 35.

Beispiel: $\varphi_1 = 49^0$, $\varphi_2 = 47^0$, $t = 6^0$. Resultat: $\mu_{m1} = 34^0 40'$, $I = 4^0 20'$, $II = 6^0 45'$, $III = 8^0$, $y = 35^0$. Nun sagt der Verfasser fälschlich, da dieser Winkel $y < \mu_{m1}$ sei, sei der gesuchte Fall hier möglich!

XXX, quos servo tanquam huius propositionis argumentum. Deinde per introitum secundum cum complemento minoris latitudinis partium XXXXVIII atque cum differentia longitudinis data graduum VI ingredienti mihi primum offertur inventum grad. IIII min. XX, cum huius complemento grad. LXXXV min. XXXX atque cum minori latitudine meteoroscopium repetens quinto aut primo introitu produco partes XLII min. XV, quibus maiori latitudini sublatis secundum relinquitur inventum grad. VI min. XXXXV, quorum complemento partium LXXXIII min. XV cum inventi primi complemento grad. LXXXV min. XXXX per secundum ingressus introitum excipio partes LXXXII fere, 306r quibus quadranti | detractis tertium remanet inventum grad. VIII. His demum cum invento primo partium IIII min. XX primo vel quinto introitu ad organum remissis, arcus prodibit conferendus, quasi grad. XXXV, qui servato collatus argumento seu ortivae amplitudini et eam non exsuperans indicat propositionem hanc fieri posse.

At loco maioris latitudinis posito orientaliori eadem propositio sic fiet. Intrandum est imprimis cum complemento minoris latitudinis et cum maxima solis declinatione ad organum ipsum primo aut quinto introitu, arcusque compertus ortiva erit amplitudo alterius solstitialium punctorum pro latitudine minore, quae quidem ortus amplitudo velut prius illa tanquam pro argumento teneatur propositionis; secundus deinde fiat introitus cum maioris latitudinis complemento atque cum subiecta longitudinum differentia, compertusque arcus primum esto inventum, quo LXXXX gradibus sublato reliquum praeterea cum latitudine maiore primo aut quinto introitu illuc remissum quendam praebebit arcum in sublata minori latitudine secundum relinquetur inventum, cuius complemento atque complemento inventi primi per secundum introitum qui- 306v dam | nobis excutietur arcus, quo partibus XC detracto tertium remanet inventum, quo cum invento primo per introitum primum aut quintum postremo ad meteoroscopium misso conferendus reportabitur arcus, per quem idem, velut ante dictum est, faciemus indicium, utrum propositio fieri possit, an non.

Sint, velut prius, loca duo, quorum differentia longitudinum esto grad. VI, et latitudo unius orientalioris, scilicet grad. XXXXIX, alterius autem partium XLII. Inprimis ergo erit amplitudo solstitialium ortus punctorum pro minori latitudine partium XXXII min. XXXV fere, quibus servatis per secundum deinde introitum cum maioris latitudinis complemento grad. XXXXI atque cum differentia longitudinum data grad. VI introitu secundo primum elicio inventum partium III min. XXXXV, cuius posthaec complemento grad. LXXXVI

Analog wird der Fall, daß der Ort mit größerer Breite der östlichere ist, behandelt. $(\varphi_1 > \varphi_2)$: $\sin \mu_{m2} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varphi_2}$, $\sin I = \cos \varphi_1 \sin t$, $\sin x = \frac{\sin \varphi_1}{\cos I}$, $II = \varphi_2 - x$, $\cos III = \cos I \cos II$, $\sin y = \frac{\sin I}{\sin III}$.

Beispiel: $\varphi_1 = 49^0$, $\varphi_2 = 47^0$, $t = 6^0$. Resultat: $\mu_{m2} = 32^0 35'$. $I = 3^0 45'$, $II = 7^0 10'$. $III = 6^0$, $y = 41^0$. Da $y > \mu_{m2}$, ist der gesuchte Fall nicht möglich.

49. Proposition.

Bestimmung des gemeinsamen Horoskops für zwei Punkte verschiedener Breite und Länge.

min. XV atque latitudine ipsa maiore per primum aut quintum introitum partes XLIX cum minu. fere decem prodentur, quibus sublata minore latitudine secundum residuatur inventum grad. VII min. X, quos ex quadrante subtrahens relinquo partes LXXXII min. L, quibus et complemento inventi primi | partium LXXXVI min. XV iuxta introitum secundum grad. fere LXXXIIII prodibunt; his ex quadrante subtractis tertium remanet invéntum grad. VI, quo tandem atque invento primo grad. III min. XXXXV per primum aut quintum introitum conferendus exit arcus partium XLI, conferendus scilicet ad prius inventam atque servatam ortus amplitudinem, qua superata ab arcu hoc conferendo nobis ostenditur propositionem hanc in praemisso non posse fieri exemplo. 307ʳ

Videtur ergo Joannes de Regiomonte circa hoc propositum in canonibus super tabulis suis primi mobilis fuisse hallucinatus, cum ipse hunc modum hanc propositionem solvendi tanquam universalem posuerit, qui tantum nobis serviat, quando locus maioris latitudinis orienti exponatur seu loco altero fuerit orientalior. Si enim inquisitio haec esset generalis iam denuo idem exemplum locis scilicet transpositis fieri quoque posse demonstraretur. Sed contrarium conclusimus.

Propositio XXXXIX. | 307ᵛ

Locis duobus latitudines cum longitudinum differentia cognitas habentibus atque communi participantibus horoscopo ipsum hoc horoscopi punctum perscrutari.

Si data loca unico participant ascendente, et locus maioris latitudinis fuerit occidentalior altero, communis horoscopus erit cancri caput. Sin autem idem locus latitudinis maioris fuerit orientalior, ascendens locus ambobus commune capricorni constituatur principium. Ubi vero data loca duplici participaverint horoscopo, atque locus maioris latitudinis comparatione loci alterius occidentalem tenuerit situm, tunc talia signiferi puncta datis locis communiter orientia borealem possidebunt zodiaci semicirculum, eaque a cancri capite in utramque partem aequaliter recedent, atque idcirco aequales sortientur declinationes. Loco denique maioris latitudinis tenente orientalem alterius loci consideratione positionem, | ergo proposita loca gemino participant horoscopo, et uterque in meridionali signiferi reperietur hemicyclio ab puncto solstitii brumalis pari secedens intervallo locisque ambobus; eam ob rem par erit declinatio, velut ante paulo dictum est. 308ʳ

Ist der Ort größerer Breite der westliche und haben beide Orte ein gemeinsames Horoskop, dann ist es der Krebs, ist der Ort der östliche, so ist es der Steinbock. Haben sie zwei gemeinsame Horoskope, so sind diese vom Krebs bzw. vom Steinbock gleichweit entfernt, haben somit gleiche Deklinationen.

Aus dem oben bestimmten y ergibt sich die Deklination durch $\sin\delta_1 = \sin y \cdot \cos\varphi_1$ (für den ersten Fall) bzw. $\sin\delta_2 = \sin y \cdot \cos\varphi_2$ (für den zweiten Fall), dann die Längen aus $\sin\lambda = \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}$.

Beispiel: $y = 35^0$, $\delta_1 = 22^0$, $\lambda = 70^0$ bzw. $= 110^0$.

Ea namque puncta sic invenientur. Inprimis itaque ad meteoroscopium ingrediamur per introitum secundum cum numero seu arcu conferendo ex praemissa conperto atque cum complemento latitudinis maioris, si locus eius fuerit occidentalior, aut cum complemento latitudinis minoris, si locus maioris latitudinis fuerit occidentalior, quodque altero modorum horum colligitur, cum maxima solis declinatione per primum aut quintum introitum meteoroscopio mittatur, arcuque comperto ex grad. LXXXX sublato residuumque a capite cancri hinc quidem iuxta, inde vero contra signorum seriem numeratum communes oblatis locis patefaciet horoscopos, si modo maioris latitudinis locus occidentalior extiterit. Sin autem orientalior, haud dissimili eiusdem residui ab initio capricorni facta numeratione participati locis utrisque datis prodibunt horoscopi.

Velut propositis locis duobus, unus[a]) habet latitudinem graduum XXXXIX, alter vero, qui reliquo propius orienti concedat, grad. XXXXII latitudinem possideat, | eisque longitudinum differentia sit grad. VI, quibus quidem locis per praecedentem constat duplicem reperiri posse communem eiusdem inventi horoscopum. Sit igitur in noto geminos tales horoscopos invenire. Numerus conferendus ex praemissa compertus habetur grad. XXXV, quo cum complemento latitudinis maioris grad. XXXXI ad meteoroscopium per introitum secundum misso communis declinatio utriusque horoscopi prodibit partium XXII, quibus deinde atque maxima solis declinatione per quintum aut primum introitum elicio grad. LXX, quibus ex quadrante sublatis partes XX remanent.

308v

His utrimque a cancri capite numeratis, velut paulo admonetur ante, quoniam locus maioris latitudinis occidentalior subiciebatur, invenio communes horoscopos partes X geminorum et partes XX cancri;[b]) quod est propositum.

Nemo igitur dubitet, Johannem de Regiomonte conterraneum mente et hanc et praemissam diminute tractasse declarationemque ipsarum non pro rei exigentia consumasse.

Propositio L. |

309r

Quanta sit polaris elevatio supra positionis circulum alicuius in aequatore puncti per eius a dato meridiano distantiam rimari.

Positionis circulus iuxta Ptolemaei sententiam in suo Tetramerismo est, qui per datum caeli punctum sive per designatam stellam atque per duas meridiani et horizontis sectiones evadit. Distantia vero a meridiano aequatoris arcus est puncto proposito atque meridiani orbe conclusus. Obseratis aliquan-

a) Hs. hat *unius*. b) Nach *cancri* hat Hs. das Wort *capite* gestrichen.

50. Proposition.

Bestimmung der Höhe des Poles über dem Positionskreis eines Punktes im Äquator aus seiner Meridiandistanz.

Der Positionskreis ist der durch den Stern und die beiden Schnittpunkte des Meridians mit dem Horizont gelegte Kreis, die Meridiandistanz der auf dem Äquator gemessene Abstand des Sternes vom Meridian $\Sigma M' = \mu$, die „Höhe des Poles", der Abstand des Poles vom Positionskreis (Fig. 36).

tisper caeteris meteoroscopii foribus per tres dumtaxat eius ianuas hactenus ingressi fuimus; ita nos admonente negotiorum dignitate, cum res ipse meo quidem iudicio numerosos ob introitus commodius breviusque nequiverant explicari. Sed ad institutum redeo, unde paulo lapsa est oratio.

Praemissa igitur distantia semper ab ea numeretur meridiani parte, vel superna vel inferna, utri punctum | oblatum seu stella proposita vicinius accesserit, quare consequens est eandem distantiam quadrante nunquam esse superiorem; par enim quadranti docet punctum ipsum seu stellam datam horizontis cohaerere, tunc ergo frustra liberandum est horizonte praesertim punctum seu stellam propositam locante. 309v

Ceterum distantiam habitam supra basim numerantes atque cum regionariae latitudinis complemento per quartum introitum meteoroscopio inducentes arcum elicimus, quo ex grad. LXXXX dempto reliquum nostram patefaciet intentionem.

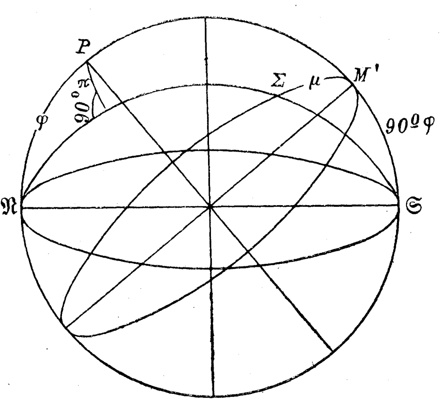


Fig. 36.

Ut in regione, cuius latitudo fuerit partium XLIX, sit dati in aequatore puncti sive stellae a meridiano distantia talis grad. XXXI et semis. Cum ea igitur supra basim numerata cumque datae latitudinis complemento partium XLI quarto introitu producuntur fere grad. LIX, quibus ex quadrante sublatis partes XXXI residuant, quae sunt polaris supra propositum positionis circulumelevatio.

Idem quoque solis aequedistantibus ita fiet. Ingrediemur igitur inprimis introitu secundo cum complemento | distantiae cumque regionis latitudine ac deinde cum extracti arcus complemento cumque complemento regionariae latitudinis per primum aut quintum introitum arcum extrahamus, quo grad. LXXXX detracto reliquum investigatam polarem manifestabit elevationem. 310r

Velut in eodem problemate distantiae datae complementum graduum LVIII et semis cum subiectae regionis latitudine grad. XXXXIX secundo introitu intra meteoroscopium mittens excipio partes fere XL, quibus ex quadrante demptis gradus remanent L, quos cum eiusdem latitudinis complemento partium XLI per primum aut quintum introitum ad organum reducenti mihi partes offeruntur fere LIX, quarum complementum grad. XXXI quaesitae positionis elevatio est polaris.

Der Verfasser bildet einfach $\operatorname{cotg}\pi = \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\mu}$ (Aufg. 4). Führt man den Hilfswinkel $P\mathfrak{N}\Sigma = M'\mathfrak{S}\Sigma = \mu'$ ein, so ist $\sin\pi = \sin\varphi \cdot \sin\mu'$, ferner $\cos\varphi = \operatorname{tg}\mu \operatorname{cotg}\mu'$, die Elimination von μ' führt zu obiger Gleichung.

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $\mu = 31\frac{1}{2}^0$, $\pi = 31^0$.

Lösung per aequedistantes: $\cos x = \cos\mu \sin\varphi$, $\cos\pi = \frac{\cos\varphi}{\cos x}$.

Beispiel: (wie oben), $x = 50^0$, $\pi = 31^0$.

Propositio LI.

Polarem elevationem supra positionis orbem caelestis ali- 310v cuius puncti extra aequatorem sumpti cognita non solum ipsius| declinatione, verum etiam meridionali distantia perquirere.

In praesenti talis esto distantia meridiana, qualis in praecedenti subicitur; quae si a M. C. supra terram sumitur quadranteque minor fuerit, ipsa supra quadrantem numerata cum datae, si borealis fuerit, declinationis complemento ad meteoroscopium secundo mittatur introitu, atque sic firmata regula dua reperiemus inventa. Nam introitu secundo producitur arcus, qui primum erit inventum; deinde per introitum sextum secundus accipitur arcus, de quo complementum latitudinis regionariae auferentes aut contra reliquum erit inventum secundum. Sin autem idem arcus eiusdem latitudinis complemento coaequetur, inventum primum cum regionis latitudine secundo introitu proferet arcum, qui erit investigata poli supra circulum positionis elevatio. Quod si non acciderit, inventum secundum supra quadrantem computetur atque cum inventi primi complemento per sextum introitum meteoroscopio inducatur, 311r elicitique arcus com|plementum cum regionis subiecta latitudine per secundum introitum meteoroscopio rursus introductu · desideratum exhibebit poli supra circulum positionis elevationem. Ubi vero data distantia declinatione subiecta septemtrionali quadrantis arcum impleat, igitur suppositae regionis latitudo supra basim recensita cum complemento datae declinationis introitu quarto ad meteoroscopium introducta praebebit arcum, qui cum eadem latitudine introitu secundo quaesitam porriget poli supra positionis circulum elevationem.

Denique, si distantia subiecta maiore quam sint gradus LXXXX declinatio quoque septentrionalis fuerit, hoc est, si distantia quadrante minor boreais declinationis ab M. C. sub terra numeretur; ergo talis distantia cum com-

---

51. Proposition.

Bestimmung der Höhe des Poles über dem Positionskreis für einen Stern, dessen Deklination und Meridiandistanz bekannt ist.

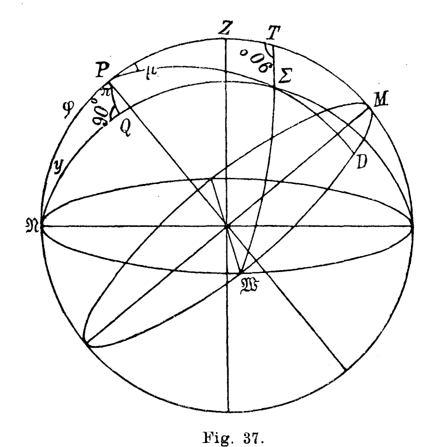


Fig. 37.

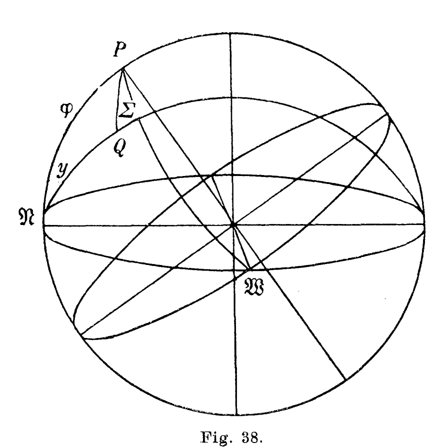


Fig. 38.

plemento declinationis supra regulam recensito per secundum imprimis introitum meteoroscopio inducta proferet arcum, qui primum sit inventum. Sicque firmata regula secundus educatur arcus introitu sexto, qui si latitudini regionis par fuerit, stella ipsa horizonti cohaerere significatur, et li|quet intentum. 311v Sin autem idem arcus regionariae latitudini fuerit vel inferior vel maior, igitur eius et latitudinis regionariae differentia sumpta, quae secundum est inventum, supra basim computetur, atque cum invento primo per introitum quartum meteoroscopio immittatur, collectum itaque arcum cum subiectae regionis latitudine per secundum introitum postremo inducentes petitam accipiemus polarem elevationem. Non aliter agendum erit cum austrina latitudine et distantia dati puncti caelestis ab imo terrae, idest ex medio caeli subterraneo numerata, idque operis ab superiori nullo paenitus differt discrimine, nisi quod distantia cum declinatione boreali ex medio caeli supra terram computatur, quae, ubi quadrantem vicerit, semicirculo detrahitur, reliquum pro distantia a meridiano tenendum est. Distantia vero cum declinatione austrina de medio caeli subterraneo numeratur, quae quadrantem quoque superans auffertur semicirculo distantiae vicem residuo gerentem. Nunc de quolibet distantiae genere praemissi ordinis serie singula contexam exempla, quod autem praeter institutum morem, ad quamlibet praecedentis doctrinae particulam, suum | non continue subiecerim exemplum, ideo factum est, ne studiosus lector 312r propositum efficere subito contendens prolixa exemplorum verbositate moretur, quo minus eam praemissae doctrinae[a]) particulam suo convenientem proposito inveniat.

Inprimis ergo sit distantia a M. C. supra terram graduum XXXIX min. XX cum declinatione boreali graduum XXXXII vel sit eadem distantia a M. C. subterraneo data cum declinatione austrina totidem etiam graduum, et propo-

a) Hs. hat *doctrinalae*.

1. Fall. μ supra terram gemessen, δ positiv (Fig. 37). Man bildet $\sin I = \sin\mu \cos\delta$ (Aufg. 2, $90^0 - I = \mathfrak{W}\Sigma$ im $\Delta\, \mathfrak{W}D\Sigma$), dann $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\delta \cdot \cos\mu$ (Aufg. 6, $x = PT$ im $\Delta\, PT\Sigma$), $x - (90^0 - \varphi) = PT - PZ = ZT = II$. Ist $x = 90^0 - \varphi$, d. h. $II = 0$, so erhält man den gesuchten Winkel π aus $\sin\pi = \sin I \cdot \sin\varphi$ (Aufg. 2, $\pi = PQ$ im $\Delta\, \mathfrak{N}PQ$). Ist aber $II \gtrless 0$, so bildet man $\operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg} I \cdot \cos II$ (Aufg. 6, $y = \sphericalangle\, T\mathfrak{N}\Sigma$ im $\Delta\, T\mathfrak{N}\Sigma$) und endlich $\sin\pi = \sin y\,.\,\sin\varphi$ (Aufg. 2, $\pi = PQ$ im $\Delta\mathfrak{N}PQ$).

2. Fall. $\mu = 90^0$, δ positiv (Fig. 38). Man bildet $\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{cotg}\delta}{\sin\varphi}$ (Aufg. 4 $P\Sigma = 90^0 - \delta$) und $\sin\pi = \sin y \cdot \sin\varphi$ (Aufg. 2).

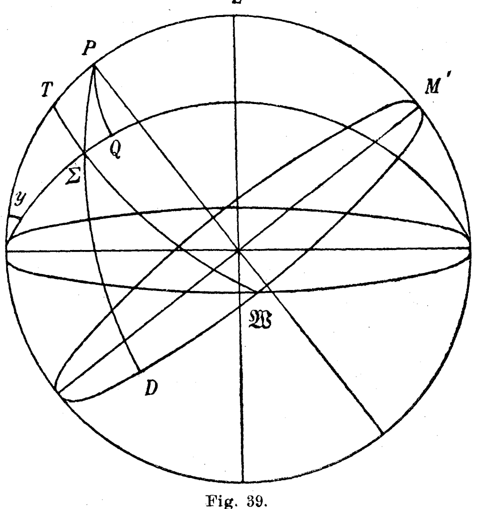


Fig. 39.

situm esto in regione, cui polus septemtrionalis elevatur partibus XXXXIX[a]), reperire polarem positionis elevationem pro tali stella seu caeli puncto, cui tanta distantia a meridiano cum subiecta declinatione competit.

Igitur facta in primis secundo introitu cum data distantia supra quadrantem numerata grad. XXXIX min. XX cumque suppositae declinationis complemento partium XLVIII primum elicitur inventum grad. XXVIII. Sicque regula perseverante per sextum ingrediens introitum secundus elicitur arcus partium XLI, | quo regionariae latitudinis complementum aequante inventum primum cum subiecto regionis latitudine secundo introitu meteoroscopio illatum positionis exhibet elevationem graduum XX et min. XXXX fere.
312v

Sit aliud exemplum: pro stella, cuius[b]) distantia gra. XXX a M. C. supra terram cum declinatione boreali grad. XXVI aut cum tanta etiam ad austrum declinatione, tantae quoque distantiae a M. C. subterraneo numerata propositum esto eiusdem stellae positionis elevationem invenire polarem.

Igitur cum proposita distantia grad. XXX supra quadrantem numerata cumque ipsius declinationis datae complemento grad. LXIIII ingrediens inprimis per introitum secundum elicio primum inventum grad. XXVI min. XXXX. Sicque regula firmata per sextum introitum secundus excipitur arcus grad. LXI fere, quo complemento latitudinis exsuperante ipsi eidem complemento sublato secundum relinquitur inventum partium XX, quod deinde supra quadrantem nu|meratum atque cum inventi primi complemento per sextum introitum meteoroscopio remissum reportat gradus LXII min. XXX, atque cum ipsa regionis latitudine grad. XXXXIX per introitum secundum petita supra positionis circulum polaris exibit elevatio partium XX et min. XX fere.
313r

Sit denique sidus aliquod, cuius a meridiano distantia quadrans, cum declinatione boreali vel austrina constituetur grad. XXX; propositumque esto septentrionalis poli elevationem supra positionis eius circulum numerare in regione, cuius latitudo fuerit grad. XXXXIX. Quam si supra basim recensuero atque cum complemento partium LX datae declinationis introitu quarto ad meteoroscopium deinde induxero, gradus LXVI cum minutiis XXXX prodibunt, quibus cum ipsa regionis latitudine per introitum secundum denuo introductis quaesita supra positionis circulum polaris extrahitur elevatio grad. XXXXIII et min. L.

Punctus demum caelestis proponatur, cuius a medio caeli supra terram distantia fuerit grad. CXXXXV cum boreali declinatione grad. XV vel cum

a) Hs. hat *XXXIX*. b) Hs. hat *cuivis*.

3. Fall. μ sub terra gemessen, d. h. $> 90^0$, δ positiv (Fig. 39). Analog Fall 1, nur muß gesetzt werden $II = x - \varphi$; ist $x = \varphi$, so steht der Stern im Horizont. Ferner ist zu bilden $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} I : \sin II$ ($\mathfrak{N}T = II$, $T\Sigma = I$, $y = \measuredangle T\mathfrak{N}\Sigma$).

Entsprechend werden die Fälle behandelt, bei denen die Deklination negativ ist.

Beispiele. 1. $\mu = 39^0 20'$, $\delta = 42^0$ (oder beide negativ), $\varphi = 49^0$. Resultate: $I = 28^0$, $x = 41^0 = 90^0 - \varphi$, $\pi = 20^0 40'$.

2. $\mu = 30^0$, $\delta = 26^0$, $\varphi = 49^0$. Resultate: $I = 26^0 40'$, $x = 61^0$, $II = 20^0$, $y = 62^0 30'$, $\pi = 20^0 20'$.

3. $\mu = 90^0$, $\delta = 30^0$, $\varphi = 49^0$. Resultate: $y = 66^0 40'$, $\pi = 43^0 50'$

totidem partibus austrinae declinationis distantia pari grad. | CXXXXV de M. C. subterraneo numerata. Igitur hac distantia de semicirculo sublata residuum erit partium XXXV, quibus supra quadrantem numeratis atque cum propositae declinationis complemento grad. LXXV ad meteoroscopium illatis introitu quidem secundo primum educitur inventum grad. XXXIII min. XXXX, per sextum autem introitum exit arcus fere partium LXXII, eisque latitudine regionis dempta secundum relinquitur inventum graduum fere XXIII, quibus exinde supra basim recensitis atque cum primo inventu partium XXXIII min. XXXX per quartum introitum organo inductis partes exeunt LX inventi tertii, quas demum cum subiectae regionis latitudine grad. XXXXIX per introitum secundum meteoroscopis ingerens polaris exibit elevatio partium XL min. XXXX fere, quam hactenus scrutabar. [313v]

Propositio LII.

Quod praecedens pollicetur alia quadam via, quamvis longinquiori, per solos videlicet aequedistantes, investigare. | [314r]

In hac, velut in praecedenti, dati puncti seu stellae distantia meridiano pro declinatione boreali sumatur ex M. C. supra terram. Sed pro declinatione austrina computetur a M. C. subterraneo, huiusmodi demum distantiam in aequatore numeramus, velut ante; quo autem pacto reperiatur, non est praesentis instituti. Nec enim lectorem in primis astronomiae cunabulis erudire in noto fuit.

Dato igitur aliquo puncto caelesti aut stella quapiam cum ipsius declinatione cognita, de qua propositum fuerit poli mundi supra circulum positionis eius elevationem invenire. Cognoscamus ergo dati puncti seu stellae a medio caeli supra terram aut subterraneo, velut admonebatur, recessum; qui si quadrante minor fuerit, ipsum cum complemento subiectae declinationis per introitum secundum meteoroscopio inferentes primum eliciamus inventum; huius deinde complementum cum ipsa declinatione primo aut quinto ad organum ipsum introitu suggerentes secundum excipimus inventum, quod latidudine regionis auferentes, si minus ea fuerit, aut econtra minorem latitudinem ex ipso tollentes invento secundo reliquum et inventi primi comple|mentum secundum ducamus introitum [a]), compertumque arcum quadranti detrahentes tertium relin- [314v]

a) Hs. hat *introitu*.

---

52. Proposition.

Lösung der vorigen Aufgabe per solos aequedistantes.

Gegeben ist die Meridiandistanz des Sternes $MD = \mu$ und seine Deklination $\Sigma D = \delta$. (Fig. 37.) Man bildet $\sin I = \sin\mu \cos\delta$ $(90^0 - I = \mathfrak{W}\Sigma$ im $\triangle\, \mathfrak{W}\Sigma D$, $I = \Sigma T)$, dann $\sin II = \frac{\sin\delta}{\cos I}$ $(II = \sphericalangle\, M'\mathfrak{W}T = \sphericalangle\, \Sigma\mathfrak{W}D$ im $\triangle\, \Sigma\mathfrak{W}D)$, $\varphi - II = x = MZ - MT = ZT)$, $\cos III = \sin x \cos I$ $(III = \mathfrak{N}\Sigma$ im $\triangle\, \mathfrak{N}\Sigma T)$, $\sin IV = \frac{\sin I}{\sin III}$ $(IV = \sphericalangle\, P\mathfrak{N}\Sigma$ im $\triangle\, T\mathfrak{N}\Sigma$ und endlich $\pi = \sin IV \cdot \sin\varphi$ $(\pi = PQ$ im $\triangle\, \mathfrak{N}PQ)$.

quimus inventum, quo cum invento primo per primum aut quintum introitum ad meteoroscopium reducto quartum exibit inventum, quod demum cum datae regionis latitudine per introitum secundum meteoroscopio illatum prodit polarem elevationem supra datum positionis circulum. At invento secundo subiectam regionis latitudinem aequante, inventum primum atque regionis latitudinem, perinde ac inventum quartum, eandemque pridem usurpantes latitudinem quaesitae poli supra positionis circulum elevationem cognoscemus.

Ipsa deinde distantia quadrantem aequante secundus fiat introitus cum regionariae latitudinis complemento atque cum ipsa declinatione, arcuque comperto de LXXXX gradibus ablato reliquum habeatur tanquam tertium inventum, atque declinationis complementum perinde ac inventum aestimemus primum eisdemque arcubus pro duobus inventis, primo scilicet tertio utentes et praemissam sectantes doctrinam ad indagatam praeveniens poli elevationem, quam datum caeli punctum seu stella supra suum positionis obtinet | 315r circulum. Denique distantia quadrantem exsuperante ipsa semicirculo auferatur, residuum cum subiectae declinationis complemento per introitum secundum meteoroscopio inductum ostendet arcum, qui sit inventum primum, cuius deinde complemento cum ipsa declinatione per primum aut quintum introitum illuc reducto secundum prodibit inventum, quo regionariae latitudinis complementum aequante propositum punctum caeleste aut stella in subiectae regionis horizonte sedem obtinet; et habetur intentum.

Nam eiusdem stellae polaris elevatio supra positionis suae circulum erit regionis latitudo. Sin autem hoc secundum inventum regionariae latitudinis complemento dispar extiterit, ipsius atque complementi eiusdem differentia sumatur. Auferendo scilicet minorem arcum de maiori, huius itaque differentiae complementum cum primi complemento inventi per secundum ingeratur introitum arcusque productus quadranti dematur, et tertium residuat inventum, quo et invento primo, ut prius, elicitur inventum quartum; ipsumque deinceps opus a doctrina inprimis tradita nullatenus recedit. |

315v Esto stella quaepiam declinationis vel austrinae vel borealis grad. XXVI cum distantia a meridiano partium XXX. Haec autem distantia pro modulo seu parte declinationis sumpta sit, velut ab initio commonui, et sit intentio per gradus XXXXIX latitudinis polarem elevationem supra positionis circulum numerare; per secundum ergo introitum cum declinationis huius complemento partium LXIIII atque cum data distantia grad. XXX primum capio inventum partium XXVI et min. XXXX, cuius deinde complemento et data declinatione grad. XXVI per introitum primum aut quintum pro invento secundo grad. XXIX et semis eliciuntur, quibus regionariae latitudini detractis partes remanent XIX cum minutiis ferme XXX, per quas et per primi complementum inventi grad. LXIII min. XX arcum secundo deprehendo introitu partium XVII

Wenn $II = \varphi$ ist, so bildet man gleich $\sin \pi = \sin I \cdot \sin \varphi$ (da, wie aus der Figur hervorgeht, $IV = I$ wird).

Wenn $\mu = 90^0$ ist (Fig. 38), bildet man gleich $\cos III = \sin \delta \cos \varphi$ ($III = \mathfrak{R}\Sigma$ im $\Delta\ \mathfrak{R}P\Sigma$) und betrachtet $90^0 - \delta$ als I, d. h. man bildet, wie oben, $\sin IV = \frac{\sin I}{\sin III}$ und $\sin \pi = \sin IV \cdot \sin \varphi$.

Ist endlich $\mu > 90^0$ (Fig. 39), so bildet man $\sin (180^0 - \mu) \cos \delta =$

min. XX, quibus quadranti sublatis tertium relinquitur inventum grad. LXII min. XXXX, quo et invento primo partium XXVII min. XXXX per primum aut quintum introitum gra. XXVII cum min. fere XXXX pro quarto capimus invento, quo demum atque regionis latitudine per introitum secundum ipsa polaris educitur elevatio gra. XX min. XX; qua nostra constat intentio.

Sit aliud caeli | punctum cum declinatione vel boreali vel austrina grad. XXXXII, et eius a meridiano distantia sit, velut monebam, grad. XXXVIII. Sit ergo in voto propositum efficere pro regione, cuius latitudo fuerit grad. XXXXIX.[a]) Igitur cum data distantia partium XXXVIII atque cum declinationis complemento per introitum secundum pro invento primo prodeunt grad. fere XXVII, quorum complementum partium LXIII cum ipsa declinatione grad. XXXXII primo vel quinto introitu secundum producunt inventum fere partium XLIX; quibus regionis subiectae latitudinem aequantibus igitur inventum primum cum eadem regionis latitudine secundo porrigit introitu partes quasi XX, quae sunt polaris elevatio supra datum positionis circulum investigata. 316r

Sit item sidus aliquod, cuius declinatio sive borealis sive austrina fuerit graduum XXXX, distantia vero de meridiano sit quadrans, et propositum esto ad latitudinem grad. XXXXIX eiusdem sideris elevationem polarem supra positionis eius circulum invenire; per introitum secundum cum ipsa declinatione grad. XXXX atque cum datae regionis latitudine gradus eliciuntur XXIIII min L fere, quorum | complementum partium LXV min. X, si tanquam tertium sumatur inventum, cum datae declinationis complemento grad. L ad instar inventi primi positi per introitum primum aut quintum prodet gradus fere LVII et semis, quibus pro invento quarto sumptis atque ipsa regionis latitudine per introitum secundum polaris egreditur elevatio quaesita partium XXXIX et semis fere. 316v

Caelestis demum punctus proponatur, cuius distantia de meridiano iuxta procedentem cautelam sumpta sit grad. CXXXV, declinatio vero vel borealis vel austrina grad. X, et cordi sit de puncto eodem propositum efficere; residuum igitur distantiae semicirculo detractae erit grad. XXXXV, quos cum declinationis complemento per introitum secundum organo ingerens excipio primum inventum fere partium XXXXIIII et min. XX, cuius complemento grad. XXXXV min. XXXX atque declinatione graduum X per quintum aut primum introitum secundum exit inventum partium XIIII min. XV, quibus regionariae latitudinis complemento detractis grad. remanent XXVI cum min. XXXXV.

Horum deinde complemento partium LXIII min. XV atque inventi primi complemento grad. XXXXV min. XXXX per introitum secundum gradus exeunt

---

a) Hs. hat XXXIX.

$\sin I$ ($90^0 - I = \Sigma\mathfrak{W}$ im $\Delta\, \mathfrak{W}\Sigma D$) und $\sin II = \frac{\sin \delta}{\cos I}$, wie oben. ($II = \measuredangle\, \Sigma\mathfrak{W}D$ im $\Delta\, \Sigma\mathfrak{W}D$.) Ist nun $II = 90^0 - \varphi$, so steht der Stern im Horizont, und die Polhöhe über seinem Positionskreis ist die geographische Breite. Ist aber $II \gtrless 90^0 - \varphi$, so bildet man $\pm\,(II - (90^0 - \varphi)) = x = M'T - M'\mathfrak{N} = \mathfrak{N}T$ und $\cos III = \cos x \cos I$ ($III = \mathfrak{N}\Sigma$ im $\Delta\, \mathfrak{N}\mathfrak{W}\Sigma$) und nun, wie oben, $\sin IV = \frac{\sin I}{\sin III}$ usf.

317r LIII cum min. XV fere, | quibus quadranti sublatis tertium relinquitur inventum partium XXXVI min. XXXXV, quibus et invento primo grad. XXXXIII min. XX per primum aut quintum introitum pro invento quarto [a]) gradus ostenduntur fere LIX. His tandem atque latitudine regionis grad. XXXXIX intentum, poli elevationem, secundo [b]) fere colligimus introitu partium XXXX et min. X fere.

Propositio LIII.

Poli subiecta septemtrionalis altitudine supra quempiam positionis circulum, quantus sit aequatoris arcus ab eodem positionis circulo atque meridiano comprehensus, explorare.

Igitur facto introitu decimo cum data poli elevatione supra circulum positionis in basi recensita cumque regionis latitudine, arcus itaque comperti complementum ostendit propositum.

317v Ut regione, cuius latitudo fuerit grad. XXXXIX, | aliquis positionis circulum habeat polarem elevationem grad. XXXII. His ergo supra basim computatis cum latitudine regionis partium XLIX partes eliciuntur LVII min. X, quarum complementum grad. XXXII min. et L est arcus quaesitus.

Item sic aequedistantibus efficiemus; meteoroscopium ingrediamur per introitum primum aut quintum cum regionis latitudine atque cum altitudine polari supra datum positionis circulum, arcuque invento gradibus LXXXX detracto, reliquum deinde cum complemento polaris altitudinis supra circulum positionis primo vel quinto item introitu arcum praebebit, quo partibus XC sublato [c]) liquet intentum.

Velut in regione, cui polus mundi aquilonaris elevatur grad. XXXXIX, sit intentio nostra propositum efficere pro circulo positionis, cui polus idem

a) Hs. hat *secundo*. b) Hs. hat *quarto*. c) Hs. hat *sublata*.

Beispiele: 1. $\delta = 26^0$, $\mu = 30^0$, $\varphi = 49^0$. Resultate: $I = 26^0\,40'$, $II = 29\frac{1}{2}^0$, $III = 62^0\,40'$, $IV = 27^0\,40'$, $\pi = 20^0\,20'$.

2. $\delta = 42^0$, $\mu = 38^0$, $\varphi = 49^0$. Resultate: $I = 27^0$, $II = 49^0 = \varphi$, $\pi = 20^0$.

3. $\delta = 40^0$, $\mu = 90^0$, $\varphi = 49^0$. Resultate: $III = 65^0\,10'$, $I = 90^0 - \delta = 50^0$, $IV = 57\frac{1}{2}^0$, $\pi = 39\frac{1}{2}^0$.

4. $\mu = 135^0$, $\delta = 10^0$. Resultate: $I = 44^0\,20'$, $II = 14^0\,15'$, $x = 26^0\,45'$, $III = 36^0\,45'$, $IV = 59^0$, $\pi = 40^0\,10'$.

53. Proposition.

Bestimmung des Bogens auf dem Äquator zwischen Meridian- und Positionskreis aus der geogr. Breite und der Polhöhe über dem Positionskreis (Fig. 36).

Man bildet $\sin r = \frac{\operatorname{tg} II}{\operatorname{tg} \varphi}$ (Aufg. 10).

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $\pi = 32^0$, $r = 32^0\,50'$.

Lösung per aequedistantes: $\cos x = \frac{\sin \pi}{\sin \varphi}$, $\cos r = \frac{\sin x}{\cos \pi}$.

partibus XVII elevatur; facto ergo primo aut quinto introitu cum subiectae regionis latitudine grad. XXXXIX atque cum data poli supra positionis circulum elevatione grad. XVII, cum complemento subiectae supra positionis circulum altitudine grad. LXXIII rursus aut quinto remissam introitu grad. LXXIIII fere, quorum complementum partium XVI quaesitus habetur arcus. |

Propositio LIIII.

318r

Domicilia caeli duodecim iuxta Johannis de Regiomonte traditionem constituere.

Inprimis igitur duae polares elevationes supra duos positionum circulos per L huius sunt inveniendae. Una ad positionem puncti unius aequatoris ab datae regionis meridiano gradihus XXX[a]) recedentis, altera pro alterius positione puncti et in ipso aequatore etiam sumpti partibusque LX[b]) ab eodem meridiano distantis. Prior itaque polaris elevatio[c]) duobus inserviet domibus, XI[me] scilicet atque tertiae, postera vero duobus quoque domibus, XII[me] scilicet atque secundae, accomodabitur.

Hae autem polares elevationes in una regione semel inventae semper eidem manebunt, atque eam ob rem sunt servandae. Hac denique duplici et polari positio|num duarum elevatione reperta pro tempore dato M. C. caeli supra terram per XXII huius inveniatur, cuius ascensioni rectae per eandem repertae gradus XXX iungantur et aggregatum hoc obliqua erit ascensio domus undecimae, cui deinde aggregato partes item XXX coacerventur, excrescensque summa obliqua constituatur ascensio domicilii duodecimi, huius proximae coacervationis multitudini partibus adiectis denuo tricenis obliqua conflabitur ascensio pro ascendente zodiaci puncto, eidem denique[d]) ascensioni

318v

a) Hs. hat LXXXX. b) Hs. hat XC. c) Hs. hat *elevatio* korr. aus *elevationis*.
d) Nach *denique* hat Hs. das Wort *puncto* gestrichen.

54. Proposition.

Konstruktion der 12 „Himmelswohnungen“ nach Johannes Regiomontanus (Fig. 40.)

Man bestimmt zunächst 2 Polhöhen für 2 Positionskreise, die auf dem Äquator einen Bogen von 30^0 bzw. 60^0 abschneiden. Der erste dient für das 11. und 3. Haus, der zweite für das 12. und 2. Haus. Aus der Länge und dem Stundenwinkel der Sonne bestimmt man nach Prop. 22 Länge λ_M und Rektaszension α_M von M (= 10. Haus). $\alpha_M + 30^0$ ist dann die asc. obl. des 11. Hauses, $\alpha_M + 60^0$ des 12. Hauses, $\alpha_M + 90^0$ des 1. Hauses oder des „Horoskops“ usf.

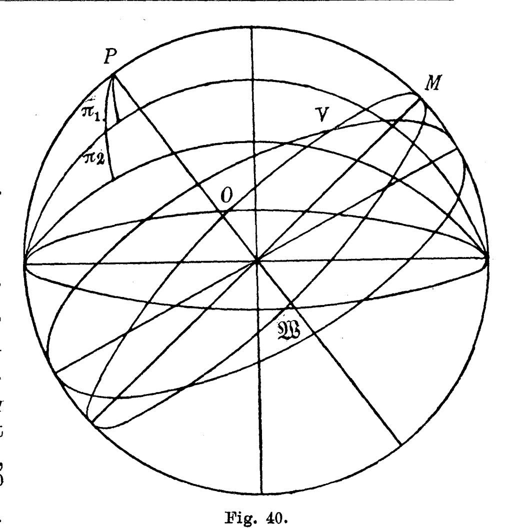


Fig. 40.

partes hi tricenae congregentur, obliqua secundi ascensio domicilii[a]) constabit, cui postremo XXX gradibus adiectis obliquas tertii ascensiones obtinebimus domicilii, undecimae quidem et tertiae domus, obliquis ascensionibus iuxta priorem poli elevationem ascensionibus vero duodecimae atque secundae per posteriorem in signiferi arcus singulatim conversis.

Cuspides ergo quaeratur domorum undecimae scilicet duodecimae et secundae tertiaeque constabunt. At horoscopi ascensiones per subiectae regionis latitudinem in signiferi portionem convertemus, reliqua reperiemus domiciliorum principia per inventarum cuspidum diametros, undecimae namque domui

319r quinta per diametrum opponitur et duodecimae sexta, secundae | octava, et tertia nonum a regione collocatur domicilium.

Ut autem praemissa cognitu fiant faciliora, hoc declaranda sunt exemplo. Sol ipse post aliquem meridiem horis X min. XXXI unius horae in parte XXVI leonis vehatur; esto ad id momenti propositum duodecim caeli cuspides seu domiciliorum initia pro regione, cuius habetur latitudo partium XXXXIX, iuxta hanc institutionem erigere. Igitur per L huius duas invenio polares elevationes, quarum una est grad. XXX atque domibus duabus, undecimae tertiaeque, inserviet, altera vero grad. XXXXV ac domiciliis quoque duobus, XII[mo] scilicet ac secundo[b]), accomodata. Hi denique numeri polares duo ad latitudinem partium XLIX non variantur unquam. Ideo repertos semel eos eadem regio perenni mandat memoriae. Pro dati deinde momenti tempore M. C. per XXII huius invenitur gradus IIII aquarii, cuius ascensio recta graduum habetur CCCVI et min. XVI fere, cui XXX partibus adiectis ascensionis domus undecimae partium CCCXXXVI min. XVI emerget fere, quibus denuo XXX gradibus adiectis partes CCCLXVI cum mi. XVI excrescunt, quibus integra circuli revolutione, quae partibus constat CCCLX, sublata, residuum erit par-

319v tium VI min. XVI, quae sunt ascensiones domus duodecimae. His rur|sus adiunctis grad. XXX ascensiones horoscopi consurgent obliquae partium XXXVI min. XVI. His si XXX item gradus adicero domicilii secundi, constituentur ascensiones partium LXVI min. XVI, quibus demum eisdem XXX partibus coniunctis ascensionis habeto domus tertiae partium XCVI mi. XVI.

Nunc secundum doctrinam praemissam ascensionibus obliquis duorum

a) Hs. hat *domicilis*. b) Hs. hat XI[mo] *ac tertio*.

Die „Spitzen" der Häuser d. h. die Schnittpunkte der Ekliptik mit den den einzelnen Häusern entsprechenden Positionskreisen 11) $= 30^0$, 12) $= 60^0$, 1) $= 90^0 =$ Horizont, 2) $= 60^0$, 3) $= 30^0$) werden mit Prop. 20 bestimmt.

Beispiel: $t = 10^h\, 31^m$, $\lambda_s = 144^0$, $\varphi = 49^0$. Resultate: $\pi_1 = 30^0$, $\pi_2 = 45^0$, $\lambda_M = 304^0$, $\alpha_M = 306^0\, 16'$, $\alpha_{11} = 336^0\, 16'$, $\alpha_{12} = 6^0\, 16'$, $\alpha_1 = 36^0\, 16'$, $\alpha_2 = 66^0\, 16'$, $\alpha_3 = 90^0\, 10'$. $\lambda_{11} = 326\frac{1}{2}^0$, $\lambda_{12} = 12^0$, $\lambda_1 =$ Horoscopus $= 64\frac{1}{2}^0$, $\lambda_2 =$ anaphora ascendentis $= 92^0$, $\lambda_3 =$ cataphora $108\frac{1}{2}^0$.

55. Proposition.

Bestimmung der von denjenigen Positionskreisen auf dem Äquator abgeschnittenen Stücke, die den Quadranten des Vertikalkreises in 3 gleiche Teile teilen (Fig. 41).

domiciliorum, undecimi atque tertii, iuxta polarem elevationem graduum XXX per XX huius conversis in duos signiferi arcus colligo inprimis pro undecimi domicilii cuspide partes XXVI et semis aquarii fere et tertiae cuspidis partes XVIII et semis aquarii fere et tertiae cuspidis partes XVIII et semis cancri. Deinde ascensionibus obliquis duorum domiciliorum, duodecimi atque secundi, iuxta polarem elevationem partium XLV in signiferi arcus per eandem conversis reperio cuspidem duodecimae domus in grad. XII arietis, secundae vero domus partes II cancri; obliquis demum ascensionibus horoscopi iuxta polarem elevationem seu regionis latitudinem subiectae partium XLIX iuxta eandem XX commutatis in signiferi arcum invenio horoscopum in grad. IIII et quasi semis geminorum supra positum horizontem emersisse.

Nunc autem, quae dicta sunt, summarie repetam. Regium do|micilium [320r] ex aquarii signo partes quatuor possidet. Undecimum partes XXVI et semis eiusdem, duodecimum ab horoscopo domicilium tenet arietis partes XII, horoscopus habet partes IIII et semis geminorum, ascendentis anaphora cancri grad. II, cataphora eiusdem partibus XVIII et semis eiusdem cancri constituuntur; ceteras caeli cuspides his inventis ignorabit nemo, qui fontes uraniae pridem deliberaverit, summis vix labris etiam admotis.

Propositio LV.

Distinctis in tres aequas partes singulis ex circulo verticalis quadrantibus, qui horizonte dato et eius meridiano separantur, et designatis per dua quaeque cuiuslibet quadrantis sectionum puncta duobus positionum circulis inter eos conclusas aequatoris | portiones numeris agnoscere. [320v]

His igitur aequatoris portionibus in uno eius quadrante compertis ipsae quoque in reliquis quadrantibus non latebunt. Nam illae compares videlicet comparibus aequantur sibi invicem; ut aequatoris ea portio, quam horizon et proximus supra eum positionis circulus comprehendit, par est illi aequatoris portioni, quam idem horizon et proximus infra eum positionis circulus pari verticalis intervallo circuli ab eodem secedens concludunt, et ita de reliquis aequatoris particulis huiusmodi.

Propositum igitur esto illam aequatoris revelare portionem, quae dato

---

Der Bogen, den der $ZY = r_{10} = 30^0$ gegen den Meridian geneigte Positionskreis auf dem Äquator abschneidet, heißt nach Regiomontanus „interstitium des 10. Hauses". Man bildet $\operatorname{cotg} \mu_{10} = \frac{\operatorname{cotg} r_{10}}{\cos \varphi}$ (Aufg. 8, im $\triangle\, M\mathfrak{S}N$ ist $\mu = MN$).

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $\mu_{10} = 20^0\,45'$ für $r_{10} = 30^0$. Die anderen findet man folgendermaßen: Man bildet (für $r_{11} = 30^0$) $\operatorname{cotg} \mu = \frac{\operatorname{cotg} r_{11}}{\cos \varphi}$; dann ist $\mu_{12} = 90^0 - \mu = \mathfrak{W}N'$ das interstitium des 12. Hauses, und $\mu_{11} = 90^0 - \mu_{12} - \mu_{10} = NN'$ das des 11. Hauses.

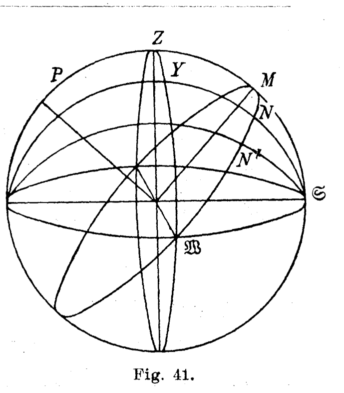


Fig. 41.

meridiano atque propinquo deprehensa positionis circulo, qui cum eodem meridiano tricenas ex verticali circulo partes complectitur.

Hunc aequatoris arcum Johannes de Regiomonte super tabulis directoriis interstitium decimae domus appellat. Hoc autem interstitium sic inveniemus; facto scilicet introitu octavo cum gradibus LX supra basim numeratis atque 321r cum subiecta regionis latitudine, extracti enim | arcus complementum nostram patefaciet intentionem.

Ut in regione latitudinis XXXXIX partium, si velim decimae domus interstitium habere, ingredior ad meteoroscopium introitu octavo cum gradibus LX supra basim computatis atque cum dicta latitudine graduum XXXXIX et excipio partes LXIX min. XV, quibus ex quadrante sublatis quaesiti remanent interstitii partes XX min. XXXX Vfere. Arcum autem illum aequatoris, quem interstitium domus XI^mae^ idem Joannes vocat, sic reperiemus. Facto scilicet introitu octavo cum grad. XXX supra basim recensitis atque cum supposita regionis latitudine arcuque comperto, qui domus duodecimae dicatur interstitium, de partibus complementi interstitii domus decimae pridem inventi subtracto reliquum erit interstitium domus undecimae.

Velut pro numerando undecimae domus interstitio ad regionem, cuius latitudo fuerit partium XLIX, ad organum accedens introitu octavo cum grad. XXX supra basim computatis atque cum subiectae regionis latitudine partium XLIX partes elicio XLI min. XX fere, quas nuncupo duodecimae domus inter-321v stitium, quibusque demptis de interstitii do|mus decimae complemento graduum LXIX min. XV partes remanent XXVII min. LVI fere, quae nominentur interstitium domus undecimae hactenus investigatum.

Haec eadem domiciliorum interstitia solis etiam aequedistantibus sic constabunt. Nam pro interstitio domus decimae meteoroscopium inprimis consulemus introitu secundo cum gradibus XXX atque cum latitudine subiectae regionis, ac deinde iuxta primum aut quintum introitum cum excepti arcus complemento atque cum gradibus LX meteoroscopium repetentibus nobis quidam offertur arcus, quem si ex quadrante tollamus, desideratum decimae domus relinquitur interstitium.

Ut si in regione latitudinis partium XLIX decimi domicilii proponam interstitium numerare. Igitur ingredienti mihi per introitum secundum grad. XXX atque cum data latitudine partium XLIX excipio partes XXII; cum earum deinde complemento grad. LXVIII atque cum partibus LX primo aut

---

Beispiel: $\mu_{12} = 42^0\,20'$, $\mu_{11} = 27^0\,56'$. Die Summe muß 90^0 geben, also genügt die Bestimmung der 2 interstitia μ_{10} und μ_{12}.

Lösung per aequedistantes. $\sin x = \sin r_{10} \cdot \sin \varphi$, $\cos \mu_{10} = \frac{\cos r_{10}}{\cos x}$. Ebenso $\sin y = \sin r_{12} \cdot \sin \varphi$ und $\sin \mu_{12} = \frac{\cos r_{12}}{\cos y}$. Berechnung: $x = 22^0$, $\mu_{10} = 20^0\,45'$; $y = 40^0\,40'$, $\mu_{12} = 42^0\,20'$, $\mu_{11} = 27^0\,56'$.

56. Proposition.

Konstruktion der 12 Himmelswohnungen nach Campanus.

Man bestimmt zunächst die Interstitien des 10., 11. und 12. Hauses nach der vorigen Proposition, dann nach Prop. 10 die Polhöhen für den Positions-

quinto introitu mihi rursus accedenti partes exhibebuntur LXIX min. XV, quibus ex quadrante demptis partes relinquuntur XX min. XXXXV, decimae scilicet domus interstitium. Pari ratione interstitium | domus XII[mae] perquiremus, quod demum undecimae domus interstitium liquebit. Meteoroscopium enim introitu secundo inprimis accedentes cum grad. LX atque cum subiectae regionis latitudine; postea vero cum extracti arcus complemento et gradibus XXX iuxta primum aut quintum introitum ad idem organum accedentes XII[mae] domus excipiemus interstitium, quod si complemento interstitii domus decimae tollamus, undecimae domus interstitium residuabit. [322r]

Velut accedenti mihi secundo introitu ad meteoroscopium cum grad. LX atque cum regionaria latitudine partium XLIX min. XXXX, quarum complemento partium XL min. XX atque gradibus XXX partes demum primo vel quinto introitu prodibunt XXXXII[a]) min. XX, quae sunt XII[mae] domus interstitium. Quibus tandem de complemento interstitii domus decimae sublatis partes remanent XXVII mi. LVI, quae undecimae sunt domus interstitium.

Id etiam silentio non est praetereundum trium domiciliorum tria haec interstitia quadrantem coaequare; unde liquet, quod habitis duobus eorum, et tertium non ignorabitur. | Nam per subtractionem duorum cognitorum interstitionum pariter ex grad. LXXXX tertium quoque notum relinquetur. [322v]

Propositio LVI.

Duodecim caeli cuspides seu domicilii iuxta Campani et quorundam aliorum opinionem erigere.

Igitur primum interstitia tria domorum trium, decimae scilicet undecimae atque XII[mae], per praemissam reperiantur, quae ad eandem regionem semel inventa cuncto temporis inserviunt momento. Ideo semel inventa custodiantur accuratius. Deinde per L huius polaris non desit nobis elevatio supra positionis circulum pro eo aequatoris puncto, qui a subiecto meridiano domus interstitio decimae recedat. Hic autem polaris numerus undecimae domus habeat cognomen.

Post haec per eandem alia inveniatur elevatio polaris supra positionis circulum eius | in aequatore puncti, qui ab eodem distet meridiano per eum [323r]

a) Hs. hat XXXI.

---

kreis, der auf dem Äquator das Interstitium des 10. Hauses abschneidet, die sogenannte „Polzahl des 11. Hauses", und ebenso die Polzahl des 12. Hauses.

Denn berechnet man, wie oben, Länge λ_{10} und Rektaszension α_{10} von M, dann ist $\alpha_{11} = \alpha_{10} + \mu_{10}$ die asc. obl. des 11. Hauses, $\alpha_{12} = \alpha_{11} + \mu_{11}$ des 12., $\alpha_1 = \alpha_{12} + \mu_{12}$ des Horoskops, $\alpha_2 = \alpha_1 + \mu_{12}$ des 2., $\alpha_3 = \alpha_2 + \mu_{11}$ des 3. Hauses. Nun werden hieraus die Längen, wie oben, berechnet; λ_{11} und λ_3 mit der Polzahl des 11. Hauses, λ_{12} und λ_2 mit der des 12., λ_1 direkt.

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $t = 10^h 31^m$, $\lambda_8 = 144^0$. Resultate: $\mu_{10} = 20^0 44'$, $\mu_{11} = 27^0 56'$, $\mu_{12} = 42^0 21'$; $\pi_{11} = 22^0 10'$, $\pi_{12} = 40^0 49'$; $\lambda_{10} = 304^0$, $\alpha_{10} = 306^0 16'$; $\alpha_{11} = 327^0$, $\alpha_{12} = 354^0 56'$, $\alpha_1 = 37^0 17$, $\alpha_2 = 77^0 36'$, $\alpha_3 = 105^0 32'$.

Hieraus: $\lambda_{11} = 318^0$, $\lambda_{12} = 351^0$, $\lambda_1 = 64\frac{1}{2}^0$, $\lambda_2 = 98^0 40'$, $\lambda_3 = 113^0$.

arcum, qui constat ex duobus interstitiis, decimi scilicet atque undecimi domicilii. Sitque polari huic numero duodecimae domus cognomentum. Hi quoque numeri polares pro eadem regione semel inventi, quemadmodum praemissa domorum interstitia, nullo unquam variantur tempore; igitur et ipsi memoriae mandentur perenni. Deinde per XXII huius pro subiecti momento temporis M. C. supra terram eiusque recta ascensio constent, cui decimae domus adiciatur interstitium, ipsumque hoc aggregatum obliqua constituatur ascensio cuspidis undecimae, cui item domus undecimae interstitium addatur, et summa haec erit XII^{mae} domus ascensio obliqua. His denique domus XII^{mae} interstitium iungatur, et collectum hoc ascensio sit obliqua ipsius horoscopi. Huic rursus interstitio XII^{mae} domus coniuncto ascensiones emergent obliquae secundi ab horoscopo loci. Huius demum ascensionis numero domus undecimae congregetur interstitium. Consurget itaque ascensio obliqua tertii ab horoscopo 323^{v} domicilii. Horum postremo domicilio | rum obliquas ascensiones iam inventas per XX huius in arcus eclipticae convertamus, et in primis duas obliquas ascensiones, undecimae[a]) scilicet et tertiae domus, iuxta polarem numerum undecimae domus, deinde ascensiones obliquas duodecimae atque secundae domus per numerum polarem duodecimae domus, horoscopus vero, id est signiferi punctus supra regionis emergens horizontem, et sua obliqua constabit ascensio iuxta subiectae regionis latitudinem.

Velut in regione, cui polus septemtrionalis gradibus elevatur XXXXIX, propositum esto horis X min. XXXI post meridiem aliquem sole in grad. XXIV[b]) leonis constituto duodecim caeli domicilia iuxta Campani construere opinionem. Ergo per praemissam interstitium domus decimae partium habebitur XX et min. XXXXIIII et interstitium domus undecimae grad. XXVII min. LVI; interstitium denique domicilii XII^{mi} grad. XXXXII[c]) min. XXI. Numerum quidem polarem domus undecimae grad. XXII min. X, numerum vero polarem duodecimae domus partes XL min. XXXXIX colligimus; pro 324^{r} data deinde hora per XXII huius M. C. supra terram deprehenditur grad. | IIII aquarii, cuius per eandem ascensio recta reperitur partium CCCVI min. XVI, quibus adiecto interstitio domus decimae, ascensionis obliquae domus XI^{mae} excrescent grad. CCCXXVII[d]) min. nullo. His addito undecimae domus interstitio partes ascensionis obliquae domicilii duodecimi consurgent CCCLIIII min. LVI. Ad eas denique iuncto duodecimae domus interstitio obliquae prodibunt ascensiones horoscopi partium XXXVII[e]) min. XVII, quibus adiecto XII^{mi} rursus domicilii interstitio ascensio coacervabitur obliqua secundi ab

a) Hs. hat *undecima*. b) Hs. hat XXVI. c) Hs. hat XXXXI.
d) Hs. hat CCCXXVI. e) Hs. hat XXXVI min. XVI.

---

57. Proposition.

Konstruktion der 12 Himmelshäuser nach der gewöhnlichen Methode.

Man bestimmt die Länge des gerade aufgehenden Punktes des Tierkreises nach Prop. 23 und seinen halben Tagbogen t nach Prop. 13, ferner die Länge λ_{10} und Rektaszension α_{10} von M. Dann ist $\alpha_{11} = \alpha_{10} + \frac{t}{3}$ R. A. des 11. Hauses,

horoscopo loci grad; LXXVII min. XXXVI, quibus demum aggregato undecimae domus interstitio domus tertiae obliqua conflabitur ascensio grad. CV et min. XXXII.

His ascensionibus obliquis iuxta praemissam doctrinam in arcus zodiaci conversis obtinebimus pro domo undecima partes XVIII aquarii, pro XII[a] grad. XXI piscium, pro ascendente partes IIII et semis geminorum, pro secundo ab horoscopo loco grad. VIII min. XXXX cancri, pro domo tertia grad. XXIII cancri. His itaque compertis reliqua innotescent domicilia; quod est propositum. |

Propositio LVII.

324r

Duodecim caeli domus iuxta veterem vulgatumque morem instituere.

Igitur subiecto temporis momento per XXIII huius punctum zodiaci comperiatur orientale, cuius per XIII huius arcus accipiatur semidiurnus; medium quoque coeli supra terram per XXII innotescat; arcum deinde semidiurnum horoscopantis eclipticae puncti tres in partes scindamus aequas, quarum quaelibet ipsius erit semidiurni tertium, quo cum ascensionibus M. C. rectis addito rectae consurgent ascensiones undecimi ab horoscopo loci. His eodem tertio rursus adiuncto domicilii duodecimi rectae resultent ascensiones, quibus denique hoc ipsum tertium item adiectum horoscopi constituet ascensiones rectas. Posthaec idem arcus semidiurni tertium ex LX gradibus auferamus, et tertia seminocturni pars | eiusdem horoscopi remanebit, qua cum eiusdem horoscopi rectis ascensionibus aggregata tertii ab horoscopo loci rectae non latebunt ascensiones, rectis demum his ascensionibus singulorum domiciliorum pridem inventis in zodiaci portiones[a]) per VI[b]) huius conversis domiciliorum[c]) sex, una cum M. C. pridem reperto initia constabunt, quibus per diametrum oppositi sex alii ex signifero puncti reliqua sex domiciliorum exordia declarabunt.

325r

Velut in regione, cuius latitudo fuerit graduum XXXXIX, si velim perhebo percurrente gradum quintum piscium iuxta hunc veteris aequatoris modum duodecim caeli domus aedificare.

Igitur per XXIII huius aut eius sequentem pro dato tempore comperio in horoscopo partes VII aquarii fere, cuius ex XIII arcus semidiurnus est fere graduum LXVII min. XV, et per XXII M. C. supra terram invenitur fere graduum IIII[d]) sagittarii, cuius ascensio recta est fere partium CCXLII min. VIII;

a) *portiones* hat Hs. zweimal. b) Hs. hat XX.
c) *pridem . . . domiciliorum* hat Hs. zweimal, das zweite Mal gestrichen.
d) Hs. hat *IIII* korr. aus *LX* (?).

$\alpha_{12} = \alpha_{11} + \frac{t}{3}$ des 12. Hauses, $\alpha_1 = \alpha_{12} + \frac{t}{3}$ des Horoskops; $t' = 180^0 - t$ ist der halbe Nachtbogen, also $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{t'}{3}$ die R. A. des 2. Hauses, $\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{t'}{3}$ des 3. Hauses. $\left(\text{Der Verfasser bildet: } \alpha_3 = \alpha_1 + 60^0 - \frac{t'}{3}\right)$. Mit Prop. 6 werden nun diese Rektaszensionen in Längen verwandelt.

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $\lambda_s = 335^0$. Resultate: λ_1 (Horoskop) $= 307^0$, $t = 67^0 15'$, $\lambda_s = 244^0$, $\alpha_s = 242^0 8'$, $\frac{t}{3} = 22^0 25'$, $\alpha_{11} = 264^0 33'$, $\alpha_{12} = 286^0 58'$, $\alpha_1 = 309^0 23'$,

quibus si coacervavero praemissi semidiurni tertium, idest grad. XXII min., 325v XXV | rectae ascensiones undecimae domus excrescent partium CCLXIIII min. XXXIII. His eodem quoque tertio coniuncto rectae ascensiones XII^mae domus exibunt grad. CCLXXXVI min. LVIII; quibus hoc eodem tertio rursus aggregato partes emergunt CCCIX min. XXIII[e]), rectae scilicet ascensiones horoscopi, dempto nunc hoc tertio ex partibus LX reliquum erit graduum XXXVII minu. XXXV, quos si horoscopi rectis adiecero ascensionibus secundi ab horoscopio loci rectae resultabunt ascensiones partium CCCXLVI min. LVIII, ad quas demum eisdem gradibus XXXVII cum min. XXXV additis et ex aggregato integrum exsuperante circulum gradibus CCCLX sublatis relinquentur partes XXIIII min. XXXIII, rectae scilicet ascensiones tertii ab horoscopo loci. Hoc praesertim ac generaliter admonendum est, quotiens aggregatum aliquod partes CCCLX, idest integram circuli peripheriam, superaverit; ex eodem aggregato his eisdem CCCLX partibus ablatis reliquum erit intentum, et econtra, si ex arcu proposito arcum quendam aliam subtrahere iussi nequeamus, arcui dato circulus accommodandus est.

Eisdem demum ascensionibus rectis in signiferi arcus per VI huius com- 326r mutatis | invenio cuspidem domus undecimae partium XXV sagittarii, domus duodecimae initium grad. XV min. XXXX capricorni, horoscopium partes VII aquarii, cuspidem secundi ab horoscopo loci grad. XV min. XXXXV piscium, initium postremo tertii ab horoscopo loci grad. XXVI mi. XXVII arietis. His cognitis et reliqua domicilia non ignorabuntur; quod est propositum.

Propositio LVIII.

Vero sideris alicuius loco atque eius latitudine cognita declinationem ipsius ab aequatore, nec non et eclipticae gradum, quo subiectum sidus caelum mediat, invenire.

326v Stellae in alterutro solstitiorum puncto collocatae latitu|dinem cum maxima solis declinatione congregabimus, si eiusdem fuerit denominationis seu partis, aut alteram ex altera subtrahemus, si in diversas vergant partes; et residuum sui totius denominationem sortitum erit quaesita declinatio.

Sed sidere locato in capite arietis aut librae secundus fiat introitus cum complemento maximae declinationis solis atque cum latitudine data; arcus enim sic elicitus declinationem praebebit eiusdem partis, cuius est latitudo.

Sed alibi sedem habente sidere, igitur distantia sideris ab alterutro aequinoctialium punctorum, utri vicinius ipsum accesserit, supra basim computata cum subiecta latitudine iuxta tertium introitum meteoroscopio committatur, et arcus elicitus primum vocetur inventum, sicque manente regula per introitum

e) Hs. hat III.

$\alpha_2 = 346^0\,58'$, $\alpha_3 = 24^0\,33'$; $\lambda_{11} = 265^0$, $\lambda_{12} = 285^0\,45'$, $\lambda_1 = 307^0$, $\lambda_2 = 345^0\,45'$, $\lambda_3 = 26^0\,17'$.

58. Proposition.

1. Bestimmung der Deklination δ eines Sternes aus seiner Länge λ und Breite β (Fig. 42).

quartum alius extrahatur arcus, qui secundum esto inventum, quod eandem semper cum subiecta latitudine sortitur denominationem, ut si latitudo fuerit borealis appellata, secundum inventum quoque boreale dicendum est, illa vero meridionalem seu austrinam habente nuncupationem eandem etiam secundum inventum[a]) suscipit | austrinae seu meridionalis plagae appellationem; ergo 327r secundum inventum cum nomine suo diligentur observandum est; quod si locus ipsius sideris in semicirculo signiferi constituatur eiusdem nominis, quod secundum inventum pridem servatum sortiebatur, ipsum cum maxima solis declinatione coacervatum constituet quaerendae declinationis argumentum, eiusdem quoque nominis seu appellationis aut borealis aut meridionalis, quam ipsa possidet latitudo vel inventum secundum. Sin autem semicirculus signiferi, verum stellae seu dati sideris locum continens appellationem habuerit diversam a denominatione ipsius inventi secundi, hoc est, si stellae locus borealem signiferi teneat, inventum secundum sit austrinum aut econtra secundo invento boreali constituto semicirculus signiferi stellae datae locum continens sit austrinus, ergo maxima solis declinatio secundo detrahatur invento, vel contra secundum inventum maximae solis declinationi dematur; quodque reliquum est, declinationis argumentum item vocetur sortiens denominationem a suo toto, cuius erat pars seu residuum; invento autem | secundo maximam solis decli- 327v nationem aequante datum sidus ab aequatore declinationem habebit nullam, saltem ipso invento secundo diversae denominationis ab eadem declinatione constituto. Zodiaci autem semicirculum borealem dico eum, qui ex capite arietis inchoans per successum signorum in librae principium finitur. Nam per eum sol discurrens ab aequatore declinationem possidet borealem, alter vero signiferi semicirculus, qui ab librae principio inchoans iuxta signorum seriem in caput arietis terminatur, austrinus appellatur, quod in eo sol demorans austrinam ab aequatore recipit declinationem, quapropter maxima solis declinatio suam sortitur denominationem a semicirculo zodiaci verum stellae locum continente. Ad postremum ergo praemisso declinationis argumento atque invento primo per introitum secundum diu investigatam obtinebimus declinationem eiusdem partis seu denominationis, cuius fuerat declinationis argumentum.

At eodem argumento quadrantem aequante inventum pri|mum desideratum exhibebit declinationem. Quod si maius quadrante argumentum idem 328r fuerit, ipsum semicirculo detrahatur, reliquo perinde ac declinationis argumento utamur. Idem quoque reliquum eandem servabit denominationem cum suo aggregato, quod pridem semicirculo detrahebatur. At sidus nullam possidens latitudinem ab ecliptica sortitur declinationem, quam verus habet ipsius locus.

---

a) Nach *inventum* hat die Hs. die Worte *quoque boreale dicendum est* gestrichen.

Spezialfälle: 1. $\lambda = 90^0$; $\delta = \beta - \varepsilon$.
2. $\lambda = 0^0$, $\sin\delta = \cos\varepsilon \cdot \sin\beta$.

Allgemeiner Fall: Man bildet: $\cos I = \cos\lambda \cdot \cos\beta$ (Aufg. 3. $I = V\Sigma$ im $\triangle\ V\Sigma D$), und $\operatorname{tg} II = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\lambda}$ (Aufg. 4, $II = \sphericalangle\ \Sigma V D$ im $\triangle\ \Sigma V D$). Dann ist das „argumentum declinationis" $A_D = MN = \varepsilon \pm II$, je nachdem β po-

Haec demum tali declarantur exemplo.

Velut dato sidere, cuius verus in signifero locus sit gradus XV tauri; latitudo vero borealis graduum XXVI min. XX, et propositum esto declinationem dati sideris ab aequatore computare. Igitur ingrediens ad organum cum distantia subiecti sideris ab initio arietis, quod est punctus aequalitatis vernalis, grad. XXXXV supra basim numerata atque cum ipsa declinatione graduum XXVI per tertium introitum elicio gradus L min. L fere pro invento primo; itaque manente regula iuxta introitum quartum denuo redeunti mihi gradus offeruntur XXXV, secundum videlicet inventum borealis denominationis; 328v nam | et data latitudo borealis fuerat. Cum autem signeferi semicirculus stellam ipsam collocans sit quoque borealis, igitur maximam solis declinationem addens secundo invento etiam borealis cognomenti constituo declinationis argumentum partium LXVIII min. XXX seu semis fere, cum quibus deinde atque cum invento primo grad. L min. L per introitum secundum quaesitam deprehendo declinationem partium XLI min. XX, cuius pars borealis habetur. Nam et eius argumentum boreale constituebatur.

Aliter etiam deprehendemus ip[s]am declinationem per solos aequedistantes. Meteoroscopium enim ingredientes cum datae latitudinis complemento atque cum distantia sideris ab altero punctorum solstitialium, utri eorum locus sideralis accesserit vicinius, per secundum introitum elicimus arcum, cuius complementum esto inventum primum, cum quo deinde atque cum ipsa latitudine sideris iuxta introitum primum aut quintum organo reincidentes secun- 329r dum accipimus | inventum, quod, ut ante traditum est, latitudinis habet appellationem vel borealem vel austrinam, quod quidem secundum inventum maximae solis declinationi iungamus aut detrahamus vel ex eodem invento secundo ipsam maximam solis declinationem auferamus.

Velut praecedens admonuit praeceptio, ut scilicet declinationis argumentum eluceat, quod demum argumentum cum invento primo iuxta secundum

---

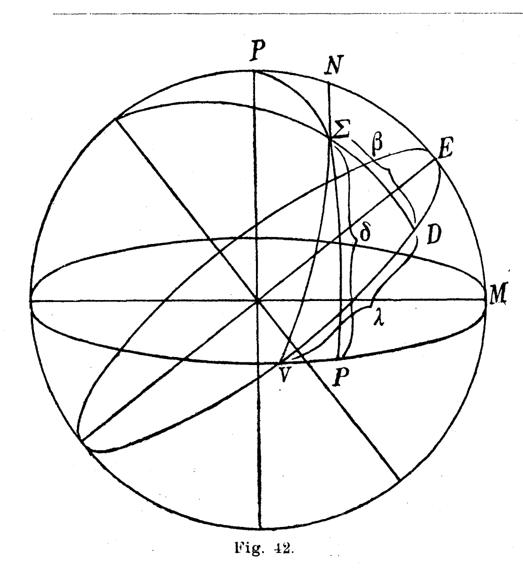


Fig. 42.

sitiv oder negativ ist, und $\sin\delta = \sin A_D \cdot \sin I$ (Aufg. 2, $\delta = \Sigma P$ im $\triangle\ \Sigma VP$).

Ist $II = \varepsilon$, so ist die Deklination $\delta = 0$; ist $A_D = 90$, so ist $\delta = I$, ist $A > 90^0$, so rechnet man mit $180^0 - A_D$.

Beispiel: $\lambda = 45^0$, $\beta = 26^0 20$. Resultat: $I = 50^0 50'$, $II = 35^0$, $A_D = 68^0 30'$, $\delta = 41^0 20'$.

Lösung per aequedistantes. Man bildet: $\cos I = \cos\beta \cos\lambda$, wie oben, dann $\sin II = \frac{\sin\beta}{\sin I}$ $\left(\sin II = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1 - \cos^2\beta \cos^2\lambda}}\right.$ oder $\left.\operatorname{tg} II = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\lambda}\text{ wie oben}\right)$.

introitum optatam praebebit declinationem eiusdem partis aut borealis aut austrinae, cuius argumentum declinationis habebatur.

Velut oblato sideris eiusdem vero loco, in grad. XV tauri cum boreali latitudine partium XXVI intentum esto ipsius ab aequatore declinationem hac investigare via. Igitur cum distantia veri loci ab puncto solstitii aestivalis, cum ipsum sidus astat propius, grad. XXXXV atque cum complemento latitudinis graduum LXIII min. XXXX[a]) introitu secundo partes extraho XXXIX min. fere X, quorum complementum graduum L min. L | primum est inventum, 329ᵛ quod deinde cum ipsa latitudine grad. XXVI per introitum primum aut quintum rursus inducens secundum invenio inventum partium XXXV fere, quod eius partis seu denominationis est borealis.

Velut subiecta constituebatur latitudo, atque propositus sideris locus septentrionalem seu borealem signiferi possidet semicirculum, igitur secundum inventum addens maximae solis declinationi constituo declinationis argumentum partium LVIII et semis, quod demum cum invento primo per secundum item introitum inductum desideratam exhibebit declinationem borealem quoque partium XLI et min. XX fere; quod est intentum. Itaque prior huius propositi pars liquet.

Secunda vero propositionis huius pars.

De gradu videlicet zodiaci reperiendo, quo datum sidus medium obtinet caeli, innotescet facto introitu vel primo vel quinto cum complemento declinationis inventae, atque | cum primi complemento inventi et arcus tracti com- 330ʳ plementum rectae vocetur ascensionis argumentum, quod quidem recta est ascensio eius arcus eclipticae, qui puncto caeli meditationis atque proximo aequinoctii puncto comprehenditur. Hoc autem rectae ascensionis argumentum sem-

a) Hs. hat LXIIII.

Beispiel: $\lambda = 45^0$, $\beta = 26^0\,20'$. Resultat: $I = 50^0\,50'$, $II = 35^0$; $A = 68^0\,30'$, $\delta = 41^0\,20'$.

2. Bestimmung der Länge des gleichzeitig mit einem gegebenen Stern kulminierenden Tierkreispunktes (Fig. 43).

Man bildet $\frac{\cos I}{\cos \delta} = \cos A_a$; ($I = \Sigma V$, $\delta_1 = \Sigma A$, $A = VA$); A heißt argumentum rectae ascensionis. = Rektaszension von M (in Fig. 43).

Wenn $A = 90^0$ ist, so ist M entweder der Widder oder die Wage, da dann $\delta = \pm \varepsilon$ ist.

Ist $\lambda = 0$, so bildet man (Fig. 44) $\frac{\cos \beta}{\cos \delta} = \cos A$ ($A = VA$ im $\triangle \Sigma A V$).

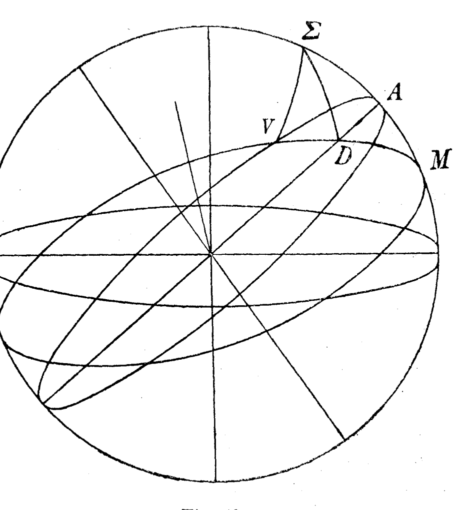


Fig. 43.

per habetur in eadem caeli quarta cum vero stellae loco, quando declinationis argumentum per superiora repertum quadrante fuerit inferius.

Quod si declinationis argumento[a]) quadrans aequetur, atque verus sideris locus eclipticae possideat ascendentem semicirculum, caput arietis erit pro dato sidere caeli mediatio. Sin autem idem sideris locus declinationis argumento quadrantem aequante descendentem signiferi tenuerit semicirculum, librae initium praebebit dato sideri caeli mediationem.

At declinationis argumento quadrantem superante inventus rectae ascensionis arcus, hoc est rectae ascensionis argumentum verus sideris locus eundem quidem possidebunt eclipticae semicirculum, sed rectae | ascensionis argumentum in alium caeli migrabit quadrantem. Ubi demum verus dati sideris locus caput arietis aut librae possiderit, ascensionis rectae argumentum venabimur introitu vel primo vel quinto cum datae latitudinis complemento atque cum complemento declinationis inventae. Nam ipsius arcus hoc pacto deprehensi complementum iterum erit rectae ascensionis argumentum, quod cum declinatione aut latitudine boreali monstrabit a puncto aequinoctiorum altero, qui obiecto sideri locum praebebat, punctum caeli mediationis in austrina reperiri signiferi medietate, cum declinatione autem vel latitudine meridionali in boreali signiferi semicirculo. Et, ut praeceptio haec latius intelligatur, dico, quod declinationis argumento grad. LXXXX minore, quando locus sideris verus vernam zodiaci possiderit quartam, argumentum ascensionis rectae iam ascensio erit recta, eius zodiaci arcus ab initio signorum in punctum caeli medi|ationis numerati, et si idem stellae locus aestivam tenuerit zodiaci quartam, rectae ascensionis argumentum semicirculo demendum est, et remanebit eadem ascensio recta, sed sidere in autumnali eclipticae quarta constituto rectae ascensionis argumentum semicirculo iungimus, ut talis recta resultet ascensio. In hiemali demum zodiaci quarta idem argumentum integrae circuli peripheriae, idest grad. CCCLX, dementes rectam elicimus ascensionem, qua demum per VI huius in zodiaci arcum conversa punctum caeli mediationis investigatum non delitescet. At declinationis argumento quadrantem aequante signorum principium tribuet punctum caeli mediationis, si locus sideris ascendentem zodiaci semicirculum occupaverit, aut librae principium, si descendens signiferi tenuerit dimidium. Sin autem eodem declinationis argumento quadrantem exsuperante verum sideri.

Postremo, si tale declinationis argumentum quadrantem superaverit loco sideris ascendentem signiferi medietatem possidente, rectae ascensionis argumentum grad. CCCLX desideratam relinquet ascensionem rectam constituta scilicet sideris boreali latitudine, vel idem rectae ascensionis argu|mentum recta erit ascensio dati sideris seu caeli mediationis, si latitudo stellae fuerit austrina.

330v 331r 331v

a) Hs. hat *complemento*.

Es werden zur Bestimmung der R. A. α selbst aus ihrem Argument A folgende Fälle unterschieden: 1. Ist $A < 90^0$ d. h. der Stern Σ im Frühlingsquadranten des Tierkreises, dann ist $\alpha = A$. 2. Σ im Sommerquadranten, $\alpha = 180^0 - A$. 3. Σ im Herbstquadr., $\alpha = 180^0 + A$. 4. Σ im Winterquadr., $\alpha = 360^0 - A$. Die Rektasz. α wird zum Schluß nach Prop. 6 in die entspr. Länge verwandelt.

Ist $A = 90^0$ und Σ auf der „steigenden" Hälfte des Tierkreises, so ist

sedem descendens eclipticae semicirculus exhibuerit, ipso rectae ascensionis argumento grad. CLXXX coniecto recta caeli mediationis ascensio prodibit subiecta latitudine boreali, vel semicirculo detractum austrinam obtinente sidere latitudinem rectae ascensionis residuabit arcum, quo rursus per VI huius in zodiaco caeli mediationis ostendetur punctus loco tandem sideris in capite arietis aut librae reperto. Idem rectae ascensionis argumentum recta erit ascensio, si stellae locus principium fuerit arietis cum austrina latitudine vel declinatione aut idem rectae ascensionis argumentum grad. CCCLX detrahatur stellae loco caput arietis tenente cum boreali vel declinatione vel latitudine. Sin autem librae principium verum sideri locum praebuerit ipsum rectae ascensionis argumentum semicirculo iungamus. Si vel latitudo vel declinatio fuerit borealis, aut ab eodem deman|tur semicirculo, si vel latitudo vel declinatio constituatur austrina, et rectam habebimus ascensionem puncti caeli mediationis, qua quidem ascensione in signiferi arcum per VI huius conversa punctus caelimediationis non ignorabitur. Et hic modus inveniendae rectae ascensionis pro dato sidere tanquam prioris est declaratio.

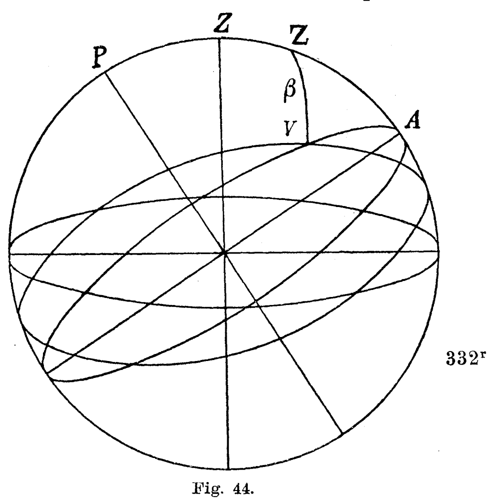


Fig. 44.

332r

Universae autem praeceptiones hoc unico possunt ostendi exemplo.

Detur sidus idem in fine grad. XV tauri constitutum cum latitudine boreali grad. XXVI, et esto propositum zodiaci punctum reperire, quo sidus idem meridianum possideat. Ergo ingressus primo aut quinto introitu cum complemento declinationis per praemissa repertae grad. XXXXI min. XX atque cum complemento inventi primi extraho gradus LVII et semis. His ex quadrante sublatis recta remanet ascensio partium XXXII et semis, quibus per VI huius respondent ex tauri signo grad. IIII min. XXXXV fere; nostra itaque constat intentio. Sed si verus sideris locus alterum ex solstitialibus punctis occupaverit, idem enim verus sideris locus atque punctus caeli mediationis. |

Propositio LIX.

332v

Vero stellae loco atque latitudine declinationem eius ab aequatore alia sciscitari via.

$\alpha = 360^0 - A$, wenn β positiv, $\alpha = A$, wenn β negativ ist. Ist $A > 90^0$ und Σ auf der „fallenden Hälfte", so ist $\alpha = 180^0 + A$, wenn β positiv, und $\alpha = 180^0 - A$, wenn β negativ ist.

Ebenso wird auch der Fall $A = 90^0$ behandelt.

Beispiel: $\lambda_\Sigma = 45^0$, $\beta = 26^0$. Resultat: $\delta = 41^0 20'$, $\alpha = A = 32\frac{1}{2}^0$, $\lambda = 34^0 45'$.

Uno solstitialium punctorum datum sidus locante declinationem eiusdem puncti, hoc est maximam solis declinationem et latitudinem sideris simul acervemus pari denominatione utriusque subiecta, vel maximam solis declinationem ex siderali latitudine demamus aut contra sideris latitudinem ex maxima solis declinatione, utra scilicet minor obtigerit ex maiori. Si hae diversa susceperint cognomenta, namque ipsius astri prodetur ab aequatore declinatio, quasi congregatione fuerimus aucupati, suarum nomen habebit partium. Sin autem 333r ablatione | illam proderimus maioris vel latitudinis vel maximae solis declinationis, cui scilicet residua est, denominationem accipiet.

Ubi autem astri locus altero inciderit aequinoctialium punctorum meteoroscopium ingrediamur introitu secundo cum sideris latitudine atque cum maximae solis declinationis complemento, arcus itaque compertus quaesita erit declinatio, eius quidem declinationis, cuius et ipsa fuerat latitudo. Sed astro in ecliptica praeter haec puncta collocato distantiam eius ab altero punctorum solstitialium, utri scilicet vicinuis accesserit, cum maxima solis declinatione introitu secundo intra organum mittamus. Itaque arcus extractus primum esto inventum. Deinde primo aut quinto introitu per huius inventi primi complementum atque per solaris complementum declinationis maximae quendam extrahentes arcum, quem ex partibus XC demamus, et reliquum erit inventum secundum, boreale quidem, si locus astri semicirculum eclipticae pos- 333v sederit borealem, austrinum vero, si austrinam | ipse signiferi tenuerit medietatem. Hoc ergo secundum inventum et sideris latitudo in unam congregentur summam, si unius extiterit denominationis aut minus de maiori tollamus; si variis appellentur cognomentis; quod itaque vel ablatione vel additione colligimus, haud iniuria declinationis argumentum appellabitur; quod, ubi congregatione constituitur, cognomen cum suis habebit partibus commune. At eo detractione prodito sui totius seu maioris arcus, cui per ablationem relectum est, appellabitur cognomento. Quod quidem argumentum, si quadrante minus extiterit, cum complemento primi inventi per introitum secundum ipsam dati sideris declinationem nobis porriget, cui et eidem declinationis argumento communis erit appellatio.

Nullo autem proveniente declinationis argumento, quod accidit, quando inventum secundum et astri latitudo magnitudine pares fuerint, diversarum 334r sortitae partium cognomenta; quare sidus ita, ut in aequatore | collocatum convincitur. At astro nullam possidenti latitudinem tantae tribuemus declinationis intervallum, quantum eius locus ab aequatore continet recessum.

---

59. Proposition.

Bestimmung der Deklination eines Sternes nach einer anderen Methode (Fig. 45).

Hat der Stern die Länge 90^0 oder 270^0 (Solstitien), so ist $\delta = \pm(\beta + \varepsilon)$, hat er die Länge 0^0 oder 180^0 (Äquinoktien), so ist $\sin\beta \cdot \cos\varepsilon = \sin\delta$ (Aufg. 2).

Hat der Stern eine beliebige Länge λ, so bildet man $\sin I = \cos\lambda \cdot \sin\varepsilon$ (Aufg. 2, $90^0 - I = \measuredangle\, VAE$ im $\Delta\, VAE$), dann $\cos II = \frac{\cos\varepsilon}{\cos I}$ (Aufg. 1, $II = EA$ in $\Delta\, VAE$), und $\beta + II = \Sigma A =$ argumentum declinationis. Dann ist $\sin\delta = \sin \arg \cdot \cos I$ (Aufg. 2, $\delta = \Sigma D$ im $\Delta\, \Sigma DA$).

Deinde secundum inventum multi hac deprehendunt ratione; sideris enim distantiam ab alterutra sectionum aequinoctialium, perinde ac rectam usurpant ascensionem eique portionem signiferi competentem per rectarum ascensionum tabulas exquirunt. Declinationem quoque fini eiusdem arcus eclipticae debitam explorantes eam secundum etiam appellitant inventum, quod arcus est circuli latitudinalis inter aequatorem et signiferum comprehensus omninoque concordat cum secundo invento per praemissam elicito; igitur nihil refert, utra perquiras via secundum inventum, quod non incongrue declinationis radix a plerisque dicitur.

At declinationis argumento quadrantem aequante primi complementum inventi declinationis arcus erit necessario eiusdem partis, cuius habetur declinationis argumentum. | Eodem autem declinationis argumento LXXXX gradus 334ᵛ excedente ipsum ex semicirculo detrahatur atque cum reliquo et cum primi complemento inventi secundum facientes introitum desideratam excipiemus dati sideris declinationem eodem cognomento,[a]) cuius est declinationis argumentum.

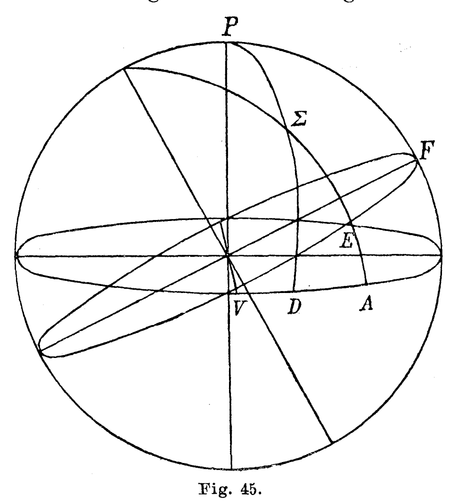


Fig. 45.

Hos duos posteriores modos Joannes de Regiomonte in canonibus primi mobilis siluit. Sed humanam considerantes imbecillitatem, homini veniam facile concedemus. Non enim omnia possumus omnes, atque prius inventis facile quisque superaddit.

Nunc praecepta haec exemplariter ostendere tentemus. Esto sidus aliquod in capite arietis cum latitudine boreali grad. VI, cuius declinationem invenire cupiens ingredior per introitum secundum[b]) cum data latitudine graduum VI atque cum maximae solis complemento declinationis et accipio huius declinationem sideris borealem quoque grad. V et semis.

Aliud esto sidus in gradibus XV tauri, cum lati|tudine aquilonari partium 335ʳ

a) Hs. hat *cogmento.* b) Hs. hat *quartum.*

Ist arg $= 0$, so liegt der Stern im Äquator. II kann auch folgendermaßen gefunden werden: Man betrachtet den Abstand des Sternes von einem der Äquinoktialpunkte wie eine Rektaszension und sucht die zugehörige Länge, d. h. man betrachtet EV als RA. α' und sucht $VA = \lambda'$; dann bestimmt man die diesen Größen entsprechende Deklination δ', die identisch mit II ist und auch als radix declinationis bezeichnet wird.

Ist arg $= 90^0$, so ist $\sin\delta = \cos I$, d. h. $\delta = 90^0 - I$.

Ist arg $> 90^0$, so rechnet man mit $180^0 -$ arg.

Beispiele: 1. $\lambda = 0^0$, $\beta = 6^0$; Resultat: $\delta = 5\frac{1}{2}^0$.

2. $\lambda = 45^0$, $\beta = 7^0$; Resultate: $I = 16^0 20'$, $II = 17\frac{1}{2}^0$, arg $= 24\frac{1}{2}^0$, $\delta = 23^0 40'$.

septem. Eius itaque declinationem quaerens exerceo secundum introitum cum distantia subiectae sideris a capite cancri, cui propius astat, et cum maxima solis declinatione grad. XXIII et semis et primum comperio inventum partium XVI et min. XX fere, quarum[a]) complementum graduum LXXIII min. XXXX cum maximae declinationis complemento solaris per primum aut quintum introitum inducenti mihi partes offeruntur LXXII et semis fere; quibus ex quadrante sublatis inventum remanet secundum grad. XVII[b]) et semis, borealis quidem cognomenti, quoniam astri locus septentrionalem signiferi possidet semicirculum, hinc invento secundo latitudinem astri partium VII etiam borealem adiciens constituo declinationis argumentum grad. XXIIII et semis fere, etiam borealis cognomenti, quod postremo argumentum et primi complementum inventi per secundum introducens introitum intentam deprehendo declinationem 335v grad. XXIII et min. XXXX | fere, borealis quoque appellationis, velut ipsius est declinationis argumentum.

Denique pro variis eius inveniendi modis singulas subicere formulas exemplares consulto neglexi; arbitrabar enim sermonis compendio lectorem gaudere plurimum ingeniique eius acrimoniam supervacaneo verbositatis tumultu vehementer obtundi.

Denique exemplo uno doctrinas praemissas satis superque declarari posse; eo namque officiosus lector manuductus innumeras poterit exemplares subiectiones absque ullo negotio vel curiose fingere vel oblatas expeditius enodare.

Propositio LX.

Signiferi punctum, quo sidus propositum in caeli medio seu 336r meridiano quo|libet collocatur, perdiscere.

Dato sideri unum ex solstitialibus possidenti punctis idem quoque punctum pro caeli mediatione concedatur. Sed astro aliunde verum habente locum

a) Hs hat *quartum*. b) Hs. hat *XVI*.

60. Proposition.

Bestimmung des Tierkreiszeichens, das gleichzeitig mit einem gegebenen Stern kulminiert (Fig. 46).

Steht der Stern in einem der Solstitialpunkte, so kulminiert dieser selbst gleichzeitig mit dem Stern.

Hat der Stern eine beliebige Stellung, so betrachtet man seine Länge als Rektaszension und bestimmt die zugehörige Länge r nach Prop. 6; sie heißt radix rectae ascensionis ($r = VA'$), dann bildet man $\frac{\cos \arg}{\cos \delta} = \cos x$ ($x = AA'$, $\delta = \Sigma A'$, $\arg = \Sigma A$) und $\alpha_s = r \pm x = VA' \pm AA'$. Endlich sucht man nach Prop. 6 die zu α_s gehörige Länge λ_s.

Ist $\arg = 90^0$, so ist auch $x = 90^0$, ist $\arg > 90^0$, so bildet man $\frac{\sin(\arg - 90^0)}{\cos \delta} = \sin(90^0 + x)$ und $\alpha_s = (90^0 + x) \pm r$.

Ist $\lambda = 0^0$ oder $= 180^0$, so bildet man $\frac{\cos \beta}{\cos \delta} = \cos x$, und es ist $\alpha_s = 180^0 \pm x$.

in ecliptica, igitur signiferi portionem inter verum eius locum atque arietis initium comprehensam perinde atque rectam existimemus ascensionem arcumque zodiaci huic congruentem ascensioni per VI huius addiscamus, quem nonnulli radicem rectae appellant ascensionis, qui pridem arcus seorsum est servandus.

Deinde cum dati sideris (in) complemento declinationis per praecedentem inventae atque cum complemento argumenti declinationis ex praemissa quoque comperti, si hoc ipsum argumentum quadrante minus extiterit, primus aut quintus fiat introitus, arcuque comperto de LXXXX gradibus ablato reliquum a plurimis nuncupatur arcus transitus stellae per caeli medium, quem iungamus rectae ascensionis radici pridem servatae | sidereo loco semicirculum signiferi descendentem possidente cum declinatione boreali vel eodem sideris loco ascendentem tenente zodiaci semicirculum cum declinatione meridiana. Sin autem astri locus semicirculum eclipticae descendentem occupet, cum declinatione meridiana, vel ascendentem, cum declinatione boreali, tollamus eundem arcum seu differentiam transitus stellae per caeli medium ex servata rectae ascensionis radice, et proveniet nobis recta dati sideris ascensio. Qua denique per sextam huius in arcum signiferi conversa[a]) intentum nos penitus non latebit. 336ᵛ

Et si, quando ex ipsa congregatione plures quam CCCLX gra. excreverint, ipsis ex tali congregationis summa sublatis quaesita remanebit ascensio recta.

At si differentia transitus per caeli medium de rectae ascensionis radice tolli nequeat, eidem radici rectae ascensionis integrum accomodabimus circulum, idest grad. CCCLX; deinde huic aggregato | fiat imperata subtractio, quodque relinquetur ascensio sit recta, quam quaerebamus. Verum declinationis argumento grad. LXXXX constituto differentia transitus stellae per caeli medium quadrans quoque probabitur. Sin autem idem argumentum LXXXX gradus exsuperaverit, ei quadrantem dementes reliquum atque sidereae declinationis complementum primo vel quinto introitu inferamus arcuque comperto LXXXX gradibus adiecto desiderata constituetur differentia transitus stellae 337ʳ

a) Hs. hat *conversa* korr. aus *conversam*.

Ist endlich $\beta = 0$, so ist die Länge des Sternes gleich der Länge des mit ihm kulminierenden Punktes des Tierkreises.

Beispiel: $\lambda = 42^0$, $\beta = 11^0$. Resultate $r = 44^0\,30'$, $\arg = 27^0\,5'$, $\delta = 25^0\,45'$, $x = 8\frac{1}{2}^0$, $\alpha_s = 35^0$, $\lambda_s = 37^0\,30'$.

Lösung der Aufgabe nach Regiomontanus.

Man bildet zunächst r, dann I, wie in Prop. 59. ($\sphericalangle\, VAE = 90^0 - I$), ferner $\sin II' = \dfrac{\sin I}{\cos\delta}$ ($II' = \sphericalangle\, A\Sigma A'$ im $\triangle\, A\Sigma A'$) und $\sin x = \sin II' \sin \arg$. Dann wie oben.

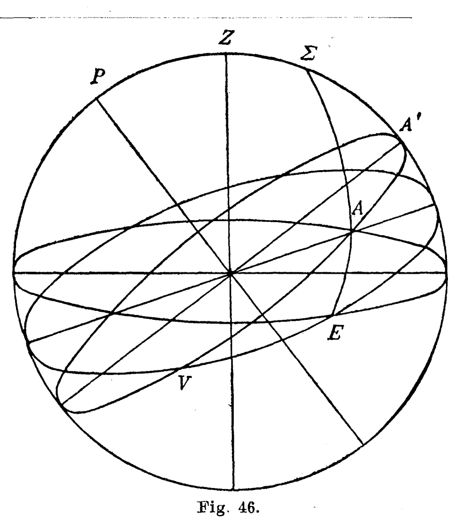


Fig. 46.

per caeli medium; qua rectae ascensionis radici detracta vel addita, velut praecedens admonet praeceptio, dati sideris ascensio prodibit recta. Sed astro verum tenente locum in librae vel arietis capite illam sectabimur doctrinam, quae in antepraemissa traditur; intrando scilicet primo vel quinto introitu cum sidereae latitudinis complemento atque cum eiusdem sideris complemento declinationis inventusque arcus ex quadrante demptus differentiam huiuscemodi transitus stellae per caeli medium residuabit, quam aufer ex grad. CCCLX
337ᵛ sidere caput arietis obtinente | cum declinatione boreali, vel sidere declinationis borealis initium librae possidente eandem differentiam semicirculo adde. Nam tunc stella principium arietis obtinente integer circulus, idest partes CCCLX, erunt tanquam rectae ascensionis radix. Astro autem libra[e] initium occupante semicirculus pro tali radice sumendus est. Qua de re quamlibet austrum sortiatur declinationem, cuiusvis etiam denominationis iam traditam sectantes doctrinam ad rectam dati sideris deducemur ascensionem. Ad postremum sidere nullam usurpante latitudinem tantum eius rectam reperiemus ascensionem, quantam verus eius locus sortitur, idemque signiferi punctus verum stellae locum atque caeli mediationem praebebit.

Pro dictorum uberiore declaratione hoc proponatur exemplum. Sit aliquod sidus, cuius verus locus duodecimo tauri gradu teneatur cum latitudine boreali partium XI, et propositum esto eiusdem sideris in ecliptica punctum
338ʳ reperi|re, cum quo ipsum cuilibet insideat meridiano; fingens igitur recessum loci sideralis ab arietis initio grad. XXXXII tanquam rectam ascensionem per sextam huius arcum zodiaci eidem correspondentem accipio partium XLIIII min. XXX, quae sunt radix ascensionis rectae pro sidere dato et ex praemissae doctrina declinationis argumentum constat gradibus XXVII min. V, et per eandem ipsa declinatio borealis partibus XXV min. XXXXV, quarum complemento grad. LXIIII min. XV atque argumenti declinationis complemento partium XLII min. LV per introitum primum aut quintum comperio grad. LXXXI et semis, quorum complementum grad. VIII et semis prodit differentiam transitus stellae per caeli medium.

Haec autem differentia radici rectae ascensionis oblata, nam declinatio est borealis, recta dati sideris ascensio remanet grad. XXXV, quibus ex signi-
338ᵛ fero praebentur grad. VII min. XXX tauri; quod est intentum. |

At iuxta doctrinam Johannis de Regiomonte huiusmodi differentia transitus stellae per caeli medium prolixiori constabit indagine, quae triplici habebitur introitu, mirumque in modum miror, cur praecedenti super canonibus primi mobilis compendio non fuerit usus, certae inscitiae non imputabimus, cum illud ob sui facilitatem tantum virum latere non potuit, sed suae doctrinae praecepta propter pulchritudinem, quamvis difficiliora, huius compendii praetulit levitati.

At autem eandem differentiam secundum illius veneremur mentem; inprimis iuxta priorem institutionem radix ascensionis rectae propositi sideris innotescat. Deinde, velut in praecedenti, primum constet inventum ingrediendo meteoroscopium secundo introitu cum maxima solis declinatione atque cum distantia sideris ab altero punctorum solstitialium, utri sideris locus accesserit

---

Die verschiedenen möglichen Spezialfälle werden analog wie in Prop. 59 behandelt.

propius. Hoc deinde primum inventum cum complemento siderae declinationis primo vel quinto introitu secundum proferat inventum, quod demum cum declinationis argumento differentiam transitus stellae per caeli medium secundo producet introitu. |

Qua quidem differentiae iuxta praemissam utendum est rationem, ut recta sideris emergat ascensio. Sed loco sideris alterum occupante punctorum aequinoctialium maxima solis declinatio pro primo sumatur invento. Sideris vero latitudo, quacunque constiterit denominatione, pro argumento declinationis accipiatur, ac deinceps erit procedendum iuxta praemissam praeceptionem; sideris autem umbilico signiferum occupante idem zodiaci punctus pro vero sideris loco atque pro caeli mediatione sumendus est. Argumento praeterea declinationis quartam circuli partem exsuperante ipsum ex semicirculo detrahatur, reliquum et sideris declinatio per primum aut quintum introitum producet arcum, cuius complemento atque complemento declinationis per primum aut quintum rursus introitum arcus exibit, qui et illud residuum argumenti declinationis de semicirculo per secundum introitum nobis arcum porrigent, quem ex semicirculo tollentes relinquimus differentiam transitus stellae per caeli medium, qua secundum traditam utentes admonitionem rectam sideris ascensionem non ignorabimus. |

339r

339v

Tali demum ascensione recta in signiferi arcum per sextam huius committata punctus caeli mediationis quoque perspicuum erit. At si declinationis argumentum quadrans constituatur, differentia transitus stellae per caeli medium quadranti quoque par erit.

Sit igitur exempli causa sidus aliquod secundum verum eius locum in grad. XI tauri cum declinatione boreali graduum XII, de qua propositum esto inprimis invenire rectam eius ascensionem et consequenter eclipticae punctum, quo idem sidus meridiano insidet, primum ergo per antecedentes propositiones invenio declinationem septemtrionalem partium XXVI min. L, declinationis autem argumentum grad. XXVII min. L et per doctrinam praesentis propositionis radicem ascensionis rectae grad. XXXXIII min. XXX fere.

Posthaec cum maxima solis declinatione grad. XXIII. min. XXX atque cum distantia loci sideralis a capite cancri, cui vicinius habetur, per introitum secundum ingressus primum reperio inventum graduum XV min. X, cum quibus atque cum declinationis complemento partium LVIII min. X per | primum aut quintum introitum radicis extraho secundum inventum grad. XVII min. XV, quos cum declinationis argumento partium XXVII min. L secundo inducens introitu per M. C. transitus accipio differentiam graduum VII min. XXXX fere, quibus ab ascensionis radice sublata sideris dati rectae relinquitur ascensio partium XXXV min. L. His ex signifero per sextam huius competunt gradus VIII et min. XV fere de signo tauri; quod est intentio nostra. Sic enim punctum eclipticae, quo subiectum sidus meridiano adhaeret, perspicuum est. Quicquid autem agendum erit pro inveniendis siderum et declinationibus et caeli mediationibus[a]), item quoque accommodare poterimus qui-

340r

a) Hs. hat *meditatonibus*.

Beispiel: $\lambda = 41^0$, $\beta = 7^0$. Resultat: $\delta = 26^0 50'$, arg $= 27^0 50$ $r = 48^0 30'$, $I = 15^0 10'$, $II = 17^0 15'$, $x = 7^0 40'$, $\alpha_s = 35^0 50'$, $\lambda_s = 38^0 15'$.

buslibet caeli punctis, praesertim dum vera illorum loca latitudinesque nos non lateant.

Propositio LXI.

Data caelestis alicuius puncti declinatione cum eclipticae 340v puncto, quo | ipsum in caeli medio haeret, verum eiusdem locum atque ab ecliptica latitudinem reperire.

Punctorum altero solstitialium dato caelesti puncto seu sideri locum caeli mediationis praebente, si declinatio sideris et declinatio caeli mediationis eandem habuerit denominationem, maior ex minore dematur; reliquum erit latitudo quaesita eiusdem denominationis seu partis, cuius erat declinatio dati sideris, si eadem declinatio sideralis maior fuerat. Sin autem idem residuum fuerit maximae solis declinationis et locus caeli mediationis sit caput cancri, iam reperta latitudo erit austrina, principio autem capricorni dato sideri locum caeli mediationis praebente huiusmodi residuum maximae declinationis solis erit latitudo quaesita, borealis quidem denominationis. At eisdem declinationibus, sideris scilicet et loci caeli mediationis, hoc est alterius punctorum sol- 341r stitialium | diversas habentibus denominationes, altera declinatio alteri iungatur; aggregatum latitudo erit quaesita sortiens eam denominationem, quam habebat sideralis declinatio.

Sed si alter punctorum aequinoctialium sideri seu caelesti puncto proposito locum caeli mediationis exhibeat, secundus fiat introitus cum complemento maximae declinationis solis atque cum data sideris declinatione, inventus itaque arcus erit latitudo, quam desiderabamus eiusdem partis seu denominationis, cuius fuerat declinatio ipsa sideralis.

Alibi in ecliptica loco caeli mediationis constituto id in primis est notandum, quod eodem caeli mediationis loco septemtrionalem signiferi semicirculum occupante maxima solis declinatio borealem obtinebit denominationem. Sed caeli mediatione austrinum signiferi semicirculum possidente solis eidem maximae declinationi cognomentum tribuatur austrinum; hoc praemisso intentum sic habebimus.

---

61. Proposition.

Bestimmung der Länge und Breite eines Sternes aus seiner Deklination und der Länge des mit ihm gleichzeitig kulminierenden Tierkreiszeichens (Fig. 47).

Kulminiert einer der beiden Solstitialpunkte, so ist $\beta = \pm (\delta \pm \delta_\Sigma)$.

Kulminiert einer der beiden Äquinoktialpunkte, so bildet man $\sin\beta = \cos\varepsilon \cdot \sin\delta$ (Aufg. 2, es ist im $\triangle PP'\Sigma$, $PP' \perp P\Sigma$, $PP' = \varepsilon$, $P\Sigma = 90^0 - \delta$ und $P'\ \Sigma = 90^0 - \beta$).

Für einen beliebigen Punkt sucht man zunächst die Rektaszension α_M von M ($\bumpeq A = 180^0 - \alpha$ in der Fig. 47) und bildet $\cos\delta \cdot \cos\alpha_M = \sin I$ (Aufg. 2, $\bumpeq \Sigma = 90^0 - I$ im $\triangle A\Sigma \bumpeq$), ferner $\sin II = \frac{\sin\delta}{\cos I}$ (Aufg. 1, $II = \sphericalangle\ \Sigma \bumpeq A$ im $\triangle\ \Sigma \bumpeq A$), dann ist das argumentum latitudinis $= II \pm \varepsilon = \sphericalangle\ \Sigma \bumpeq B$; endlich bildet man $\sin \arg \cdot \cos I = \sin\beta$ (Aufg. 2, $\beta = \Sigma B$ im $\triangle\ \Sigma B \bumpeq$).

Primum videlicet per introitum | secundum ingrediendo cum complemento declinationis atque cum ascensione recta eius arcus zodiaci, qui dato caeli mediationis puncto atque proximo solstitiali puncto clauditur, arcusque sic elicitus primum erit inventum, cuius deinde complementum et ipsa declinatio sideris per primum aut quintum introitum prodet inventum secundum, quod scilicet inventum secundum ad maximam solis conferatur declinationem, quibus eodem[a]) cognomento repertus alterum minus ex altero dematur maiori. Quod si residuum fuerit sideralis declinationis, cum ea parem sortiatur denominationem. Sin autem hoc ipsum residuum ex maxima solis declinatione relinquitur, cognomentum acquiret maximae solis declinationi contrarium. Secundo vero invento denominationis constituto alterius a maximae solis declinationis cognomentum, alterum alteri est aggregandum, quicquid ergo vel detractione vel aggregatione colligimus, latitudinis vocetur argumentum; id tamen oblivioni | non committamus; idem scilicet argumentum, si colligatur additione sortiri eam denominationem, quam sideralis obtinet declinatio. Quod quidem[b]) argumentum, si quadrante minus existat, cum complemento inventi primi meteoroscopio inducentes secundo introitu diu petitam extrahemus latitudinem eiusdem partis, cuius est argumentum. Sin autem hoc latitudinis argumentum quadranti par fuerit, complementum inventi primi desiderata erit latitudo eius dem quoque partis, cuius est argumentum; ipso denique latitudinis argumento constituto maiore, quam sit quadrans, ipsum semicirculo detrahatur, reliquum cum complemento inventi primi per introitum secundum producet nobis quaesitam latitudinem eiusdem partis seu denominationis, quam latitudinis habet augmentum. Quod si nullum latitudinis habeatur argumentum, quod evenit subtrahendo inventum secundum paris quantitatis | ex maxima solis declinatione, tunc datus caeli punctus seu datum sidus in ecliptica reperitur et nullam obtinet latitudinem. Prolixum esset admodum pro varia latitudinarii argumenti procreatione, pro eius quoque diversa quantitate, singula contexere exempla. Sed satis superque duco, si unico demonstrem exemplo, quae pro multis ante verbis praeceperam.

341v 342r 342v

a) Hs. hat *eadem*. b) Nach *quidem* hat Hs. *declinatio* gestrichen.

Die verschiedenen Fälle der Vorzeichen werden wie früher behandelt; ist arg $= 90^0$, so ist $\beta = 90^0 - I$, ist arg $= 0^0$, so ist auch $\beta = 0$.

Beispiel: $\lambda_\varepsilon = 35^0 15'$, $\delta = 27^0 20'$. Resultate: $90^0 - \alpha_\varepsilon = 57^0$, $I = 48^0$, $II = 43^0 30'$, arg $= 20^0$, $\beta = 13^0 10'$.

Die Länge des Sternes findet man dann aus $\sin\lambda = \frac{\sin I}{\cos\beta}$ (Aufg. 1, $90^0 - \lambda = ♎ B$ im $\triangle ♎ \Sigma B$); auch hier werden die Fälle je nach den Quadranten unterschieden.

Beispiel: $\beta = 13^0 10'$. Resultat: $\lambda = 40^0$.

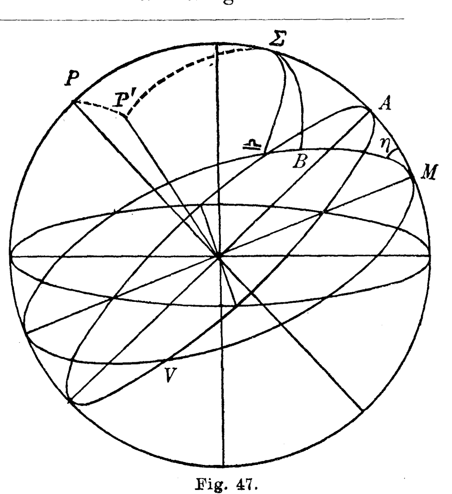


Fig. 47.

Igitur esto sidus, quod meridianum possideat cum grad. V min. XV tauri; borealis autem declinatio eiusdem sideris sit grad. XXVII min. XX, ascensio recta, arcus zodiaci inter caeli mediationis punctum atque caput cancri, cui punctus caeli mediationis accesserit, propius est grad. LVII; cum hac igitur atque cum subiectae declinationis complemento grad. LXII min. XXXX per introitum secundum ingressus partes elicio XLVIII, inventum scilicet primum, cuius complementum grad. XXXXII cum proposita declinatione partium XXVII min. XX per primum aut quintum inducens introitum secundum reperio inventum grad. XXXXIII min. XXX, quibus maxima solis declinatione detracta, 343r remanebit latitudinis | argumentum grad. XX, borealis quoque denominationis, quam habet ipsa declinatio. Denique cum eodem latitudinis argumento atque cum complemento inventi primi per secundum rursus introitum ingressus borealem quoque latitudinem excipio partium XIII min. X fere. Arbitror itaque primam propositi constare particulam.

Secunda vero propositionis huius pars hoc habebitur compendio..

Per primum enim aut quintum introitum cum complemento latitudinis inventae atque cum invento primo ex praemissis accepto distantiam elicimus veri loci stellae ab altero punctorum solstitialium; haec autem distantia semper habetur in eadem quarta zodiaci cum puncto caeli mediationis, quando latitudinis argumentum quadrante minus extiterit, locus erit sideris verus, puncto caeli mediationis ascendentem occupante signiferi semicirculum, aut principium librae, puncto eiusdem caeli mediationis descendentem tenente medietatem eclipticae.

Ubi vero latitudinis argumentum quartam circuli exsuperat, inventa distantia in aliam eclipticae transibit quartam; manebit tamen in eodem semi- 343v circulo vel descendente vel ascendente. | At signiferi quartas eas definio, quarum singulae ab altero aequinoctialium punctorum inchoantes in alterum solstitiorum, idest in caput cancri vel capricorni, finiunt.

Repetamus igitur exempli causa proximum sidus, et propositum esto verum eius in signifero locum invenire; eiusdem sideris latitudo ex prius inventis est grad. XIII min. X fere, quorum complementum partium LXXVI min. L cum praecedenti invento primo grad. XXXXVIII per primum aut quintum introitum profert nobis fere quaesitam distantiam grad. L. Cum autem latitudinis argumentum quadrante minus extiterit, verus stellae locus atque eiusdem punctum caeli mediationis in eadem eclipticae quarta vernali consistere necessario probantur; quare iuxta praecedentem doctrinam iam reperta distantia grad. L a cancri capite contra signorum successionem numerata, sideris huius verum locum ostendet grad. X tauri; quod est propositum.

Propositio LXII. |

344r Praecedentis intentum iuxta Johannis de Regiomonte traditionem cognoscere.

---

62. Proposition.

Lösung der vorhergehenden Aufgabe nach Johannes Regiomontanus (Fig. 47).

In primis ergo investigamus, habeatne propositum sidus seu datum caeli punctum latitudinem ab ecliptica nec ne, ut incassum non laboremus. Nam si declinatio dati sideris declinatioque puncti caeli mediationis pares sortiantur numeros similis denominationum, idem sidus declinatione carere atque in signifero sedem habere probabitur, in eodem scilicet puncto, quem caeli occupat mediatio.

Sin autem sideris propositi declinatio aut numero par non fuerit aut denominationem dissimilem habuerit cognomento declinationis puncti eclipticae, quo datum sidus caelum mediat, hoc ipsum sidus ab itinere solari omnino liquet discedere. Sidus aut in altero solstitialium punctorum caelum medians idem quoque punctum pro vera usurpabit sede; at declinatio puncti solstitialis adiungatur declinationi sideris, si diversarum fuerint partium, aut | minor 344v declinatio ex maiore tollatur, et utraque via sive additionis sive subtractionis ipsam obtinebimus latitudinem, quae si congregatione quaesita fuerit sideralis declinationis denominationum servabit. Sin autem detractione latitudo declinationis habebit cognomentum, si sideralis declinatio maximam solis declinationem excesserit, aut eadem[a]) latitudo nomen maximae solis declinationi contrarium sortietur, si latitudo relicta est ex ablatione sideralis declinationis de maxima solis declinatione. Ubi vero propositum sidus cum altero punctorum aequinoctialium meridiano adhaeserit, absque aliqua declinatione ipsum sidus seu caeli punctus in eodem puncto aequinoctiali verum sibi locum sine latitudine vendicat.

Pro aliis vero siderum sitibus ita laborandum erit; etenim per XVIII huius angulus meridiani et eclipticae ad punctum caeli mediationis proveniens reperiatur. Deinde declinationem puncti caeli mediationis per II huius non ignoremus, nec dati sideris nos lateat declinatio. Quae si eadem donemur appellatione, alteri altera detrahatur; ubi vero dissimilis fuerint denominationis simul addantur, | quodque vel detractione vel additione, velut ipsa res adhor- 345r tatur, eveniet, cum angulo prius accepto per secundum introitum organo commissum optatam propositi sideris latitudinem nobis exhibebit; quae si punctus caeli mediationis in boreali constiterit eclipticae semicirculo, semper erit borealis, quando sideris declinatio existens aquilonaris superat declinationem puncti, quo sidus idem meridiano cohaeret; alioquin austrilia constituatur latitudo.

Pari ratione puncto caeli mediationis meridionalem eclipticae semicirculum possidente cum dati declinatione sideris quoque meridionali et declinatione puncti caeli mediationis exsuperante latitudo sideris erit meridiana, sed semper alioquin aquilonaris.

At verum sideralis loci situm tali doctrina perquiremus ascensionem rectam per V huius acquisitam, quae scilicet competat arcui signiferi inter vicinius punctum solstitiale et inter punctum caeli mediationis comprehenso atque complementum declinationis subiectae stellae meteoroscopio per secundum im-

a) Nach *eadem* hat die Hs. das Wort *declinatio* gestrichen.

Die speziellen Fälle werden wie oben unterschieden. Im allgemeinen Fall sucht man zunächst nach Prop. 18 den Winkel η zwischen Meridian und Ekliptik und nach Prop. 2. die Deklination δ_M von M. Dann bildet man $\delta \mp \delta_M$ und hat $\sin\beta = \sin(\delta \mp \delta_M) \cdot \sin\eta$ (Aufg. 2, $\beta = B\Sigma$ im $\triangle\, \Sigma B M$).

345v mittantur introitum; arcus itaque collectus iterum cum prius | inventae latitudinis complemento per primum aut quintum introitum commissum reportabit nobis distantiam veri loci sideris ab altero punctorum solstitialium, utri scilicet caeli mediatio vicinius accesserit. Quod si verus stellae locus eandem cum puncto caeli mediationis obtinuerit quartam, ergo prius inventa distantia computata de viciniori puncto solstitiali versus punctum caeli mediationis subiectum producet nos ad verum eiusdem sideris locum. Signiferi vero quartae non, prout sors tulerit, accipiantur, sed eas solum assumamus, quae quattuor eclipticae cardinibus, idest duobus aequinoctialibus et duobus punctis distinguuntur tropicis. Utrum autem verus sideris locus cum puncto caeli mediationis eundem sibi vendicet eclipticae quadrantem an diversas, tali periculo cognoscemus; ascensionem rectam, qua non multo ante utebamur, simul cum complemento maximae declinationis solaris per secundum inducentes introitum arcum elicimus, quo ex grad. LXXXX detracto reliquum et maximam solis 346r declinationem per primum | aut quintum introitum rursus meteoroscopio inferentes arcum excipimus, cuius complementum vocemus argumentum locale. Huic itaque argumento locali sideris conferamus declinationem; caeli namque mediationis puncto aquilonarem eclipticae vendicante semicirculum cum declinatione boreali quantalibet aut cum declinatione meridiana, minori tamen quam sit argumentum locale, punctus caeli mediationis atque verus sideris locus in eodem signiferi quadrante constituentur. Sed austrina declinatione argumentum locale vincente, puncto scilicet mediationis septemtrionalem signiferi vendicante semicirculum, aut in austrina zodiaci constituto medietate puncto caeli mediationis cum boreali declinatione locale argumentum itendidem exsuperante punctus caeli mediationis et verus sideris locus diversos nanciscentur signiferi quadrantes. At puncto caeli mediationis meridianam eclipticae possidente medietatem cum declinatione quantalibet quoque meridiana vel cum declinatione septentrionali, minori tamen argumento locali punctus caeli mediationis 346v atque verus sideris locus eandem | signiferi vendicabunt quadram. At declinatione boreali sideris in austrina zodiaci medietate, punctum caeli mediationis habentis argumentum aequante locale vel austrina declinatione idem argumentum aequante cum caeli mediatione septemtrionalem zodiaci semicirculum tenente, igitur verus sideris locus in alterutro reperietur aequinoctiorum. Nam si caeli mediatio ascendentem signiferi tenuerit medietatem, caput arietis pro vero dati sideris habeatur loco. Sin autem descendentem, principium librae verus erit locus. Ut autem praemissa intelligantur lucidius, unum proferam exemplum.

Die Länge wird folgendermaßen bestimmt. Man sucht nach Prop. 5 die Rektaszension α_M (♎ $A = 180^0 - \alpha$) und bildet $\cos x = \cos\delta \cos\alpha_M$ (Aufg. 2, $90^0 - x =$ ♎ Σ im $\triangle$ ♎ ΣA) und $\sin\lambda = \frac{\sin x}{\cos\beta}$ (Aufg. 1, $x = 90^0 - I$ der vorigen Methode).

Zur Bestimmung, ob der Stern im gleichen Quadranten der Ekliptik wie M liegt, bildet man: $\cos y = \sin\alpha \cdot \cos\varepsilon$ (Auf. 2) und $\cos L = \frac{\sin\varepsilon}{\sin y}$ (Aufg. 1, oder es ist $\operatorname{ctg} L = \operatorname{tg}\varepsilon : \cos\alpha$); ist dann M auf dem nördlichen Ekliptikhalbkreis und δ_M entweder positiv oder negativ, aber kleiner als L, das argumen-

Sit sidus caelum medians cum grad. XV aquarii habensque declinationem aquilonarem grad. LXVII; et propositum esto verum eius in signifero locum atque latitudinem ab orbita solari reperire.

Angulus itaque ex ecliptica et circulo declinationis in puncto caeli mediationis proveniens per XVIII huius invenitur fere partium LXXIII, et per secundam huius declinatio puncti caeli mediationis repe|ritur fere grad. XVI min. XX, austrinae quidem partis. Atqui subiecti sideris declinatio in contrariam vergit aequatoris partem. 347r

Ideoque hac cum illa congregata constituit summam partium LXXXIII min. XX, quas cum praemisso angulo partium LXXIII per secundum introducens introitum, quaesitam elicio latitudinem graduum LXXI min. XXXXI fere iuxta traditam praeceptionem, borealis quoque denominationis.

Sed verum sideris locum sic investigabo. Ingrediens enim imprimis per introitum secundum cum complemento[a]) subiectae declinationis partium XXIII atque cum ascensione recta eius arcus eclipticae, qui puncto caeli mediationis atque proximo intercipitur puncto solstitiali per introitum secundum inferens meteoroscopio produco gradus XVI cum minutiis XXXX fere, qui deinde cum complemento pridem inventae latitudinis partium XVIII et min. XX per primum aut quintum introitum[b]) producunt grad. LXVI cum minutiis XX, distantiam scilicet veri loci ab altero punctorum solstitialium; ex praemissis liquet, verum stellae locum et punctum caeli mediationis eandem semper obtinere signifero me|dietatem vel ascendentem vel descendentem; cum autem pro subiecto sidere punctus caeli mediationis ascendentem possideat eclipticae medietatem, idest eam, quae ab capite capricorni principium sumens iuxta signorum seriem in cancri caput terminatur, necessario probabimus verum dati sideris locum in eadem reperiri zodiaci medietate. Sed dubitemus, utri solstitialium punctorum verus huius sideris locus magis appropinquat, quod ut exploremus, locale reperiendum est argumentum. Igitur per praemissam doctrinam ad organum secundo ingrediens introitu cum praemissa recta ascensione grad. XXXXVII et semis atque cum maximae declinationis solaris complemento grad. LXVI et semis elicio partes XLII et min. XXX fere, quarum complementum grad. grad. XXXXVII et semis cum maxima solis declinatione per primum aut quintum introitum illuc reducens excipio grad. XXXIII, quibus ex quadrante sublatis locale remanet argumentum partium LVII, quod 347v

a) Nach *complemento* hat die Hs. das Wort *secundum* gestrichen.
b) Die Hs. hat das Wort *introitum* zweimal.

tum locale, so ist der Stern im gleichen Quadranten; ist aber δ_M negativ, aber $> L$, oder M auf dem südl. Halbkreis und δ_M positiv und $> L$, so ist der Stern in einem anderen Quadranten. Für M auf dem südl. Halbkreis und δ_M entweder negativ oder positiv und $< L$ liegt der Stern wieder im gleichen Quadranten. Ist M auf dem südl. Halbkreis und δ positiv und $= L$ oder M auf dem nördl. Halbkreis und δ negativ und $= L$, so ist die Länge des Sternes 0^0 oder 180^0. (Die geometrische Bedeutung von L ist nicht ersichtlich.)

Beispiel: $\lambda_M = 315^0$, $\delta = 67^0$. Resultate: $\eta = 73^0$, $\delta_M = -16^0 20'$, $\delta - \delta_M = 83^0 20'$, $\beta = 71^0 41'$; $x = 16^0 40'$, $\alpha_M = 47^0 30'$, $y = 42^0 30'$, $L = 57^0$, $\lambda = 23^0 41'$.

348r cum subiecta declinatio sideris exsu|peret, igitur verus huius sideris locus in alterum eiusdem semicirculi ascendentis dimidium, seu in aliam totius eclipticae quartam migrabit; ergo pridem inventa distantia grad. LXVI min. XX de principio cancri contra signorum successum computata verus subiecti sideris locus invenietur in grad. XXIII min. XXXXI arietis; quod est propositum.

Propositio LXIII.

Cognita sideris alicuius latitudine atque puncto signiferi cognito, quo sidus idem possidet meridianum, declinationem ab aequatore cum vero ipsius loco revelare.

Per XVIII huius angulus quaeratur, qui fit ex meridiano et ecliptica in dato caeli mediationis puncto, quem quidem angulum cum ipsa latitudine per|
348v primum aut quintum introitum meteoroscopio inferentes arcum excipiemus, qui cum data latitudine parem possidet denominationem, et ipse sit inventum primum. Deinde per secundam huius quaeramus etiam puncti caeli mediationis datae declinationem, quam, si eiusdem partis fuerit cum invento primo aggregantes habebimus sideris declinationem desideratam. Ubi vero puncti caeli mediationis declinatio inventumque primum diversa nanciscuntur cognomenta, igitur minus maiori detrahatur, residuum erit declinatio quaesita servans denominationem maioris numeri.

Postquam ex hypothesi punctus caeli mediationis cognitus est, per praemissum aut antepraemissam verus sideris locus nobis quoque manifestabitur.

At eundem verum locum alia quadam ratione sic investigabimus; meteoroscopiam ingredientes per primum aut quintum introitum cum complemento latitudinis sidereae atque cum complemento inventi primi arcum elicimus, quem detrahentes quadranti reliquum appellabimus differentiam transitus side-
349r ris per caeli medium. Verum haec non est eadem cum ea dif|ferentia transitus sideris per caeli medium, de qua prius mentio est habita. Nam haec est arcus zodiaci, illa vero quaedam aequatoris portio. Sed ad id redeundum est, unde paulo ante lapsa fuit oratio. Eandem differentiam iungamus in zodiaco ad punctum caeli mediationis, si ipsum in medietate signiferi locetur ascendente, cuius latitudine boreali, aut in eclipticae semicirculo descendente tum latitudine[a]) meridionali, contra vero hanc differentiam transitus sideris per caeli medium loco puncti caeli mediationis auferamus, si punctus idem caeli mediationis ascendentem occupet eclipticae semicirculum cum latitudine[b]) meridionali; contra vero hanc differentiam transitus sideris per caeli medium loco puncti caeli mediationis auferamus, si punctum idem caeli mediationis ascendentem occupet eclipticae semicirculum, cum latitudine meridionali vel descen-

a) Nach *latitudine* hat die Hs. die Worte *boreali aut in eclipticae semicirculo descendente* gestrichen.

b) Nach *latitudine* hat die Hs. das Wort *boreali* gestrichen.

63. Proposition.

Bestimmung der Deklination und der Länge eines Sternes, wenn seine Breite und die Länge des mit ihm kulminierenden Tierkreiszeichens gegeben ist (Fig. 47).

dentem zodiaci medietatem cum latitudine boreali, ut verus stellae locus manifestetur, quo demum haec praeceptio fiat intellectu facilior.

Hoc unico utar exemplo.

Esto ut caeli mediatio pro sidere aliquo sit gradus XXIII scorpii cum latitudine septemtrionali graduum XXXIIII min. X; per XVIII huius angulus meridiani | et eclipticae in puncto caeli mediationis proveniens invenitur grad. 349ʳ LXXV et min. XV fere, quos cum subiecta latitudine partium XXXIIII min. X per primum aut quintum introitum inferenti mihi primum porrigitur inventum grad. XXXV et semis fere, septemtrionalis cognomenti. Nam et subiecta latitudo septemtrionalis est. Sed per secundam huius declinatio puncti caeli mediationis eiusdem meridionalis habetur grad. XVIII min. XXXIIII fere, quos iuxta praemissam doctrinam primo auferens invento partium XXXV et semis ipsam relinquo sideris declinationem quoque septemtrionalem grad. XVI min. LVI. Posthaec cum complementis duobus, latitudinis scilicet atque inventi primi, quorum primum est grad. LV min. L, secundum vero grad. LIIII et semis, per primum aut quintum introitum inferens elicio gradus LXXX min. XX fere; quibus ex quadrante demptis differentia remanet transitus sideris per caeli medium partium IX min. XXXX, quibus ex loco caeli mediationis detractis verus sideris locus relinquitur grad. XIII min. XX scorpii; quod est intentum.

Sed in praesenti problemate seu propositione sciendum | est, quod data 350ʳ latitudine boreali maiore, quam sit complementum maximae declinationis solaris, cum puncto caeli mediationis immediate signiferi meridionali vel proposita latitudine meridionali maiore, quam sit maximae declinationis solaris complementum, cum puncto caeli mediationis collocato in medietate signiferi septemtrionali propositum dupliciter posse determinari, nisi subiecta latitudo maxima fuerit inclinatio circuli declinationis supra zodiacum; tunc enim problema uno tantum absolvemus modo.

Imprimis namque unam sideris dati reperiemus declinationem demendo declinationem puncti caeli mediationis ex invento primo per praecedentia perquisito; quae quidem sideralis declinatio eiusdem erit cognomenti, cuius latitudo proposita. Deinde declinationem alteram inveniemus in eodem proposito, iuncta scilicet declinatione puncti caeli mediationis cum invento primo et aggregatum auferendo de gradibus CLXXX; quod enim sic remanserit, in tali proposito rursus quoque poterit esse declinatio sideralis, pari etiam cognomento, quo et latitudo censetur subiecta. | Verum pro diversa declinatione non idem 350ᵛ verus reperietur sideris locus. Nam si declinatio sideralis primo sumatur modo, verus sideris eiusdem locus omnino per praecedentem deprehendetur doctrinam. Sin autem posteriori modo sideralis constiterit declinatio, differentia transitus sideris per caeli medium cum complemento inventi primi atque cum complemento subiectae latitudinis ex tradita praeceptione perquiretur, et ipsa est eadem cum priori sive pridem reperta, quae deinde semicirculo sublata veram relinquit differentiam transitus sideris per caeli medium, quam iuxta prae-

---

Nach Prop. 18 bestimmt man η und bildet dann $\sin I = \frac{\sin\beta}{\sin\eta}$ (Aufg. 1, $I = \Sigma M$ im $\Delta\, \Sigma B M$). Dann sucht man nach Prop. 2 die Deklination δ_M von M. Die gesuchte Deklination des Sternes ist $\delta = I \mp \delta_M$. Die weitere Lösung ist die der vorigen Propositionen.

missas, si usurpemus cautelas, ad verum sideris locum pro declinatione eius secundo reperta deducemur.

Hanc propositi ambiguitatem doctus ille mathematicus Joannes de Regiomonte sub silentio quoque praeteriit, et si sui temporis astronomorum[a]) facile princeps evaserit, at venia donandus est — non enim singuli possumus alia — res ipsa hoc liquebit exemplo.

351r Sit aliquod | astrum, cuius caeli mediatio fuerat grad. XXV min. VI aquarii eiusque borealis latitudo partium LXVIII, et esto propositum invenire declinationem ipsius ab aequatore atque verum eius locum; angulus ex meridiano atque signifero proveniens in puncto caeli mediationis dato per XVIII huius erit fere grad. LXXI cum tertio seu min. XX, quos cum subiecta latitudine partium LXVIII inducens elicio primum inventum grad. LXXVIII. At declinatio puncti caeli mediationis per secundam huius habetur fere partium XIII min. X, qua primo invento sublata prima remanet sideris dati declinatio grad. LXIIII min. L borealis quoque partis; etenim latitudo ad borealem subicitur plagam.

Deinde ipsam hanc declinationem partium XIII min. X; quibus ex semicirculo sublatis altera in eodem proposito relinquitur declinatio grad. LXXXVIII min. L. Postremo ad meteorcscopium ingrediens per primum aut quintum 351v introitum cum complemen|to inventi primi partium XII atque cum complemento subiectae latitudinis graduum XXII excipio gradus XXXIIII min. XX, quos auferens ex quadrante relinquo differentiam transitus[b]) sideris per caeli medium partium LV min. XXXX, quas addens supra locum caeli mediationis ad verum sideris pro prima declinatione locum deduco in grad. XX min. XXXXVI arietis. Eadem quoque differentia de semicirculo sublata remanent partes CXXIIII [min.] XX, quibus iterum additis loco caeli mediationis dato pro declinatione altera verus habebitur locus in grad. XXIX min. XXVI geminorum. Liquet igitur hoc unum propositum dupliciter absolutum fuisse; cur autem id contingat, ex libro problematum innotescet.

a) Hs. hat *astronimorum*. b) Hs. hat *transitui*.

Andere Methode. Man sucht $\cos\Delta = \frac{\cos I}{\cos\beta}$ (Aufgabe 1, $I = BM$ im $\Delta\ B\Sigma M$); I wird als differentia transitus sideris per caeli medium bezeichnet. Dann ist $\lambda = \pm(\lambda_M \pm \Delta)$ (je nach der gegenseitigen Lage).

Beispiel: $\lambda_M = 233^0$, $\beta = 34^0 4'$. Resultate: $\eta = 75^0 15'$, $I = 35\frac{1}{2}^0$, $\delta_M = 18^0 34'$, $\delta = 16^0 56'$, $\Delta = 9^0 40'$, $\lambda = 223^0 20'$.

Außer $\delta = I - \delta_M$ ist auch $\delta' = 180^0 - (I + \delta_M)$ eine mögliche Lösung; dann muß man Δ wie oben bilden, hierauf $\Delta' = 180^0 - \Delta$ und statt mit Δ nun mit Δ' λ' bestimmen.

Beispiel: $\lambda_M = 325^0 6'$, $\beta = 68^0$. Resultate: $\eta = 71^0 20'$, $I = 78^0$, $\delta_M = 13^0 10$, $\delta = I - \delta_M = 54^0 50'$, $\delta' = 88^0 50'$, $\Delta = 55^0 40'$, $\lambda = 20^0 46'$, $\lambda' = 89^0 26'$.

Der Winkel zwischen Meridian und Tierkreis wird aus $\sin\eta = \frac{\sin\alpha_M}{\sin\lambda_M}$ (Aufg. 1) bestimmt; $\lambda_M = 324^0 6'$, $360^0 - \lambda_M = 34^0 54'$, $\alpha_M = 33^0$, $\eta = 76\frac{1}{2}^0$ (!)

Maximam autem circuli declinationis cum signifero inclinationem ad praesens problema sic demum explorabimus. Cum namque zodiaci arcum, qui puncto proposito caeli mediationis atque propinquo alterius aequinoctii puncto clauditur, cum sua recta ascensione meteoroscopio primo vel quinto introitu inferentes quaesitam excipiemus inclinationem. Velut in praemisso exemplo caeli mediatio pro dato subicitur | sidere in grad. XXV min. VI aquarii. Ergo signiferi portio inter hanc caeli mediationem et viciniorum aequinoctii punctum comprehensa erit grad. XXXIIII min. LIIII, quorum per V huius recta erit ascensio fere partium XXXIII; his per primum aut quintum introitum illatis investigata prodibit inclinatio grad. fere LXXVI et semis. 352r

Propositio LXIIII.

Obliquam vel ascensionem vel descensionem cuiusvis in caelo puncti seu sideris cognitae non tam longitudinis quam latitudinis ad horizontem datum succintim explicare.

Igitur per LVIII et eam sequentes recta propositi sideris ascensio quaeratur atque declinatio, quae si regionariae complemento latitudinis coaequetur, sidus | firmamenti conversione lambet horizontem eodem temporis oriens momento atque occidens, et si declinatio haec fuerit subiecta septemtrionalis, idem sidus a nobis semper videbitur. Si vero austrina, praeter unicum momentum ortui et occasui commune perpetuo nobis occultabitur. At declinatione sideris inventa boreali, regionariae tamen latitudinis exsuperante complementum, sidus ipsum supra datum horizontem nunquam vel occidens vel oriens semper moratur et idcirco nobis perpetuo cernetur. Sic quoque contra continget, dum regionariae complementum latitudinis declinatio superans austrina subicitur; etenim tale sidus omni nos modo latebit. 352v

Ubi demum stellae declinatio minor dabitur, quam sit regionariae complementum latitudinis, ipsa quidem stella ad horizontem subiectum vicissim oritur atque occidit. Ergo quod proponitur, perficiemus, elevationis scilicet polaris complemento cum subiecti sideris declinatione ad organum per primum

---

64. Proposition.

Bestimmung der ascensio bzw. descensio obliqua eines Sternes aus seiner Länge und Breite (Fig. 48).

Man bestimmt zunächst nach Prop. 58 ff. die Rektaszension α und die Deklination δ des Sternes (Spezialfälle: $\delta \geqq 90^0 - \varphi$, der Stern ist zirkumpolar, $\delta \leqq -(90^0 - \varphi)$: der Stern ist höchstens einen Augenblick am Horizont sichtbar oder überhaupt nicht).

Man bildet dann $\sin\mu = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}$ (μ = Morgenweite = ΣO; $\mathfrak{N}\Sigma = 90^0$

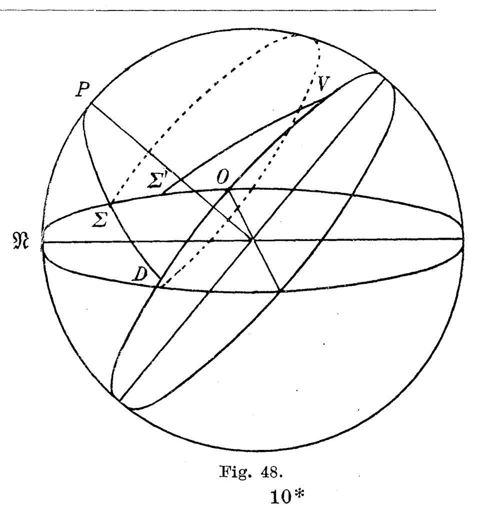


Fig. 48.

aut quintum introitum misso; nam arcus ita collectus dati sideris ortus amplitudo, cuius deinde complementum cum subiectae declinationis complemento 353v per primum aut quintum introitum rursus illatum | referet arcum; quo de grad. LXXXX sublato reliquum ascensionalis erit differentia, qua rectae ascensioni detracta, si borealis, aut eidem adiecta, si fuerit austrina declinatio; quod enim sic constabit, obliqua dati sideris erit ascensio, sed ipsam descensionem ratione venabimur opposita; nam ascensionalis differentia, quae modo iungebatur, nunc demetur, et econtra.

Esto verus alicuius stellae locus grad. XIII scorpii cum latitudine boreali partium XXIIII min. X. Cuius in patria regione obliquam quaerere intendo et ascensionem et descensionem. Dati itaque sideris ascensionem rectam constat esse partium CCXXX et min. XXXV fere; declinatio autem eiusdem borealis gradu. XVI min. LVI;[a]) ingrediens igitur iuxta primum aut quintum introitum cum patriae complemento latitudinis grad. XXXX min. XXXIII atque cum ipsa declinatione grad. XVI min. LVI partes excipio XXVI min. XXXX, ortivam videlicet sideris amplitudinem. Cuius deinde complementum grad. LXIII minu. XX et declinationis complementum partium LXXIII min. IIII primo aut quinto 353v inferens introitu | reperio partes XLIX min. XX, quibus quadranti sublatis differentia remanet ascensionalis grad. XX min. XXXX; quibus rectae pridem inventae subtractis ascensioni (nam subiecta declinatio borealis est) obliqua dati sideris ascensio relinquitur partium CCIX min. LV, contra vero eodem ascensionali differentia eidem rectae ascensioni congregata descensio consurget obliqua graduum CCLI min. XV; quod est intentum.

Propositio LXV.

Signiferi punctum, quo subiecta stella in horizonte supposito vel oritur vel occidit, indagare.

Si subiectum sidus longitudinis atque latitudinis fuerit cognitae, per praemissam ipsius sideris pro subiectae regionis latitudine obliquam quaeramus 354r vel ascensionem, si ortum scire velimus, vel descensionem, | si occiduum signiferi punctum desideramus, et utramque earum per XX huius aut eius sequentem in partes signiferi vertentes propositum habebimus utrumque, idest signiferi

a) Hs. hat *LVI* korr. aus *LXI*.

$-\mu$ im $\Delta\, P\mathfrak{N}\Sigma$), ferner $\cos\Delta = \frac{\cos\mu}{\cos\delta}$ ($\Delta = DO$ im $\Delta\, \Sigma DO$). Dann ist $\alpha_1 = \alpha \mp \Delta$, $d_1 = \alpha \pm \Delta$. (Δ wird als ascensionalis differentia bezeichnet.)

Beispiel: $\lambda = 223^0$, $\beta = 24^0 10'$. Resultate: $\alpha = 230' 35'$, $\delta = 16^0 56'$, $\mu = 26^0 40'$, $\Delta = 20^0 40'$, $\alpha_1 = 209^0 55'$, $d_1 = 251^0 15'$.

65. Proposition.

Bestimmung des Tierkreiszeichens, das gleichzeitig mit einem gegebenen Stern auf- oder untergeht.

Man bestimmt nach Prop. 64 die ascensio bzw. descensio obliqua des Sternes und nach Prop. 20ff. den ihr entsprechenden Bogen der Ekliptik ($r = V\Sigma'$).

punctum, quo idem sidus cooritur, et signiferi punctum, quo simul pariterque data stella petit occasum.

Esto stella, cuius longitudo seu verus locus in zodiaco sit graduum XIII scorpii, et latitudo eius borealis partium XXIIII[a]) min. X. Cupiens itaque signiferi punctum reperire, qui una cum data stella peroritur, invenio primum per praemissam ascensionem eius obliquam grad. CCIX min. LV, quae per XX huius aut eius sequentem in arcum zodiaci conversa redduntur signa sex grad. XXI min. XXXXII librae. Rursus intendens invenire signiferi punctum, quo idem sidus occidit, obliqua descensio per praemissam constabit partibus CCLI min. XV; quae si per XX huius aut eius sequentem in signiferi commutentur arcum, reperio signa VIIII[b]) grad. VIIII min. XXXXIX, quibus eandem ab signorum initio numerabis, indicabitur nobis datum sidus occidere cum grad. IX min. XXXXIX capricorni; quod est intentum. |

Propositio LXVI.

354v

Caelestis alicuius puncti seu cuiuslibet sideris agnito vero loco atque latitudine sitne ipsum dato momento supra terram aut subter eam succinctum breviterque definire.

Igitur iuxta doctrinam antepraemissae considerandum est, utrum datum sidus oriatur occidatque an non; quod si non oriatur, ergo non occidet, quare de ipso propositum frustra conficiemus. Ubi vero compertum habemus illam oriri occidereque, igitur per praemissam duo zodiaci capiamus puncta, quorum uno peroritur, altero vero petit occasum. Ad idem quoque tempus oblatum horoscopum, idest oriens eclipticae punctum, per XXIII huius discamus, quo cognito punctus occiduus non ignorabitur, cum is orienti per diametrum opponatur. Si enim sideris | subiecti borealis declinationis seu etiam meridionalis dicta duo puncta, ortus scilicet [et] occasus in eo signiferi semicirculo reperiuntur, qui ab occidente inchoans secundum signorum seriem in horoscopum terminatur, ipsum sidus supra horizontem locabitur. Sin autem eadem puncta eiusdem sideris ambo pariter in reliqua signiferi medietate constiterint, ipsum sidus subter horizontem constituetur. Quod si sidus idem prope occidentiam reperiatur, et punctus, quo datum sidus occidit, praecesserit occidens punctum,

355r

a) Hs. hat. XXXIIII. b) Hs. hat VIIII.

Beispiel: $\lambda = 223^0$, $\beta = 24^0\,10'$. Resultate: $\alpha_1 = 209^0\,55'$, $r_a = 201^0\,42'$, $d = 251^0\,15'$, $r_d = 279^0\,49'$.

66. Proposition.

Untersuchung, ob sich ein gegebener Stern zu gegebener Zeit über oder unter dem Horizont befindet.

Die Spezialfälle sind, wie in Prop. 64 die, daß der Stern entweder zirkumpolar ist, oder für den betr. Ort überhaupt nicht aufgeht.

Im allgemeinen Fall bestimmt man nach Prop. 65 die Tierkreiszeichen, mit denen der Stern gleichzeitig auf- bzw. untergeht, r_a und r_d, ferner für die gegebene Zeit das Horoskop, d. h. das gerade aufgehende Zeichen des Tierkreises h. Es sei H das Horoskop, H' der um 180^0 entfernte Punkt. Liegen

indicabitur tunc nobis ipsum sidus infra horizontem latere. Sin autem punctus sideris occiduus occidentem sequitur ipsum, tunc sidus supra horizontem reperietur. Pari quoque modo ducamus, sitne subiecta stella supra horizontem aut infra eum, duobis eius punctis, quorum altero peroritur, altero vero peroccidit, prope horoscopium repertis. Nam si punctus signiferi, quo subiectum sidus oritur, horoscopum antecesserit, ipsum sidus supra terram necessario con-355ᵛ stituetur. Sin autem | adhuc concomitabitur, idem sidus subter horizontem manens comprobabimus.

Velut si alicuius sideris oriens zodiaci punctus fuerit in grad. XXI min. XXXXII librae, occiduus vero punctus eiusdem in partibus IX min. XXXXIX capricorni, et in horizonte, cuius latitudo fuerit grad. XXXXIX, pro dato tempore sit horoscopus principium aquarii. Cum autem dati sideris puncta duo signiferi, cooriens scilicet et occiduum, in semicirculo signiferi superiori permaneant, notum erit datam stellam supra horizontem morari.

Ponamus item sidus aliud, cuius ortus in eodem horizonte fiat cum grad. IX mi. XXXXIX cancri, occasus vero cum grad. XXI min. XXXXII arietis; et sit eius declinatio meridionalis grad. XVI min. LVI; pro subiecto quoque tempore scorpii principium oriatur; atqui occiduus dati sideris punctus in inferiori residet hemisphaerio, quamvis ortivus eiusdem sideris in superiori maneat, ipsum sidus subter horizontem collocari constabit.

Propositio LXVII.

356ʳ Cuiuslibet sideris seu puncti caelestis | arcum semidiurnum et seminocturnum investigare.

Igitur per doctrinam in LXIIII huius traditam ascensionalis accipiatur differentia ipsaque quadranti coniuncta, si subiecti sideris seu puncti declinatio fuerit borealis, aut ex quadrante diminuta, si declinatio sit austrina; quod itaque huiusmodi differentiae ascensionalis aut aggregatione vel diminutione colligitur, quaesitus erit arcus semidiurnus, qui quoque semicirculo sublatus arcum seminocturnum relinquit.

Ut si dati sideris seu puncti caelestis declinatio borealis fuerit grad. XVI

---

nun r_a und r_d beide auf dem Kreisbogen $H'VH$, so steht der Stern über dem Horizont, liegen sie auf dem anderen Halbkreis, so steht der Stern unter dem Horizont. Steht der Stern nahe dem westlichen Horizont und geht er vor H' unter, so steht er unter, geht er nach H' unter, über dem Horizont; steht er nahe dem östlichen Horizont und geht er vor H auf, so steht er über dem Horizont und umgekehrt.

1. Beispiel: $r_a = 201^0\,42'$, $r_d = 279^0\,49'$, $\varphi = 49^0$, $h = 300^0$. Resultat: Stern über dem Horizont.

2. Beispiel: $r_a = 99^0\,49'$, $r_d = 21^0\,24'$, $\delta = -16^0\,56'$, $h = 210^0$; Resultat: Stern unter dem Horizont. (Da $r_d < 210^0 - 180^0$ ist.)

67. Proposition.

Bestimmung des halben Tagbogens und Nachtbogens eines Sternes.

min. LVI; igitur per LXIIII huius differentia ascensionalis erit graduum XX mi. XXXX; quibus aggregatis quadranti erit arcus semidiurnus grad. CX min. XXXX. Eadem quoque differentia ascensionali sublata quadranti sideris eiusdem arcum relinquit seminocturnum partium LXIX mi. XX, eiusdem etiam declinationis partium XVI min. LVI partem subiciamus austrinam, et contra nobis accidet, eadem provenienti differentia ascensionali|, ut, quod pridem erat 356v arcus seminocturnus, nunc arcus semidiurnus constituetur, et contra; ergo liquet propositum.

Propositio LXVIII.

Utrum stella quaepiam hemisphaerium possideat orientale an occidentale subiecto temporis momento, perscrutari.

Orientale hemisphaerium eam appello caeli partem, quae ab imo terrae incipiens per horoscopum eundo in medium caeli supra terram numeratur, reliquum autem hemisphaerium, quod a medio caeli supra terram inchoans transeundo per occidentem in imum terrae computatur, occidentale nuncupo. Igitur ad dati temporis momentum per XXII huius aut eius sequentem medium caeli supra terram inveniatur, non desit etiam nobis per LVIII et eius sequentes re|cta sideris ascensio seu potius caeli mediatio, qua habita conside- 357r randum est, utrum caeli mediatio dati sideris hemisphaerium eclipticae teneat orientale an occidentale, quod tandem ex praemissa definitione facile patescit; quare nostram consequemur intentionem. Idem quoque nanciscemur propositum comparando rectam sideris ascensionem, ad duas rectas ascensiones, medii caeli scilicet supra terram et imi terrae.

Nam si recta sideris ascensio rectam imi terrae ascensioni naturali numerationis serie comitans ascensionem rectam medii caeli supra terram procedat, datum sidus absque dubio occidentale occupat hemisphaerium. At eadem recta sideris ascensione rectam quidem medii caeli supra terram naturali ordine concomitante rectamque imi terrae ascensionem praecedente nobis ostendetur subiectum sidus orientale possidere hemisphaerium.

Ut si sidus aliquod etiam caelum mediet cum XXIII scorpii, velimque

---

Man bestimmt nach Prop. 64. $\triangle$, die differentia ascensionalis. Ist δ positiv, so ist der halbe Tagbogen $t = 90^0 + \triangle$, ist δ negativ, $t = 90^0 - \triangle$.

1. Beispiel: $\delta = 16^0 56'$. Resultat: $\triangle = 20^0 40'$, $t = 110^0 40'$.

2. Beispiel: $\delta = -16^0 56'$. Resultat: $\triangle = 20^0 40'$, $t = 69^0 20'$.

68. Proposition.

Untersuchung, ob sich ein Stern zu gegebener Zeit auf der östlichen oder westlichen Halbkugel befindet.

Man bestimmt nach Prop. 22 die Länge λ_M des zu der gegebenen Zeit kulminierenden Punktes der Ekliptik, die Länge λ_J des 180^0 entfernt liegenden Punktes J (imum terrae) und nach Prop. 58 die Länge λ des gleichzeitig mit dem Stern kulminierenden Ekliptikpunktes; ist dann $\lambda < \lambda_M$ und $> \lambda_J$, so ist der Stern auf der westlichen Halbkugel und umgekehrt.

pro aliquo momento, quodcumque dabitur, scire, utrum subiectum sidus orientale teneat hemisphaerium an occidentale, per XXII huius aut eius sequentem pro aliquo subiecti temporis momento M. C. supra terram inveniatur grad. 357ᵛ I aquarii, igitur imum terrae gradus erit I leonis; cum autem | suppositi sideris caeli mediatio signorum successionem intra imum terrae et medium caeli supra terram constituatur; ergo idem sidus occidentale caeli hemisphaerium possidere necessario convincimus; quod est intentum.

Propositio LXIX.

Quod problemate sexto et sexagesimo docetur, alia quadam via rimari.

Ad explorandum igitur, utrum datus caeli punctus seu stella supra datum horizontem (ne) subtenetur an subter eundem deprimatur, investigabimus inprimis per antepraemissam subiecti puncti seu sideris arcum tam semidiurnum quam seminocturnum.

Deinde per praemissam caeli hemisphaerium, quod idem punctum sidusve possideat, non ignorabimus etiam rectam sideris ascensionem, quam per LVIII et eam sequentes addiscemus. Si enim ipsum sidus orientale tenuerit hemi-358ʳ sphaerium, ascensio recta medii caeli supra terram | sideris ascensioni rectae subtrahatur, hocque residuum arcui semidiurno superante datum sidus supra terram collocari scimus. Sin autem residuum ipsum arcum vincat semidiurnum, subiecta stella subter horizontem locabitur.

Ubi vero datum sidus occiduum possiderit hemisphaerium, igitur ascensio recta imi caeli ex ascensione recta sideris auferatur, reliquumque ab arcu seminocturno superatum indicat nobis subiectam stellam subter horizontem morari. Sin autem arcus seminocturnus ab eodem reliquo excedatur, stellam ipsam seu quodvis datum punctum, pro quo hanc suscepimus inquisitionem, supra terram attolli necessario concludemus.

Velut sit alicuius sideris, quod caelum mediat grad. XXIII scorpii in regione, cuius[a]) latitudo grad. XXXXIX, arcus semidiurnus partium CX min. XXXX. Igitur iuxta doctrinam antepraemissae seminocturnus arcus erit grad. LXIX min. XX. Deinde pro dato alicuius temporis momento medium caeli

a) Hs. hat *eius*.

Oder man bestimmt die Rektaszensionen: α_M von M, α_J des 180^0 entfernt liegenden Punktes J und α des mit dem Stern kulminierenden Ekliptikpunktes. Ist $\alpha < \alpha_M$ und $> \alpha_J$, so ist der Stern auf der westlichen, ist $\alpha > \alpha_M$ und $< \alpha_J$, auf der östlichen Halbkugel.

Beispiel: $\lambda = 233^0$, $\lambda_M = 301^0$, $\lambda_J = 121^0$. Resultat: Stern auf der westl. Halbkugel.

69. Proposition.

Andere Lösung der Aufgabe von Prop. 66.

Man bestimmt nach Prop. 67 den halben Tagbogen des Sternes, dann nach Prop. 68 die Halbkugel, auf der er sich befindet, und nach Prop. 58 ff. seine Rektaszension α.

supra terram sit grad. I aquarii; ergo imum terrae erit grad. I leonis, estoque propositum discutere, sit ne idem sidus supra terram aut subter eam positum. Igitur per antepraemissam dati sideris arcus semidiurnus erit grad. | CX min. 358v XXXX, arcus autem seminocturnus grad. LXIX min. XX, et per quintum huius ascensio recta imi caeli constat grad. CXXIII min. XIIII, quam aufero ex recta dati sideris ascensione grad. CCXXX min. XXXV. Quoniam idem sidus per antecedentem occidentis obtinet hemisphaerium, et remanent partes CVII min. XXI, quibus arcum seminocturnum superantibus consequens erit, ut datum sidus supra horizontem datum collocetur; quod est propositum.

Propositio LXX.

De qualibet stella, in quo sit caeli domicilio[a]) constituta, ipsis domiciliis vel iuxta Iohannem de Regiomonte vel iuxta Campanum aut Gasulum Ragusinium erectis, sciscitari.

Pro regione igitur aliqua ad datum temporis momentum duodecim caeli domiciliis iuxta Ioannem[b]) de Regiomonte | constitutis nanciscamur[c]) igitur 359r inprimis caeli mediationem sideris per LVIII huius aut eius sequentes; duo quoque puncta, quorum altero datum sidus oritur, altero peroccidit. Si enim caeli mediatio sideris medio caeli supra terram coaequatur, datum sidus decimi ab horoscopo loci tenet initium. Sin autem sideris caeli mediatio imo terrae fuerit par, ipsum sidus terrae imum partiliter tenet. At signiferi puncto, quo subiectum sidus peroritur, horoscopium coaequante ipsum sidus ad subiectum temporis momentum oritur atque orientalem horizontis semicirculum partiliter occupat. Ille deinde eclipticae punctus, quo sidus simul occidit, ab initio septimi ab horoscopo loci non differens indicat nobis sidus septimi loci principium tenere atque occiduum horizontis semicirculum partiliter obtinere. Hoc itaque iudicium sic se habet pro cardinibus quatuor principalibus. Sed quoad reliqua domicilia, immo quoad omnia generaliter, talis erit consideratio nobis agenda.

Per LIII enim huius duae polares elevationes nobis innotescant, undecimi scilicet atque duodecimi loci, per L quoque huius aut eius sequentes subiecti puncti caelestis aut sideris agnoscamus elevationem polarem | supra 359v

a) Hs. hat *domicilia*. b) Hs. hat *Ioannes*. c) Hs. hat *nascamus*.

Ist er auf der östl. Halbkugel, so bildet man $\alpha - \alpha_M$. Ist $\alpha - \alpha_M > t$, so ist der Stern über dem Horizont und umgekehrt. Ist er auf der westl. Halbkugel, so bildet man $\alpha - \alpha_J$. Ist $\alpha - \alpha_J > 180 - t$, so ist der Stern über dem Horizont und umgekehrt.

Beispiel: $\lambda = 233^0$, $\varphi = 49^0$, $t = 110^0 40'$, $180^0 - t = 69^0 20'$, $\lambda_M = 301^0$, $\lambda_J = 121^0$; Resultat: $\alpha_J = 123^0 14'$, $\alpha = 220^0 35'$, $\alpha - \alpha_J = 107^0 21 > 180^0 - t$, also Stern über dem Horizont.

70. Proposition.

Bestimmung, in welchem „Haus" sich ein Stern befindet, wenn die Häuser nach Johannes Regiomontanus oder nach Campanus oder nach Gasulus von Ragusa bestimmt sind.

suae positionis circulum, per eas quoque propositiones, quae paulo ante sunt positae, non nos lateat data stella seu caeli punctus orientalene teneat hemisphaerium an occidentale, et utrum supra horizontem aut infra eundem constituatur. Denique polarem elevationem undecimi domicilii aliis quoque tribus competere, tertio scilicet domicilio at quinto nonoque. Polarem vero elevationem duodecimi ab horoscopo loci tribus etiam aliis cuspidibus, secundae videlicet ac sextae atque octavae, fore communem.

Quod si pro supposito sidere caelive puncto alio nulla suae positionis inveniatur polaris elevatio, ipsumque sidus aut quodvis caeli punctum, cuius gratia intendimus propositum conficere, supernum caeli teneat hemisphaerium, initio decimi ab horoscopo loci partiliter inhaerere necessario convincitur. Sin autem idem sidus aut caeli punctum subiectum in subterraneo moretur caeli hemisphaerio, ipsum sidus ex necessitate imum terrae possidebit. Ubi vero reperta pro dato sidere elevatio regionis latitudini fuerit aequalis, et ipsum 360r sidus in | orientis hemisphaerio collocetur, horoscopum quoque partiliter obtinebit, aut occasum, si in occiduo caeli hemisphaerio datum sidus habuerit locum.

Postquam autem sidus nec in medio caeli supra terram, nec in imo terrae, neque vel horoscopum vel occasum tenuerit, consideranda est caeli quadra, quam idem sidus occupat; quae si subterrestris orientalis fuerit, quod evenit, cum sidus ipsum in orientali hemisphaerio atque in hemisphaerio superno una simul constituetur, ergo datae stellae polaris elevatio supra suae positionis circulum est comparanda cum duabus poli elevationibus, undecimi scilicet et duodecimi loci; quod si poli sideralis elevatio polari elevationi undecimi loci coaequetur, ipsum sidus undecimum locum partiliter obtinet. Sin autem duodecimi loci elevationi par fuerit, in duodecimo loco partiliter locari convincitur. Quod si poli sideralis elevatio in eadem quadra sidere constituto maior fuerit polari elevatione decimi loci, minor vero[a]) undecimi loci, sidus in decima domo platice locabitur. Sin autem maior elevationi polari, undecimi, minor vero 360v quam duodecimi loci | elevatio, sidus ipsum undecimo loco platice constituetur. At eadem sideris elevatione polari duodecimi loci elevationem superante,

a) *decimi loci, minor vero* fehlt in der Hs.

Man bestimmt zunächst die mit dem Stern gleichzeitig aufgehenden, kulminierenden und untergehenden Ekliptikbögen r_a, r_k und r_d.

Ist $r_K = \lambda_M$ (d. h. = der Länge des gerade kulminierenden Ekliptikpunktes), so steht der Stern im Anfang des 10. Hauses, ist $r_K = 180^0 + \lambda_M = \lambda_J$, so steht er partiliter im „imum terrae“, ist r_a = dem Horoskop h (d. h. = der Länge des gerade aufgehenden Ekliptikpunktes), so steht er partiliter im östlichen Halbkreis des Horizonts, ist $r_d = h + 180^0$, so steht er im Anfang des 1. Hauses und partiliter im westlichen Halbkreis des Horizonts.

Im allgemeinen Fall sucht man nach Prop. 53 die beiden Polhöhen des 11. und 12. Hauses und nach Prop. 50ff. die Polhöhe über dem Positionskreis des Sternes, und untersucht, ob der Stern auf der östlichen oder westlichen Halbkugel und über oder unter dem Horizont sich befindet.

Ist die Polhöhe des Sternes = Null und der Stern über dem Horizont, so steht er partiliter im Anfang des 10. Hauses, ist er unter dem Horizont,

minore tamen, quam sit regionis latitudo, sidus in duodecima domo platice locari concludemus.

Sed sidere posito in quadra super terrestri occiduaque, quod accidit, quando sidus datum simul supra terram atque in hemisphaerio locabitur occiduo, tunc fere idem est habendum indicium de situ sideris vel partili vel platico in septima vel octava vel nona domo.

Sidere posthaec quadram occidentalem subterraneam occupante, quod evenit, quando sidus simul sub horizonte atque in occiduo caeli hemisphaerio ponitur, idem agemus, quod actum est sidere in quadra orientali superterrestri supposito. Nam sicut illic sideris polarem elevationem comparavimus ad duas elevationes polares undecimi et duodecimi loci, sic quoque ibi sideris elevatio polaris conferenda est ad easdem elevationes polares, velut ipsae competunt quinto et sexto loco. |

Dato demum sidere in quadra orientali subterranea constituto, quod accidit sidere subter horizontem collocato atque simul orientale possidente hemisphaerium, quare tunc sideris polarem elevationem, eisdem polaribus elevationibus undecimi et duodecimi loci respectu secundae tertiaeque domus, eo modo, qui dictus est, conferemus, atque intentum nobis non celabitur. 361r

Haec universa meo quidem iudicio sunt adeo perspicua, ut nullis exemplorum elucubrationibus arbitrer indigere, cum ea, velut existimo, vel commodius vel strictius praecipi nequeant.

Non aliter quoque discernemus, in quo caeli domicilio subiectum collocetur sidus, domiciliis scilicet erectis iuxta Campani aut Gasuli opinionem; eodem namque modo sideris polarem elevationem comparabimus cum duabus poli elevationibus undecimi et duodecimi domicilii iuxta Campanum et Gasulum constituti.

Propositio LXXI.

De quolibet sidere seu alio quocunque cae|li puncto dato domiciliis iuxta veterem morem iam constitutis, quod eorum idem sidus aut partiliter aut platice teneat explicare. 361v

Hanc domorum constituendarum rationem in LVII huius enarravi, stellam autem et quodque aliud caeli punctum in aliquo domicilio locari partiliter

---

im Anfang des 4. Hauses (im imum terrae). Ist seine Polhöhe = der geographischen Breite φ, und der Stern auf der östlichen Hälfte, so steht er partiliter im Anfang des 1. Hauses, im Horoskop, ist er auf der westlichen Hälfte, im 7. Hause.

Ist der Stern „unterirdisch und östlich" und seine Polhöhe gleich der des 11. bzw. 12. Hauses, so steht der Stern partiliter im 11. bzw. 12. Hause; ist seine Polhöhe größer als die des 10. Hauses, aber kleiner als die des 11, so steht er platice im 10. Haus, ist sie größer als die des 11., aber kleiner als die des 12, so steht er platice im 11. Haus.

In gleicher Weise werden die 3 anderen Fälle untersucht.

71. Proposition.

Bestimmung der Lage eines Sternes in den Himmelshäusern iuxta veterem morem.

intelligo, cum illius cuspides, hoc est initium possideat. Platice vero in aliquo domicilio locabitur, cum ipsa domicilii nullius obsidet exordium.

Ut autem intentum conficiamus, per LVIII et eas sequentes subiectae stellae seu puncti caelestis dati mediatio caeli perquiratur. Quae si cuspidi alicuius domus similis fuerit, in eadem ipsam partiliter consistere liquebit. Sin autem pro eodem sidere inventa caeli mediatio iuxta signiferarum partium seriem cuspidem aliquam comitetur, cuspidem proxime succedentem antecedens, 362r ergo perspicuum erit, ipsam stellam | seu punctum caelestem datum in eo domicilio, cuius cuspidem sideralis ipsa caeli mediatio comitatur, platicam obtinere positionem; ne hoc quidem problema exemplari luce desiderat illustrari.

Propositio LXXII.

Utrum stellae duae aut plures eandem mundi quartam ex quartis quatuor per meridianum atque horizontem segregatis eodem occupantes tempore in eodem collocentur positionis circulo an non, succinctim investigare.

Igitur cuiuslibet earum de quodcumque fuerit huiusmodi coniunctionis suspicio, polarem elevationem per L aut eius sequentem capiamus, quotcum- 362v que ergo siderum pares sortiuntur polarium elevationum numeros, ea | in eodem positionis coniungi circulo non dubitemus, quaecumque vero polares elevationes habuerint dispares, ea nulla coniunctionis societate foederari certum erit. Haec adeo sunt facilia, ut ampliorem non exposcant declarationem.

Propositio LXXIII.

Quemvis significatorem aut quodcumque caeli punctum ad quemlibet locum iuxta signorum ordinem dirigere.

Steht ein Stern im „Anfang eines Hauses", so sagt man, er stehe „partiliter" in dem Hause, wenn nicht, „platice".

Die Häuser konstruiert man nach Prop. 57, dann sucht man r_K nach Prop. 58. Ist $r_K = \lambda_i$ des $i$ten Hauses, so liegt der Stern partiliter im $i$ten Hause. Ist $\lambda_{i-1} < r_K < \lambda_i$, so liegt er platice im $(i-1)$ten Hause.

72. Proposition.

Untersuchung, ob zwei oder mehrere Sterne, die auf der gleichen Viertelskugel (durch Meridian und Horizont begrenzt) liegen, auch auf dem gleichen Positionskreis liegen.

Man sucht nach Prop. 50 die Polhöhen; sind diese gleich, so liegen die Sterne auf dem gleichen Posititionskreis.

73. Proposition.

Bestimmung der „directio" eines „significator"[1]) oder irgendeines Punktes des Himmels für einen gegebenen Ort der Ekliptik.

1) „Othonis Brunfelsii de Diffinitionibus et terminis Astrologiae libellus isa-

Quid directio vel quod sit significatorem dirigere, supervacaneum arbitror hic explanare, cum id Ptolemaeus in suo Tetramerismo copiose tradiderit, idipsum etiam in ludo suo Pannonico Ioannes de Regiomonte repetens proposito themate luculentum usque adeo effecerit, ut res haec latius enarrari nequeat. Sed ad intentionem propositi redeundum est. |

Significatore itaque horoscopum partiliter obsidente ad subiectam regionis latitudinem significatoris ipsius obliquam quaeremus ascensionem loci, ad quem dirigere velimus, quem idem Ioannes de Regiomonte promissorem appellat. Detracta deinde significatoris ascensione de promissoris ascensione reliquum quaesitam ostendet directionem, qua erit utendum, velut Ptolemaeus et Hali[1]), commentator eius, Alchabitius[2]) quoque et ceteri autores astrologici praecipiunt. 363r

At significatore occiduas partes caeli partiliter obtinente pro eiusdem regionis latitudine obliquam significatoris descensionem obliquae promissorum descensioni detrahentes petitam relinquimus iterum directionem. In caeli autem medio supra terram aut in imo terrae ipso significatore partiliter constituto rectis ascensionibus significatoris et promissoris utamur, perinde atque obliquis iam usi fuimus.

Postquam autem nobis constiterit significatorem non locari in aliquo cardinum quatuor, idest vel in ascendente vel occidente, aut in medio caeli, aut in imo terrae. | Quare per L huius aut eius sequentem poli elevationem supra positionis circulum ipsius significatoris inquiramus, iuxta quam utriusque, significatoris scilicet et promissoris, obliqua sumatur ascensio, si hemisphaerium orientale significator, aut obliqua descensio, si occidentale possideat. Detracta deinde, ut prius, significatoris ascensione vel descensione ex promissoris ascensione vel descensione ipsam habebimus directionem. 363v

Propositio LXXIIII.

Significatorem contra signorum successum dirigere.

Steht der Punkt partiliter im Horoskop, so bestimmt man seine ascensio obliqua und ebenso die des gegebenen Ortes, der von Regiomontanus als „possessor“ bezeichnet wird. Die Differenz dieser beiden Aszensionen ist die gesuchte directio.

Geht der Punkt gerade unter, so rechnet man mit den Deszensionen, kulminiert er, mit den Rektaszensionen.

Hat er eine beliebige Stellung, so bestimmt man die Polhöhe über dem Positionskreis nach Prop. 50, und hierzu die ascensiones bzw. descensiones obliquae des significator und possessor und bildet ihre Differenz.

---

gogicus“. Basel 1551, gibt folgende Definition des „significator“: *Significator regni, planeta, qui plures potioresque praerogativas in medio cardine habet.*

1) Hali, arabisch ʿAlî b. Riḍwân vgl. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. p. 103. Nr. 232. ʿAli verfaßte einen Kommentar zum Quadripartitum des Ptolemäus, der lateinisch herausgegeben wurde. Venedig 1493 und 1519.

2) Alchabitius, arabisch ʿAbd al ʿAziz b. ʿOṯmân b. ʿAlî, Abu'l-Ṣaqr, al-Qabîṣî, näheres vgl. H. Suter a. a. O. p. 60. Nr. 132. Werner meint wohl die von Joannes Hispalensis ins Lateinische übersetzte Schrift: Alchabitii Abdilazi liber introductorius ad magisterium indiciorum astrorum interprete Joanne Hispalensi. Gedruckt Venedig 1485.

Significatoris directio ad promissoris locum contra signorum successionem in eo tantum refert ab eius directione, quae iuxta signorum computatur ordinem, quod utriusque, tam significatoris, quam promissoris ascensiones et descensiones

364r sive rectae sive obliquae | hic ad promissoris inveniuntur positionem. Quapropter opposita contingit ratione ascensionem seu descensionem promissoris ex ascensione descensioneve significatoris auferri, ut desiderata residuet directio.

Propositio LXXV.

Ad quod eclipticae punctum quovis anno proposito significatoris directio iuxta signorum ordinem sit prolapsa, perspicuum facere.

Geniturae tempus, hoc est annos a nativitate salvatoris nostri computatos et usque ad subiectae geniturae momentum excurrentes, ab annis eiusdem Domini salvatoris nostri proposito tempore currentibus auferamus atque pro quolibet differentiae huius anno gradum unum et pro quibusque quinis minu-

364v tis mensem unum | significatoris vel ascensioni vel descensioni, prout eius expostulaverit situs, adicientes obtinebimus vel ascensionem vel descensionem eius arcus in ipsa signiferi peripheria contenti, quo tandem deducemini in cognitionem puncti, ad quem proposito anno directio fuit dilapsa. Nam eandem vel ascensionem vel descensionem differentiae huius aggregatione compositam iuxta polarem significatoris elevationem ex XX aut XXI huius in eclipticae arcum convertentes habebimus intentum.

Sed ne fortassis haec doctrina ob sui brevitatem lectori paulo videatur obscurior, igitur eam tractabo latius. Significatore namque in horoscopo partiliter constituto praemissam ascensionis summam pro subiectae regionis latitudine ad signiferi reducamus arcum; et habetur intentum.

Sin autem significator occiduum geniturae cardinem possiderit, ipsa summa constituetur obliqua descensio, quae iuxta eandem poli elevationem in signiferi portionem mutata iterum liquet propositum. |

365r Quod si in medio caeli aut imo terrae significator partiliter inventus fuerit, ergo praefatae summae aggregatum recta erit ascensio, quae per quintam huius in zodiaci arcum conversa nostram patefaciet intentionem.

Alibi autem significatorem locato consideremus diligenter, utrum ex hemisphaeriis orientalene an occidentale ipse possideat. Si orientale, tunc eadem

---

74. Proposition.

Bestimmung der directio „contra signorum successum".

Man bestimmt die Aszensionen des significator und possessor zum Positionskreis des possessor und bildet wieder die Differenz.

75. Proposition.

Bestimmung der Änderung der directio.

Man bildet die Differenz der beiden Jahre, für die die Vorrückung der directio bestimmt werden soll, und rechnet für jedes Jahr einen Grad und für jeden Monat 5 Minuten. Dann addiert man diese Größe zur Aszension des

aggregationis summa obliqua erit ascensio; qua demum per XX aut XXI huius in eclipticae portionem conversa liquebit intentio.

Quod si dabuntur anni ab momento geniturae usque ad propositam alicuius diei horam recensiti, utendum est illis, perinde atque differentia praemissa. Nam hoc annorum numero vel ascensioni vel descensioni significatoris aggregato, velut res ipsa postulaverit, et aggregationis huius summa, ut ante, in signiferi mutata portionem nostra manifestabitur intentio. Hic opus quoque nullo erit exemplo. | 365v

Propositio LXXVI.

Datis annis a geniturae alicuius momento exactis, quo significatoris directio contra signorum ordinem pertingat, explicare.

Rectae itaque significatoris ascensioni subiectus annorum detrahatur numerus, residuum deinde per sextam huius in signiferi commutetur portionem, qua per LXVIII huius addiscemus, finiatur, ne idem residuum in orientali an occidentali hemisphaerio; eo namque desinente intra hemisphaerium orientale, ex eodem recta medii caeli ascensio dematur, et reliquum erit distantia ab superterrestri meridiani dimidio; quae etiam distantia, si quadrantem superaverit, ea semicirculo sublata reliquum erit distantia eiusdem residuarii finis, a subterraneo meridiani dimidio, cum eadem igitur distantia per L huius, si | careat significator declinatione, aut per LI[a]), declinationem si possideat 366r significator, atque cum eadem significatoris declinatione polaris excipiatur elevatio, iuxta quam per XVI huius obliqua significatoris accipiatur ascensio, cui subiectus annorum numerus auferatur, et reliquo pro eadem poli elevatione in arcum zodiaci commutato liquebit propositum.

Non multo aliter agendum est eodem residuo finem habente in occiduo caeli hemisphaerio. Nam imi terrae ascensiones rectae ex eodem residuo, ut pridem, subtrahuntur, reliquum, si quadrante minus extiterit, pro distantia finis residui a meridiano erit habendum.

Sin autem idem residuum quadrantem exsuperaverit, eo ex grad. CLXXX sublato, quod remanet idonea erit distantia, cum qua et declinatione significatoris, si quam ipse possideat, per LI aut per L, si declinatione idem careat, polaris quaerenda est elevatio, et pro sua ratione descensionem significatoris

a) Hs. hat L.

---

significator und verwandelt den erhaltenen Bogen nach Prop. 20 in einen Ekliptikbogen.

76. Proposition.

Bestimmung der Änderung der directio contra signorum ordinem.

Man subtrahiert den den Jahren entsprechenden Bogen (j) von der Rektaszension des significator (α_s), verwandelt den Rest nach Prop. 6 in einen Ekliptikbogen (λ_1) und entscheidet durch Vergleich mit λ_M, ob der Endpunkt auf der östlichen oder westlichen Halbkugel liegt. Dann ist $|(\alpha_s - j) - \alpha_M|$ die Meridiandistanz (t) dieses Punktes. Aus Prop. 51 ergibt sich dann aus dieser

obliquam scrutemur, cui inventae subiectus dematur annorum numerus, et
366v reliquo pro | descensione sumpto obliqua, et ipsa per XX huius aut eius sequentem in arcum signiferi conversa quaesitus innotescet zodiaci punctus, in quem retroactis annis directio contra signorum successionem fuerat prolapsa. Quod praeceptum tali declarabitur exemplo.

Sit in genitura quapiam ad regionem, cui polus mundi septentrionarius attollitur grad. XXXXIX, medium caeli grad. IIII min. VIII sagittarii, cuius ascensio erit partium CCXLII min. VIII fere, imum autem terrae constituetur in partibus IIII min. VIII geminorum, cui recta numerabitur ascensio partium LXII et min. VIII fere. Sitque significator iuxta medium caeli in partibus III capricorni, cuius meridionalis ab aequatore est grad. V declinatio. Nunc ergo volens explorare, ad quod zodiaci punctum eiusdem significatoris directio contra solaris itineris seriem anno geniturae XXX currente proveniat. Igitur ascensiones significatoris rectas per V huius invenio partium CCLXXIII min.
367r XVII, quibus sublato triginta annorum, qui | completi sunt, numero erit reliquum grad. CCXXXXIII min. XVII, quibus tanquam rectae ascensioni per VI huius signiferi accommodabitur arcus, quem ab signorum initio numeratum gradus sextus terminat sagittarii, quo liquet praemissum residuum partium CCXLIII min. XVII in orientis hemisphaerio finiri, cui deinceps residuo detractis rectis medii caeli ascensionibus relinquitur pars una cum minutiis IX, quae cum quadrantem non exsuperant, finis eiusdem residui a meridiano distantiam exhibebunt, cum eadem distantia partis I[b]) et min. IX, atque cum praemissa declinatione grad. V per LI huius invenio polarem elevationem gradus unius et min. XXX, ad hanc elevationem poli pro III gradibus capricorni sive pro ipso significatore subiecto obliquam invenio ascensionem partium CCLXXIIII min. XXII, quibus pro pro annis XXX grad. demens XXX relinquo partes CCXLIIII min. XXII. His pro inventa poli elevatione per XX huius aut eius sequentem in signiferi arcum conversis arcus prodetur, quam finiunt grad. V min. XXXXV sagittarii, quo praeteritis a geniturae momento annis XXX

a) Hs. hat X.

Meridiandistanz (t) und der Deklination des significators (δ_s), die Polhöhe (π) und hieraus mit Prop. 16 die ascensio obliqua des significator (α_1). Dann bildet man $\alpha = \alpha_1 - j$ und verwandelt noch α in den entsprechenden Ekliptikbogen λ.

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $\lambda_M = 244^0\,8'$, $\alpha_M = 242^0\,8'$, $\lambda_J = 64^0\,8$, $\alpha_J = 62^0\,8'$, $\lambda_s = 273^0$, $\delta_s = 5^0$, $j = 30$. Resultate: $\alpha_s = 273^0\,17'$(!), $\alpha_s - j = 243^0\,17'$, $\lambda_1 = 246^0$; $t = \alpha_M - (\alpha_s - j) = 1^0\,9'$, $\pi = 1^0\,30'$, $\alpha_1 = 274^0\,22'$, $\alpha_1 - j = \alpha = 244^0\,22'$, $\lambda = 245^0\,45'$.

77. Proposition.

Bestimmung der Rektaszension und Deklination, sowie der Länge und Breite eines Sternes aus seiner Höhe, seinem Azimut (Meridiandistanz) und der Länge von M. (Fig. 49.)

Steht der Stern im Meridian, so ist $\delta = h - (90^0 - \varphi)$.

Im allgemeinen Fall bildet man: $\cos \mathrm{I} = \sin A \cdot \cos h$ (Aufg. 3, $\mathrm{I} = \Sigma\mathfrak{W}$ im $\triangle \Sigma\mathfrak{W}H$), dann $\operatorname{tg} \mathrm{II} = \operatorname{tg} h : \cos A$ (Aufg. 4, $\mathrm{II} = \sphericalangle H\mathfrak{W}\Sigma$ im

directio significatoris propositi contra zodiaci seriem fuit progressa; quod est intentio.

Propositio LXXVII.

Cognita sideris alicuius supra quemlibet horizontem altitudine, ad idem quoque momentum et caeli medio atque eiusdem sideris a meridiano recessu horizontali eius ascensionem quoque rectam atque ab aequatore declinationem, his demum verum sideris locum, tam in longitudine, quam in latitudine, explorare. |

Subiecti sideris meridianum possidentis comparanda est altitudo regio- [368r] nariae latitudinis complemento. Quod si altitudine sideris exsuperetur, ipsum ex ea sublatum sideris declinationem relinquit borealis denominationis. Sin autem sideralis altitudo idem non excesserit complementum, eoque minor extiterit, tunc altitudo sideralis eidem complemento sublata sideris rursus declinationem relinquit, quae ad austrinam quidem caeli partem declinet.

At sidere extra meridianum collocato cum distantia ex eodem, quo minor sit quadrante; igitur intrandum est ad ipsum organum tertio introitu cum distantiae complemento supra basim recensito atque cum data sideris altitudine; arcus itaque inventus esto inventum primum; sicque manente regula per quartum introitum secundum accipiamus inventum, quod regionariae latitudinis complemento detrahamus, si eo minus extiterit, aut econtra regionariae latitudinis complementum secundo demamus invento, si ipsum maius fuerit eodem | complemento; quod ita relinquitur, cum invento primo per introitum [368v] secundum quaesitam prodet nobis declinationem, borealem quidem, si secundum inventum extiterit maius regionariae latitudinis complemento, meridionalis vero, si complementum idem secundo superius extiterit invento. At ubi secundum inventum regionariae latitudinis aequabitur complemento, sidus ipsum in aequatoris obtinet peripheria sedem. Prorsus itaque cuncta idem sidus privabitur declinatione. Data deinde distantia quadrantem aequante sideris altitudo cum regionis latitudine per introitum secundum declinationem nobis exhibebit sep-

---

$\triangle H\mathfrak{W}\Sigma$), $x = |\mathrm{II} - (90^0 - \varphi)|$, und $\sin\delta = \sin x \sin \mathrm{I}$ ($\delta = \Sigma D$ im $\triangle \Sigma D \mathfrak{W}$). δ hat das Vorzeichen von x.

Ist $\mathrm{II} = 90^0 - \varphi$, so ist $\delta = 0$.

Ist $A = 90^0$, so bildet man $\sin\delta = \sin h \cdot \sin\varphi$ (Aufg. 2, es wird $\mathrm{I} = h$ und $x = \varphi$, da $\mathrm{II} = 90^0$).

Ist $A > 90^0$, so ist zu setzen: $x = \mathrm{II} + 90^0 - \varphi$. Ist $x < 90^0$, so ist wieder $\sin\delta = \sin x \cdot \sin \mathrm{I}$; ist $x = 90^0$, so ist $\delta = \mathrm{I}$, ist endlich $x > 90^0$, so rechnet man mit $180^0 - x$.

Beispiel: $h = 77^0$, $\varphi = 19^0$, $A = 60^0$, $\lambda_M = 19^0$. Resultate: $\mathrm{I} = 79^0$, $\mathrm{II} = 83^0$, $x = 42^0$, $\delta = 41^0$.

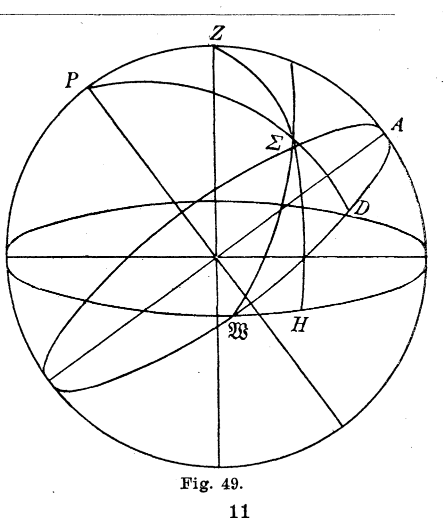


Fig. 49.

temtrionalem. Denique distantia ipsa quadrantem exsuperante, id est, si ea gradus LXXXX excesserit, igitur ipsi quadrantem demamus, reliquum supra basim computatum cum altitudine per tertium inferentes introitum eliciamus inprimis inventum primum, deinde sic regula quiescente quarto introitu secundum comprehendamus inventum, quod regionariae latitudinis deinde iungatur complemento. Hoc denique aggregatum, si quadrante minus extiterit, cum in-369r ven|to primo per secundum introitum declinationem educet nobis desideratam. At eodem aggregato quadrantem aequante tunc primum inventum praestabit declinationem, cum autem aggregatum hoc gradus LXXXX superaverit, ipsum demendum est semicirculo; reliquum vero deinde cum invento primo per introitum secundum quaesitam praebebit declinationem; quoties denique distantia a meridiano horizontalis quadrantem exsuperaverit, declinatio semper borealem sortietur appellationem.

Esto igitur exempli causa sidus aliquod datum, cuius altitudo[a]) constat grad. LXXVII supra horizontem, cuius latitudo sit parti. XLIX. Distantia deinde horizontalis inter circulum altitudinis atque meridianum comprehensa sit graduum sexaginta. Eiusdem denique sideris caeli mediatio sit in gradu arietis XIX completo. Propositum esto sideris huius declinationem perscrutari. Quare cum datae distantiae complemento graduum XXX super basim recensito per tertium ingrediens introitum excipio primum inventum fere partium LXXIX, 369v sicque manente regula secundum inventum graduum LXXXIII quarto | nanciscor introitu; deinde huic secundo invento grad. LXXXIII complementum regionariae latitudinis auferens relinquo grad. XXXXII, quibus demum atque invento primuo partium LXXIX per introitum secundum quaesita prodibit declinatio, borealis quidem appellationis, grad. XXXXI fere; quod est intentum.

Eandem deinceps declinationem solis aequedistantibus sic investigabimus; ipsam namque distantiam quadrante minorem cum datae altitudinis complemento per secundum inferamus introitum, inventique arcus complementum pro primo conservetur invento; quod deinde cum ipsa subiecti sideris altitudine primo aut quinto si introducatur introitu, secundum proferet intentum, quod regionariae latitudinis complemento sublatum aut contra, minus scilicet a maiori, reliquum cum invento primo intromissum secundo meteoroscopii introitu praebebit nobis declinationem quaesitam, borealem quidem, si secundum 370r inventum superius fuerit regionariae latitudinis comple|mento, austrinam vero, si contra complementum regionariae latitudinis exsuperaverit inventum secundum. Ubi vero distantia haec horizontalis quadrantem coaequaverit, operabimur inxta traditionem praemissam.

At eadem distantia quadrantem excedente ipsam semicirculo demamus, reliquum cum altitudinis complemento per secundum inducamus introitum inventique arcus complementum pro primo rursus conservetur invento; quod

---

a) Hs. hat *latitudo.*

Lösung per aequedistantes.

Ist $A < 90^0$, so bildet man $\cos \mathrm{I} = \sin A \cdot \cos h$ (Aufg. 2, wie oben), dann $\sin \mathrm{II} = \frac{\sin h}{\sin \mathrm{I}}$ (Aufg. 1), endlich, wie oben, x und $\sin \delta = \sin x \cdot \sin \mathrm{I}$. Die Fälle $A \geqq 90^0$ werden wie oben behandelt. Beispiel ebenso.

deinde cum ipsa altitudine primo aut quinto illatum introitu secundum porriget inventum, quod complemento regionariae latitudinis addamus; aggregatum deinde hoc, si quadrante minus extiterit, cum primo invento per secundum inducentes introitum declinatio nos non latebit.

At eodem aggregato LXXXX grad. aequante, ut dictum est, declinatio primum aequiparabit inventum. Sin autem hoc ipsum aggregatum quadrante fuerit superius, eo gradibus | CLXXX subtracto residuum cum invento primo [370v] per introitum secundum desideratam prodet declinationem.

Quando itaque subiecta distantia quadrantem exsuperaverit, borealem semper invenemus declinationem.

Exemplum itaque praecedens repetamus, in quo sidus subiciebatur cum altitudine grad. LXXVII supra horizontem, cuius latitudo partium XLIX, cum distantia vero horizontali grad. LX, et iterum sit intentio sideris eiusdem reperire declinationem. Ergo secundo ingrediens introitu cum data distantia grad. LX atque cum complemento sideralis altitudinis partium XIII excipio fere grad. XI, quorum complementum partium LXXIX primum statuens inventum cum ipsa altitudine grad. LXXVII primo vel quinto inferam introitu et habebo inventum secundum partium LXXXIII; ex eis auferens regionariae latitudinis complementum grad. XXXXI partes relinquuntur XLII, quas demum cum invento primo per secundum inducens introitum petitam produco declinationem borealis denominationis grad. XXXXI; quod rursus est intentum. |

Sed rectam demum ascensionem sic reperiamus. [371r]

Fiat introitus primus aut quintus cum complemento inventi primi et cum complemento repertae declinationis; arcus itaque inventus medii caeli dati rectis ascensionibus adiciatur, si distantia horizontalis fuerit minor quadrante, et ipsum sidus orientale possideat caeli hemisphaerium, aut sidere idem occupante hemisphaerium cum distantia quadrantem exsuperante, dum ipsum aggregatum ex complemento regionariae latitudinis et invento secundo quadrantem excesserit; aut idem arcus inventus ex subiecta caeli medii recta ascensione auferatur ipso sidere possidente occidentale hemisphaerium cum distantia minore grad. LXXXX aut etiam maiore, dummodo aggregatum ex complemento latitudinis regionariae atque invento secundo quadrantem excesserit.

Quando autem distantia horizontalis quadrante fuerit maior atque idem aggregatum quadrante minus, inventus arcus rectis ascensionibus imi caeli detrahendus est, si hemi|sphaerium orientale stella possideat, aut adiciendus, [371v] si teneat occidentale; ita namque subiecti sideris recta proferetur ascensio. Ubi demum distantia horizontali maiore, quam sit quadrans, supposita memorata aggregationis summa quadrantem aequaverit, pro dato sidere punctus caeli mediationis erit caput arietis, si stella hemispherium possideat orientale et datum caeli medium in medietate zodiaci constiterit ascendente, sin autem,

---

Bestimmung der Rektaszension.

Man bildet $\sin y = \frac{\cos \mathrm{I}}{\cos \delta}$ (Aufg. 1, $\mathfrak{W}D = 90^0 - y$, $AD = y$). Dann ist $\alpha = \alpha_M + y$, wenn $A < 90^0$ und der Stern auf der östlichen Halbkugel, ferner wenn $A > 90^0$, der Stern auf der östlichen Halbkugel und $x > 90^0$.

in descendente, librae principium pro dato sidere caeli mediationem locabit. Contra vero continget, si observatum sidus in occidente hemispherio sedem habuerit. Nam tunc M. C. descendentem possidente zodiaci semicirculum arietis caput sideri praebebit locum caeli mediationis, medietatem vero eclipticae ascendentem obtinente medio caeli librae initium pro dato sidere caeli mediationem locabit.

Habitis itaque rectis ascensionibus per sextam huius punctum eclipticae, quo datum sidus meridiano insidet, non ignoremus; quo cognito demum cum 372r declinatione eius | quoque nota per LXI huius tertia huius propositi pars nos non effugiet. Sciemus namque per eandem LXI verum sideris subiecti in signifero locum et ab ecliptica latitudinem, quod tandem erit intentum.

Haec ita se habent, quando regio, in qua talem fecimus observationem, latitudinis fuerit septemtrionalis. Nam si polum conspexerit austrinum, praecedentis operis traditionem pro declinatione atque recta invenienda sideris ascensione penitus imitabimur. Sed eo tantum refert opus ipsum, ut, ubi in regione borealis latitudinis borealem reperimus declinationem, ibi pro austrina regione contra declinationem inveniemus austrinam vicissimque pro austrina septemtrionalem.

At loco nostrae sideralis inspectionis subter aequatorem posito intentum hac investigabimus via.

372v Cum igitur aequatoris circulus in eodem loco per verti|cem eius ingrediens sublime separet caelum in duas partes aequaliter, quarum altera in septemtrionem, altera vero in austrum spectet horizonte per polos etiam mundi prodeunte, quare horizontalis distantia sideris ab aequatore per organum aliquod sumpta cum ipsius altitudinis complemento ad meteoroscopium secundo inferatur introitu. Arcus itaque repertus quaesita statuetur declinatio, septemtrionalis quidem, si distantia horizontalis ab aequatore fuerit borealis, austrina vero erit declinatio, si distantia huiusmodi in austrum ab aequatore vergat. At rectam ascensionem eiusdem sideris ita inveniemus, primo enim aut quinto introitu meteoroscopium petentes cum complemento declinationis inventae at-

---

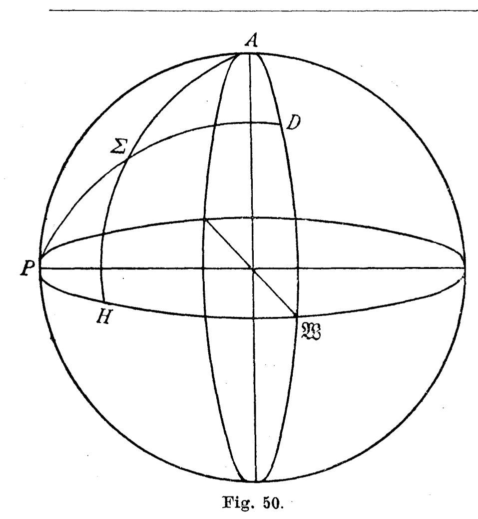


Fig. 50.

$\alpha = \alpha_M - y$, wenn der Stern auf der westlichen Halbkugel und $A < 90^0$, ferner wenn $A > 90^0$, aber auch $x > 90^0$ ist.

Ist $A > 90^0$ und $x < 90^0$, so ist $\alpha = \alpha_M \pm y$, je nachdem der Stern auf der östlichen oder westlichen Halbkugel sich befindet.

Ist endlich $A > 90^0$ und $x = 90^0$, so wird $\alpha = \alpha_M \pm 90^0$, je nach der Lage des Sternes.

Die Länge und Breite des Sternes werden nach Proposition 6 und 59 bestimmt.

Für einen Ort südlicher geographischer Breite kehren sich die Vorzeichen von δ um.

que cum altitudine subiecta comprehendemus arcum, cuius complementum addatur ascensioni rectae medii caeli, si distantia horizontalis orientem inspiciat, aut dematur, si occasum, hac deinde ascensione recta per sextam huius pro dato sidere caeli mediatio prodibit. |

Denique per LVI huius verum eius locum, tam in longitudine, quam in latitudine, comperiemus, quod erat propositum. 373r

Esto igitur in regione quapiam aequatori supposita medium caeli cancri principium, quando sideris alicuius observati fuerat altitudo grad. LX cum distantia horizontali in septemtrionem vergente partium XXX atque cum distantia horizontali ab aequatore grad. etiam XXX; quaesitam elicio declinationem partium XIIII min. XX septemtrionaream, quoniam horizontalis distantia septemtrionalis subiciebatur.

Rursus primo vel quinto ad meteoroscopium remeans introitu cum repertae declinationis complemento graduum LXXV min. XXXX atque cum subiecta sideris altitudine partium LX refero gradus LXIII et min. XX fere, quorum complementum partium XXVI min. XXXX additum quadranti — nam tanta est M. C. ascensio recta — producuntur partes CXVI et min. XXXX, ascensio scilicet recta mediationis caeli pro dato side|re; quibus itaque compertis reliqua, quae proponuntur, per sextam et LXI huius deinceps non ignorabimus. 373v

Propositio LXXVIII.

Veris duorum siderum aut aliorum caeli punctorum locis, tam in longitudine, quam in latitudine, cognitis eorundem interstitium erutinare.

Interstitium hoc magni circuli arcus est siderum duorum umbilicis conclusus. Cum autem proposita sidera eundem zodiaci punctum obtineant, eorundem latitudinalis sumatur differentia, si utrumque latitudinem eiusdem partis obtinuerit; talis enim differentia siderale praebebit interstitium. At si stellae

---

Ist die geographische Breite $= 0$ (Fig. 50), so bildet man, wenn $H = H\mathfrak{W}$ $=$ der Horizontaldistanz des Sternes vom Äquator ist, $\sin\delta = \sin H \cdot \cos h$ (Aufg. 2) ($90^0 - \delta = P\Sigma$ in $\triangle P\Sigma H$); δ ist positiv, wenn H nach Norden gemessen ist.

Bildet man $\cos y = \frac{\sin h}{\cos \delta}$ (Aufg. 1, $y = AD$), so ist $\alpha = \alpha_M \pm y$.

Beispiel: $\lambda_M = 90^0$, $h = 60^0$, $A = 60^0$, $H = 30^0$ (gegen Norden) $\delta = 14^0\,20'$, $y = 26^0\,40'$ $\alpha = 116^0\,40'$.

78. Proposition.

Bestimmung des Abstandes zweier nach Länge und Breite bekannter Sterne.

Es sei der Abstand $= i$, die Breiten und Längen β_1, β_2 und λ_1, λ_2.

1. Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist $i = \beta_1 - \beta_2$. Dabei können β_1 und β_2 positiv oder negativ sein.

2. Ist $\beta_1 = \beta_2 = 0$, so ist $i = \lambda_1 - \lambda_2$.

sic positae in eodem eclipticae loco latitudines habuerint ad diversas plagas, 374r igitur latitudinibus earum | iunctis ipsum emerget interstitium.

Sed ipsis stellis in ecliptica positis absque ulla latitudine locorum differentia praebebit earum interstitium. Sideribus autem suppositis aequalium latitudinum eiusdem denominationis, secundo igitur introitu ingrediendum est ad meteoroscopium cum dimidio longitudinalis differentiae atque cum alterius latitudinum complemento, arcusque reperti[a]) duplum pro siderali servetur interstitio.

Velut subiectis duabus stellis, quarum unius sedes habeatur in fine quindecimi gradus arietis, altera vero finem possideat quindecimae partis tauri. Esto quoque, ut utriusque latitudo vel borealis vel austrina grad. XXVI amplectatur. Igitur secundo ingrediens introitu cum differentiae longitudinalis dimidio partium XV atque cum complemento communis latitudinis grad. LXIIII reperio partes XIII et semis, quibus duplicatis interstitium resultat quaesitum grad. XXVII.

374v Sin autem subiectorum siderum diversae fuerint et | ad eandem signiferi plagam latitudines, verorum tum locorum differentia LXXXX gradibus minore constituta, igitur cum differentia hac atque cum brevioris latitudinis complemento per introitum secundum organo incidentes primum elicimus inventum.

Cum eius deinde complemento atque cum minore latitudine per introitum primum aut quintum alius a nobis excipiatur arcus, quo maiori latitudini detracto reliquum statuatur inventum secundum, cuius demum complemento cum primi complemento inventi per introitus secundi[b]) ianuam intra meteoroscopium remisso arcus profertur, quo gradibus LXXXX[c]) detracto siderale relinquetur interstitium.

Velut datis duobus sideribus, ex quibus alterum ex arietis signo quintaedecimae partis termino insideat cum latitudine vel boreali vel austrina grad. XXVI, alterum vero in fine quinti decimi gradus tauri locum habeat cum la- 375r titudine denominationis e|iusdem grad. XXXX. Ut ergo de his sideribus habeam propositum, ad organum ipsum secundo introitu imprimis accedens cum minoris latitudinis complemento grad. LXIIII atque cum verorum locorum diffe-

a) Hs. hat *reperti* korr. aus *comperti*. b) Hs. hat *quarti*.
c) Hs. hat *LXXXX* korr. aus *LXXXXII*.

---

3. Ist $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, so bildet man $\sin\frac{i}{2} = \sin\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\cdot\sin(90^0 - \beta)$. (Aufg. 2.)

Beispiel: $\lambda_1 = 15^0$, $\lambda_2 = 45^0$, $\beta = \pm 26^0$. Resultat: $\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = 15^0$, $i = 27^0$.

4. Ist $\beta_1 > \beta_2$, aber beide positiv, und $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda < 90^0$, so bildet man (Fig. 51) $\sin \mathrm{I} = \cos\beta_2\cdot\sin\lambda$ (Aufg. 2, $\mathrm{I} = \Sigma_2 S$ im $\triangle PS\Sigma_2$), dann $\sin x = \frac{\sin\beta_2}{\cos \mathrm{I}}$ $\Big($Aufg. 1, $x = B_1 S$, zieht man $B_1\Sigma_2 = y$, so gilt $\cos\beta_2\cdot\cos\lambda = \cos y$, $\cos \mathrm{I}\cdot\cos x = \cos y$, hieraus $\cos x = \frac{\cos\beta_2\cos\lambda}{\cos \mathrm{I}}$, hieraus ergibt sich, wenn man λ mit $\sin\lambda = \frac{\sin \mathrm{I}}{\cos\beta_2}$ eliminiert, $\sin x = \frac{\sin\beta_2}{\cos \mathrm{I}}\Big)$, dann $\mathrm{II} = \beta_1 - x$ ($\mathrm{II} = \Sigma_1 S$) und endlich $\cos i = \cos \mathrm{I}\cdot\cos \mathrm{II}$ (Aufg. 2, $i = \Sigma_1\Sigma_2$ im $\triangle\ \Sigma_1\Sigma_2 S$).

rentia grad. XXX primum excipio inventum partium XXVI min. XXX fere, quibus ex partibus XC sublatis atque cum reliquo graduum LXIII min. XXX cumque minori latitudine primo vel quinto introitu meteoroscopium repetenti mihi partes offeruntur XXIX et semis fere, quibus ex latitudine maiori sublatis secundum remanet inventum grad. X et min. XXX. Horum demum complemento cum inventi primi complemento iuxta instrumentum hoc per introitum secundum demerso partes offeruntur LXI min. XXXX, quibus quadranti detractis interstitii diu investigata quantitas relinquitur partium XXVIII cum tertio unius, quod oportuit reperire.

Diversis deinceps latitudinibus ad eandem plagam | oblatis cum differentia verorum locorum quadrantem aequante secundus fiat introitus cum utrisque latitudinibus, arcus itaque repertus, si gradibus LXXXX detrahatur, interstitium relinquit quaesitum. 375v

Velut si una stella fuerit in arietis exordio cum latitudine vel austrina vel boreali grad. XXVI, altero vero in cancri principio cum eiusdem partis latitudine grad. XXXX. Harum itaque volens interstitium computare, secundo introitu ingredior cum utrisque latitudinibus et partes excipio XVI cum min. XV fere. His quadranti detractis gradus LXXIII min. XXXXV interstitii desiderati remanent.

Denique differentia longitudinali pro sideribus suppositis subiecta maiore, quam sit quadrans, minore vero, quam semicirculus, subtrahendus est quadrans longitudinis differentiae, reliquum et complementum maioris latitudinis per introitum secundum meteoroscopio introductum | primum proferat inventum, 376r cuius complemento atque maiori latitudine per primum aut quintum introitum arcus ducatur, qui secundum esto inventum, cuius deinde complemento et latitudine minore per introitum secundum arcus tertii reperiatur inventi, cuius complemento atque minoris latitudinis complemento per primum aut quintum introitum arcum reperiamus, quo sublato de grad. LXXXX quartum remanebit inventum, quo iuncto ad inventi primi complementum erit haec aggregationis summa inventum quintum, cuius demum complemento atque complemento tertii inventi secundus si fiat introitus, arcum obtinebimus, quo ad quadrantem coniecto quaesitum constabit interstitium, et ita faciendum est, quando inventum primum fuerit maius invento quarto.

Beispiel: $\lambda_1 = 15^0$, $\beta_1 = 26^0$, $\lambda_2 = 45^0$, $\beta_2 = 40^0$. Resultate: $\mathrm{I} = 26^0 30'$, $x = 29\frac{1}{2}^0$, $\mathrm{II} = 10^0 30'$, $i = 28^0 20'$.

5. Ist $\beta_1 \gtrless \beta_2$ und $\lambda = 90^0$, so bildet man $\cos i = \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2$ (Aufg. 2, im $\triangle P\Sigma_1\Sigma_2$ ist $\sphericalangle P = 90^0$).

Beispiel: $\lambda_1 = 0$, $\beta_1 = 26^0$, $\lambda_2 = 90^0$, $\beta_2 = 40^0$. Resultat: $i = 73^0 45'$.

6. Ist $\beta_1 > \beta_2$ und $90^0 < \lambda < 180^0$, so bildet man (Fig. 52) $\sin \mathrm{I} = \sin(\lambda - 90^0) \cdot \cos\beta_1$, (Aufg. 2, $B_1B_2 = \lambda$, $B_1\Sigma_2 = \beta_1$, $\Sigma_1 B_2 = \mathrm{I} + 90^0$), $\sin \mathrm{II} = \frac{\sin\beta_1}{\cos \mathrm{I}}$ (Aufg. 1, $\mathrm{II} = \sphericalangle \Sigma_1 B_2 B_1$), $\sin \mathrm{III} = \cos \mathrm{II} \cdot \sin\beta_2$ (Aufg. 2, $\mathrm{III} = \Sigma_2 D$), $\cos \mathrm{IV} = \frac{\cos\beta_2}{\cos \mathrm{III}}$ (Aufg. IV =

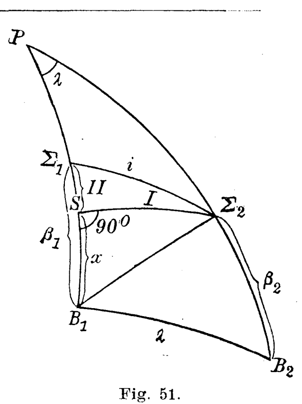


Fig. 51.

At si quartum inventum primo par fuerit, ipsius interstitii arcus quadrantem aequabit; quare iterum nostra constabit intentio.

Ubi vero primum inventum minus fuerit invento quarto, quintum inventum grad. LXXXX superabit necessario; igitur ex invento quinto quadrantem 376v au|feramus, reliquum cum inventi tertii complemento per introitum secundum sextum producet inventum, quod quadranti detrahentes propositum relinquimus.

Sint ergo sidera duo, quorum unum in arietis capite sedem teneat cum latitudine partium XXX, alterum in principio virginis verum habeat locum cum latitudine partis eiusdem grad. LX et propositum esto reperire interstitium unius ad alterum; igitur per introitum secundum ingrediens cum maioris latitudinis complemento partium XXX atque cum grad. LX, quibus differentia longitudinis quadrantem superat, invenio primum inventum partium XXV min. XXX, cuius deinde complemento grad. LXIIII et semis atque cum maiori latitudine partium LX per primum aut quintum introitum deprehendo secundum inventum grad. LXXIII et semis, cuius demum complemento grad. XVI min. XXX et minori latitudine partium XXX elicio introitu[a]) secundo[b]) in-377r ventum tertium grad. VIII, quo|rum complemento partium LXXXII atque minoris latitudinis complemento per primum aut quintum introitum partes produco LXI, quibus ex partibus XC detractis quartum remanet inventum grad. XXIX. Quod si primi congregavero inventi complemento, quintum excrescet inventum partium XCIII et semis. Quibus quadrante detracto gradus remanebunt III et semis; eis demum et inventi tertii complemento partium LXXXII per introitum secundum produco grad. III cum min. XX, quibus denique quadranti sublatis quaesitum relinquitur interstitium partium LXXXVI min. XXXX[c]); quod est intentum.

Quod si longitudinum differentia maiore grad. LXXXX, minore tum grad. CLXXX proposita sidera pares habuerint ad eandem plagam latitudines, haud secus agendum est atque posita minore differentia longitudinum, quam sit quadrans, aequis ad eandem quoque partem latitudinibus.

Ubi vero longitudinis differentia semicirculum impleverit, latitudines si-

a) Hs. hat *introitum*. b) Hs. hat *secundo* korr. aus *secundum*.
c) Hs. hat *XXX*.

DB_2), $V = IV + (90^0 - I)$ $(V = \Sigma_1 D = \Sigma_1 B_2 - DB_2)$, $\sin(i - 90^0) = \cos III \cdot \cos V$ (Aufg. 2, $i = \Sigma_1 \Sigma_2$) (hierbei ist $I > IV$, dann ist $V < 90^0$).

Ist $I = IV$, so ist $V = 90^0$ und somit $i = 90^0$.

Ist $I < IV$, so ist $V > 90^0$ und $\sin VI = \sin(V - 90^0) \cdot \sin III$, $i = 90^0 - VI$.

Beispiel: $\beta_1 = 60^0$, $\beta_2 = 30^0$, $\lambda_1 = 150^0$, $\lambda_2 = 0^0$. Resultate: $I = 25^0 30'$, $II = 73\frac{1}{2}^0$, $III = 8^0$, $IV = 29^0$, $V = 93\frac{1}{2}^0$, $VI = 3^0 20'$, $i = 86^0 40'$.

7. Ist $90^0 < \lambda < 180^0$ und $\beta_1 = \beta_2$, so ist der Fall wie oben, wenn $\lambda < 90^0$ und $\beta_1 = \beta_2$.

8. Ist $\lambda = 180^0$, so ist $i = 180^0 - (\beta_1 + \beta_2)$, wenn β_1 und β_2 das gleiche Vorzeichen haben.

Haben β_1 und β_2 verschiedene Vorzeichen, so ist in diesem Falle: $i = \beta_1 + 180^0 - \beta_2$.

9. Ist $\lambda < 180^0$ und $\beta_1 = -\beta_2$, so ist $\cos\frac{i}{2} = \cos\beta_1 \cdot \cos\frac{\lambda}{2}$.

derum iungantur, si eius|dem fuerint appellationis. Hoc itaque aggregatum semicirculo sublatum quaesiti relinquit interstitii quantitatem, breviorem videlicet. 377v

At tali longitudinis differentia subiecta cum latitudinibus diversae denominationis, igitur latitudinum altera semicirculo sublata arcum relinquit, quo alteri latitudinum addito quaesitum rursus interstitium constabit. Hoc itaque pacto alterum interstitiorum vel brevius vel prolixius habebitur; utro posthaec eorum de grad. CCCLX[a]) sublato reliquum manifestat interstitium.

Huiusmodi enim interstitia, duo pariter accepta partes integri circuli CCCLX continent. Sed datis duorum siderum latitudinibus aequis ad diversas ab aequatore plagas cum longitudinis differentia[b]), quae minor sit semicirculo, igitur ea per aequa scindatur, et eius dimidii complementum cum complemento alterius latitudinum per secundum si deducatur introitum, arcus qui|dam prodibit, quo ex LXXXX grad. ablato et eo, quod remanet, duplato nobis constabit inventum. 378r

Sint ergo causa exempli duo sidera longitudinis habentia differentiam grad. CXX et alterum quidem latitudinem teneat borealem partium LX, alterum vero totidem obtineat graduum latitudinem austrinam. Volens ego illorum invenire interstitium, sumo longitudinalis differentiae dimidium grad. LX eosque quadranti detrahens et residuum partium XXX cum paris latitudinis complemento grad. quoque XXX per secundum inducens introitum comperio partes XIIII cum minutiis XX fere, quibus quadranti sublatis gradus remanent LXXV min. XXXX.

His demum duplatis interstitium, quod desiderabatur, resultat grad. CLI mi. XX.

Diversis vero siderum datorum latitudinibus ad varias eclipticae partes oblatis, cum differentia longitudinali LXXXX[c]) gradibus minore, igitur secundus fiat introitus cum eadem longitudinis differentia atque cum complemento latitudinis austrinae ac deinde | primus exerceatur aut quintus introitus, 378v

---

a) Nach *CCCLX* hat Hs. die Worte *continet, sed datis duorum siderum* (vgl. unten!) gestrichen.
b) Hs. hat *differentiae*. c) Hs. hat *LXXXXX*.

Beispiel: $\lambda = 120^0$, $\beta_1 = -\beta_2 = 60^0$. Resultat $i = 150^0 20'$.

10. Ist $\lambda < 90^0$ und haben β_1 und β_2 entgegengesetztes Vorzeichen, es sei z. B. β_2 negativ, so bildet man, wie oben, $\sin \mathrm{I} = \cos\beta_2 \sin\lambda$, $\sin x = \frac{\sin\beta_2}{\cos \mathrm{I}}$, dann aber $\mathrm{II} = 90^0 - x + 90^0 - \beta_1$, und $\sin\mathrm{III} = \cos\mathrm{I}\cdot\cos\mathrm{II}$, endlich $i = \mathrm{III} + 90^0$.

Ist $\mathrm{II} = 90^0$, so wird auch $i = 90^0$.

Ist $\mathrm{II} > 90^0$, so bildet man $\cos i = \cos\mathrm{I}\cdot\sin(\mathrm{II} - 90^0)$.

Fig. 52.

Beispiel: $\lambda_1 = 70^0$, $\beta_1 = 60^0$, $\lambda_2 = 0^0$, $\beta_2 = 40^0$. Resultate: $\mathrm{I} = 46^0$, $x = 68\frac{1}{3}{}^0$, $\mathrm{II} = 51^0 40'$, $\mathrm{III} = 25^0 20'$, $i = 115^0 20'$.

cum extracti arcus, qui primum dicatur inventum, complemento atque cum latitudine austrina, repertique arcus complementum borealis addatur latitudinis complemento, et hoc aggregatum esto secundum inventum, cuius denique complemento atque inventi primi complemento per secundum rursus introitum arcus quidam eliciatur, qui sit inventum tertium; quod si quadranti iungatur, quaesitum constabit interstitium.

Sin autem secundum inventum quadrans evenerit, necesse est, ut interstitium siderale quadranti etiam sit aequale; ubi vero id quadrantem exsuperaverit, et grad. LXXXX sublatos et cum residuo atque cum complemento primi inventi arcus secundo introitu repertus auferatur quadranti; reliquum erit interstitium, quod quaerebatur.

Sint ergo sidera duo, quorum unum in arietis capite, cum austrina latitudine partium XL, alterum vero in fine gradus decimi geminorum constitua- 379r tur, cum latitu|dine boreali grad. LX, erit idcirco longitudinis eorum differentia partium LXX; et propositum esto ipsorum invenire interstitium; igitur per introitum secundum cum eadem differentia longitudinis atque cum austrinae latitudinis complemento grad. L inventi primi reperio quantitatem grad. XXXXVI, quorum deinde complemento partium XLIIII atque latitudine austrina grad. XXXX per primum introitum aut quintum prodeunt partes LXVIII cum tertio unius, quorum complementum grad. XXI min. XXXX addens borealis complemento latitudinis secundum constituo inventum, partium LI min. XXXX, quarum demum complemento grad. XXXVIII min. XX atque primi complementi inventi per introitum secundum pro invento tertio partes exibunt XXV et min. XX, quadranti quibus adiectis investigatum proditur interstitium grad. CXV min. XX; quod est intentio.

Ubi deinceps in aequalibus latitudinibus ad diversas eclipticae partes sub- 379v iectis differentia | longitudinis excedat quadrantem, minor tamen semicirculo, eadem auferenda est semicirculo, reliquum cum austrinae latitudinis complemento per introitum secundum proferat inventum primum, cuius deinde complemento atque ipsa latitudine austrina per primum aut quintum introitum reperiatur arcus quidam, quo grad. LXXXX dempto et, quod remanet, secundum esto inventum. Quod si borealis complemento latitudinis exsuperatum fuerit aut e contra, ipsum ex illo auferatur, et e contra, si secundum inventum borealis latitudinis complemento maius extiterit, ac deinde residui complemento atque complemento inventi primi per introitum secundum arcus extrahatur inventi tertii, quo LXXXX grad. adiecto interstitii (quod quaerebatur quantitas) erit perspicua.

At secundo invento complementum borealis latitudinis aequante inventum 380r primum semicirculo dematur, et constabit rursus intentum pro ube|riori praeceptionis huius declaratione. Haec exemplaris esto forma.

Sint data duo sidera, quorum unum caput arietis cum austrina latitudine grad. XXXX possideat, alterum vero cum boreali latitudine partium LX leonis initium, et proponamus horum siderum reperire interstitium; longitudinis

---

11. Ist $90^0 < \lambda < 180^0$, β_1 positiv und β_2 negativ (Fig. 53), so bildet man $\sin \mathrm{I} = \cos \beta_2 \cdot \sin (180^0 - \lambda)$, (Aufg. 2, $\mathrm{I} = \Sigma_2 S$, $\Sigma_2 S : B_1 B_2 = B_2 \Sigma_2 : B_2 P'$), dann $\sin x = \frac{\sin \beta_2}{\cos \mathrm{I}}$ (Aufg. 1, $x = B_1 S$, zieht man $B_1 \dot{\Sigma}_2 = y$, so ist

differentia idcirco graduum erit CXX, quibus ex semicirculo sublatis residuum LX grad. quibus et complemento latitudinis austrinae grad. L per introitum secundum pro invento primo grad. XXXXI et semis invenio, quorum deinde complemento partium XLVIII et semis ipsaque latitudine austrina per primum aut quintum introitum partes elicio LIX cum min. XX,[a]) quarum complementum grad. XXX min. XXXX, secundum scilicet inventum, quoniam ipsum borealis latitudinis exsuperat complementum, ex eo subtrahatur, eritque differentia haec min. XXXX, quibus quadranti detractis partes remanent LXXXXIX cum min. XX, quibus | et inventi primi complemento grad. XXXXVIII et semis 380v per introitum secundum pro invento tertio partes elicio XLIII min XXV fere. His demum quadranti congregatis habebo grad. CXXXVIII min. XXXX; quod est intentum.

Latitudinibus demum inaequalibus non ad eandem signiferi plagam subiectis cum longitudinis differentia quadrantem aequante secundus fiat introitus cum latitudinibus duabus, septemtrionali scilicet atque austrina, arcus itaque repertus et quadranti coniunctus exhibebit propositum.

Dentur exempli gratia sidera duo, de quibus unum arietis initium cum austrina latitudine partium XLV, alterum vero cancri caput cum latitudine boreali grad. LXIII, propositumque sit brevissimum inter data sidera reperire intervallum. Ibi longitudinis differentia quadranti par est, quare iuxta doctrinam hanc | secundo introitu cum latitudine boreali grad. LXIII atque cum 381r latitudine austrina partium XLV productis gradibus ferme XXXIX, eos adde quadranti, et siderale crescet intervallum partium CXXIX; quod oportebat invenire.

Haec hactenus disseruisse pro datis stellis latitudinem ambabus pariter habentibus arbitror sufficere; quaecumque enim tales duae propositae fuerint, de ipsis iuxta praeceptionem hanc problema conficere poterimus; sed, ut traditio haec plenior atque profectior habeatur, paucula sunt annectanda, quibus scilicet propositum conficiamus, de quibuslibet duabus stellis, quarum altera latitudinem obtineat, altera vero careat, sibi in signiferi peripheria sedem eligens. Quod si in signiferi sideribus longitudinum differentia fuerit examussim quadrans, erit, ut eorum quoque intervallum quadranti par inveniatur, quamobrem propositionis huius intentum non de eis igno|rabitur. 381v

Postquam vero longitudinum differentia quadrante subiciatur inferior, igitur per introitum secundum cum talis differentiae complemento atque cum complemento latitudinis alterius sideris arcus extrahatur, quo grad. LXXXX detracto interstitium, quod querimus, relinquitur.

Denique tali longitudinum differentia quadrantem exsuperante, altero scilicet datorum siderum latitudinem dumtaxat obtinente longitudinali differentina quadrans subtrahendus est.

Nam residuum cum latitudinis complemento per introitum secundum quendam producet arcum, qui grad. LXXXX coniectis desideratum exhibebit

a) Hs. hat XX korr. aus X.

$\cos y = \sin x \cos \mathrm{I} = \cos \beta_2 \cdot \cos \lambda$, hieraus $\sin x = \frac{\sin \beta_2}{\cos \mathrm{I}}$, wenn man λ eliminiert), $\mathrm{II} = x - 90^0$, $z = |\mathrm{II} - (90^0 - \beta_1)|$ $(z = S\Sigma_1 = \Sigma_1 B_1 + B_1 S = x + \beta_1)$, und endlich $\sin \mathrm{III} = \cos z \cos \mathrm{I}$, woraus $i = 90^0 + \mathrm{III}$.

intervallum; pro hac traditione unam arbitror satis esse demonstrationem exemplarem.

Sint itaque duo sidera, quorum unum in arietis capite sedem absque latitudine teneat, alterum vero in leonis initio verum sibi delegerit locum cum 382r latitudine grad. XXXX, et propositum | esto hoc ipsum, quod proponitur, inter sidera haec intervallum reperire. Cum autem haec longitudinum differentia grad. contineat CXX et eam ob rem quadrante maior comprobetur, igitur tollens ex ea quadrantem, hoc est grad. LXXXX, relinquo grad. XXX, quibus atque complemento subiectae latitudinis, quod grad. L impletur, per introitum secundum comprehendo partes XXII cum tertio. His deinde adiectis quadranti resultant grad. CXII et tertium unius, quibus investigatum interstitium erit perspicuum.

In hoc denique problemate subiectionibus exemplorum hac de re praeter morem institutum fui immoratus, quo de ipso praemissae traditiones fierent intellectu lucidiores, quarum intelligentia nos opus habemus, cum illae negotio astronomico admodum sunt necessariae, nec enim absque praesentis traditionibus amplecti consequive nonnulla facile poterimus. Id etiam silentio non est 382v praetereun|dum, quod ex proposito brevissimam inter oblata sidera duo interstitii distantiam comperimus. Si quis autem longissimam habere cupiat, hanc integro detrahat circulo, idest partibus CCCLX, et residuam desiderio suo satisfaciet. Quantum autem canon Ioannis de Regiomonte in proposito praesenti super tabulis primi mobilis tenuens existat ac mutilus, nemo inficiabitur, qui scriptum hoc meum super eodem problemate et illius relegerit ac utrumque diligenter taxaverit; multa namque comperiet illic deesse, quorum scientia, cum sit valde utilis et necessaria, autores illius taciturnitate immo tempore potius obmitti non debuerunt omnino.

Propositio LXXIX.

383r Quamlibet propositi sideris radia|tionem rationabili quadam via naturaeque potissimum congruenti succinctim explicare.

Fig. 53.

Ist $\mathrm{II} = 90^0 - \beta_1$, so ist $i = 180^0 - \mathrm{I}$.

Beispiel: $\lambda_1 = 120^0, \beta_1 = 60^0, \lambda_2 = 0^0, \beta_2 = -40^0$. Resultate: $\mathrm{I} = 41\frac{1}{2}^0$, $\mathrm{II} = 30^0 40'$, $x = 40'$, $\mathrm{III} = 43^0 40'$, $i = 133^0 40'$.

12. Ist $\lambda = 90^0$, und β_1 und β_2 entgegengesetzten Vorzeichens, so bildet man $\sin(i - 90^0) = \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2$ (Aufg. 2, im $\triangle P\Sigma_1\Sigma_2$ ist $\Sigma_1 P \Sigma_2 = 90^0$, $P_1\Sigma_2 = 90^0 \pm \beta_2$, $P\Sigma_1 = 90^0 \pm \beta_1$).

Beispiel: $\lambda_1 = 0, \beta_1 = -45^0, \lambda_2 = 90^0, \beta_2 = 63^0$. Resultat: $i = 129^0$.

13. Spezielle Fälle. $\beta_2 = 0$.

Ist $\lambda_1 - \lambda_2 = 90^0$, so ist auch $i = 90^0$

Ist $\lambda_1 - \lambda_2 < 90^0$, so ist $\cos i = \cos\lambda \cdot \cos\beta_1$.

Ist $\lambda_1 - \lambda_2 > 90^0$, so ist $\sin(i - 90^0) = \sin(\lambda - 90^0) \cdot \cos\beta_1$.

Beispiel: $\lambda_1 = 120^0$, $\beta_1 = 40^0$, $\lambda_2 = 0^0$, $\beta_2 = 0^0$. Resultat: $i = 112\frac{1}{3}^0$.

De hac siderum ratione Ioannes de Regiomonte super ludo Pannonico canonum problemate postimo quaedam non inepte attingere videtur, quae consulto nunc brevitati consulens praeterire decrevi, quibus ipse hanc radiationis viam, de qua modo sum dicturus, aliarum rationibus opinionum non immerito praeferre deliberavit.

Est ergo sciendum iuxta hunc rationabilem radiationis modum tetragonus aspectus sive in laevam sive in dextram versus a vero sideris loco, quantacumque detur eius a signifero latitudinis magnitudo, per quadrantis submovet spatium. At si datum sidus latitudine careat, radius ipsius sive dexter sive laevus[a]), sextilis quidem partibus LX, trigonus vero duplo huiusmodi spatio, id est, gradibus | CXX, a vero eiusdem sideris loco secedere in ecliptica, oppositum denique per diametrum ab sideris in signifero sede distare. At stellae latitudine gradus amplectente LX sextilis eius radius in vero ipsius loco terminabitur. Denique dato sidere latitudinem possidente circuli quidem sextante minorem, cum eiusdem latitudinis complemento atque cum grad. XXX primus aut quintus fiat introitus, arcus itaque productus et quadranti detractus arcum sextilis radiationis pro eodem sidere relinquit, hoc ipso quoque arcu grad. LXXXX coniuncto trigonae quantitas radiationis emerget. Habitis ergo his arcubus et a vero sideris loco in laevam atque dextram computatis in zodiaco sextiles eius et trigonae radiationes constabunt.

383v

Velut si stella quaepiam verum locum in tauri principio possideat cum latitudine grad. XX, propositum fuerit sextiles eius atque trigonas radia|tiones in zodiaco numerare. Igitur cum latitudinis complemento grad. LXX atque cum partibus XXX per primi aut quinti introitus portam ingressus excipio gradus[b]) XXXII min. XV fere, quorum complementum partium LVII min. XXXXV sextilis definit radiationis quantitatem. Eodem arcu grad. XXXII min. XV cum grad. LXXXX congregato trigonae prodibit arcus radiationis partium CXXII min. XV.

384r

a) Hs. hat *levis*.
b) Hs. hat *gradus* korr. aus *graduum*.

79. Proposition.

Untersuchung der „radiatio“ eines gegebenen Sternes (Fig. 54).

Für einen Stern beliebiger Breite sind die tetragoni aspectus 90^0 nach rechts und links entfernt.

Für einen Stern mit der Breite Null ist der radius sextilis 60^0, der radius trigonus 120^0 von ihm auf der Ekliptik entfernt, das „oppositum“ 180^0.

Ist die Breite 60^0, so ist die Stelle des radius sextilis = der Länge des Sternes.

Ist die Breite $\beta < 60^0$, so bildet man $\sin \varrho = \frac{\cos 60^0}{\cos \beta}$, dann ist $\varrho_s = 90^0 - \varrho$ der Bogen der „sextilis radiatio“ $\varrho_t = 90^0 + \varrho$ der „trigona“.

Fig. 54.

Beispiel: $\lambda = 30^0$, $\beta = 20^0$. Resultat: $\varrho_s = 77^0 45'$, $\varrho_t = 122^0 15'$; radiatio sextilis sinistra: $\lambda + \varrho_s = 107^0 45'$, dextra $\lambda - \varrho_s = 302^0 15'$, trigona sinistra: $\lambda + \varrho_t = 152^0 15'$, dextra $\lambda - \varrho_t = 267^0 45'$.

His denique radiationum numeris in laevam et in dextram a vero sideris loco recensitis radiatio sextilis sinistra constituetur in grad. XXVII min. XXXXV geminorum. Dextra vero in grad. II min. XVI piscium, sed trigona radiatio sinistra quidem in partibus II min. XV virginis, dextra vero in grad. XXVII min. XXXV sagittarii diffundetur. |

384v

Propositio LXXX.

An subiecta duo sidera quampiam obtineant radiationem, perscrutari.

Propositum hoc est intelligendum de sideribus habentibus vera loca, tam in longitudine, quam secundum latitudinem cognita; his itaque suppositis per LXXVIII huius eorum quaeratur interstitium. Quod si partes LX continuerit, sextili radiatione, si grad. LXXXX, tetragona, si denique CXX partes, trigona sciemus eadem sidera sese complecti. Sin autem eorum idem interstitium CLXXX impleverit partes, ipsa diametra coniungi radiatione comprobantur. Haec usque adeo sunt facilia, ut nullo indigeant exemplo.

Propositio LXXXI. |

385r Aequationem octavae sphaerae, quanta sit subiecto momento iuxta tabulas Alphonsi supputare.

Pro tempore dato medium motum accessus et recessus ex illis Alphonsi tabulis addiscamus, qui si grad. LXXXX minor inveniatur, aptus est subiecto negotio. Sin autem maior, nondum tamen attingens semicirculum, ipse eidem detrahatur semicirculo, reliquum pro introitu erit quoque idoneum.

Quod si motus idem recessus et accessus partes CLXXX vicerit et tribus quadrantibus inferior, ei semicirculus auferatur, reliquum rursus est servandum, perinde atque introitu nostro conveniens, ubi vero motus ille tres exsuperaverit quadrantes, eo gradibus CCCLX sublato residuum est reponendum.

Quiscumque igitur numerus aliquo horum modorum nobis obtigerit, cum grad. VIIII per introitum secundum quaesitam exhibebit aequationem, addendam quidem, quando motus recessus fuerit mi|nor semicirculo, subtrahendum vero, quando maior. Velut si talis motus accessus et recessus offeratur grad. 385v

---

80. Proposition.

Untersuchung, ob zwei Sterne in einer „radiatio“ stehen.

Man bestimmt nach Proposition 78 ihren Abstand i. Beträgt er 60^0, so stehen sie in der radiatio sextilis, für 90^0 in der tetragona, für 120^0 in der trigona und für 180^0 in Opposition.

81. Proposition.

Bestimmung der „aequatio octavae sphaerae“ nach den Tafeln von Alphons.

Man entnimmt den „medius motus accessus et recessus“ $= \mu$ den Alphonsinischen Tafeln. Ist $\mu > 90^0$, so nimmt man $180^0 - \mu$, ist $\mu > 180^0$, $\mu - 180^0$,

LX, igitur cum grad. LX atque cum partibus IX secundo introitu meteoroscopium ingressus excipio partes VII cum min. XXXXVII fere, quae sunt investigata sphaerae octavae aequatio.

Propositio LXXXII.

Aequationem octavae sphaerae secundum opinionem ipsius Thebit numerare.

Igitur medium motum accessus et recessus octavae sphaerae iuxta suam tabulam inprimis cognoscamus eumque minorem quadrante servemus, quo quadrantem exsuperante ac minore gradibus CLXXX ipsum ex semicirculo demamus, residuum tamquam idoneum pro introitu nostro reponamus. Eidem etiam medio motui semicirculum exsuperanti, tribus tamen quadrantibus inferiori, semicirculus auferatur, reliquum est quoque reponendum; at medium motum recessus et accessus, quadrantes tres vincentem ex totius | circuli peripheria subtrahamus, quodque remanserit, est rursus servandum. Arcus itaque quicumque repositus per introitum secundum cum grad. IIII et min. XIX meteoroscopio commissus reddet nobis arcum quendam, qui deinde cum grad. XXIII et XXXXVI min. per primum aut quintum introitum introductus referet nobis quaesitam aequationem, addendam quidem, quando motus medius accessus et recessus minor fuerit semicirculo, minuendum vero, quando maior. 386r

Ut si motus trepidationis offeratur grad. LXVII et propositum fuerit, eidem congruentem reperire aequationem. Ergo cum eodem trepidationis seu accessus et recessus motu medio atque cum grad. IIII et min. XIX per introitum secundum ingrediens excipio grad. IIII. Quibus deinde atque partibus XXIII min. XXXXVI per primum aut quintum introitum elicio gradum unum cum min. XXX fere; quod est intentum.

Propositio LXXXIII.

Sideris latitudine carentis apparitionis | occultationisve arcum cum arcu visionis eius indagare. 386v

Iohannes de Regiomonte in Epitomate suo super librum octavum Almagesti auctoritate Ptolemaei suffultus arcum visionis eum vocat, qui in circulo

---

ist endlich $\mu > 270^0$, $360^0 - \mu$. Dann ist die gesuchte „aequatio“ a gegeben durch $\sin a = \sin \mu \cdot \sin 9^0$.

Beispiel: $\mu = 60^0$, $a = 7^0 47'$.

82. Proposition.

Bestimmung der aequatio octavae sphaerae nach Thebit.[1])

Man bildet $\sin x = \sin \mu \cdot \sin 4^0 19'$ und $\sin a = \frac{\sin x}{\sin 23^0 46'}$; Beispiel: $\mu = 67^0$, $x = 4$, $a = 1^0 30'$.

1) Thebit, arabisch Tâbit b. Qurra b. Marwân, Abû'l Hasan, al-Harrânî vgl. H. Suter a. a. O. p. 34. Nr. 66. Wahrscheinlich bezieht sich Werner auf die lateinisch erhaltene Schrift „Liber thebit de motu accessionis et recessionis“. Paris (9335), Oxford (Cat. Mss. Angl. T. I. P. I. 6567).

verticali per centrum solis subter horizontem constituti transeunte inter solare centrum atque horizontem comprehenditur, arcum vero apparitionis appellat eam zodiaci portionem, qui ab initio sideralis apparationis vero apparentis sideris loco et vera solis sede clauditur. Sed occultationis arcum definit eam signiferi particulam, quae occultati sideris loco vero atque vero solis secundum occultationis primum momentum intercipitur. Cum autem huiusmodi arcus pro 387r eodem sidere quam plurimum diversificatur, pro vario ipsius loco in eclipti|ca, nunc cum latitudine, nunc vero sine latitudine, quod tamen de planetis dico, eundem quoque vel occultationis vel apparationis arcum non tam pro planetis, quam etiam fixis sideribus iuxta diversas regionum latitudines variari necesse est.

Quare non absentaneum arbitror fore, si quaedam paucula de apparitione et occultatione siderum in hoc etiam opere perstringam, quamvis non ignorem Ptolemaeum occultationum apparitionumve tabulas pro planetis ad suum clima condidisse, ipsae tamen iudicio plurimorum astronomicorum[a]) parum probari videntur, cum ille variationi vel aeris vel regionum nequaquam sufficiant.

In praesenti quoque proposito indigemus singulis visionum arcubus pro subiectis sideribus singulis. Sed quo pacto illos facile nancisci poterimus, Ioannes de Regiomonte super epitomate almagesti libro octavo abunde trac- 387v tavit. Eosdem | autem arcus pro planetis CL (!) Ptolemaeus in climate Alexandrino certis deprehensis inspectionibus in dicto libro sui Almagesti literarum memoriae commendavit, pro Saturno scilicet grad. XI, pro Iovis sidere partes X, pro Marte grad. XI et semis, pro Venere partes V, pro Mercurio grad. X.

His itaque praemissis ad huius propositionis doctrinam absolvendam me nunc commento. Cum itaque fuerit propositum nobis aliquod sidus latitudine carens cum suae visionis arcu cognito, ut eius vel apparitionis vel occultationis arcus inveniatur; ergo per XXIX angulus incidentiae horizontis et eclipticae, qui in dato sideris loco contingat, quaeramus. Quo deinde et subiecto visionis arcu per primum aut quintum introitum desideratus vel apparitionis vel occultationis arcus prodibit.

a) Hs. hat *astronimorum*.

83. Proposition.

Bestimmung des arcus apparitionis und occultationis eines Sternes in der Ekliptik aus ihrem arcus visionis (Fig. 55).

Nach Regiomontanus ist der arcus visionis (v) der Abstand der unter dem Horizont stehenden Sonne vom Horizont auf dem Höhenkreis gemessen, der arcus apparitionis (A) der Bogen auf der Ekliptik zwischen der Sonne und dem gerade aufgehenden Stern, der arcus occultationis (U) der Bogen zwischen der Sonne und dem gerade untergehenden Stern.

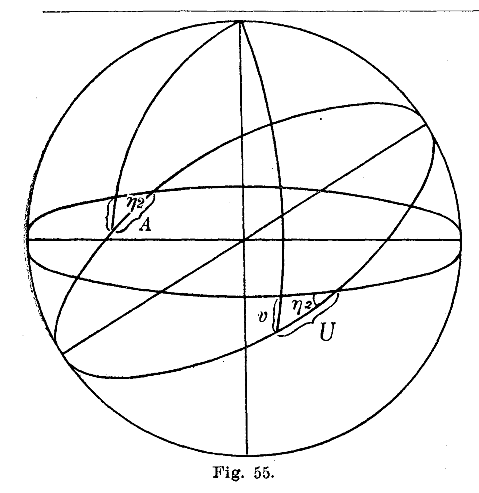


Fig. 55.

Id autem diligenter advertendum est, quod, si apparitionem quaeramus, praedictus incidentiae angulus in semicirculo horizontis orientali | sumendus est, sin autem occultationem, in occidentali. 388r

Velut si posito Saturno in capite arietis sine latitudine quapiam velim eius apparitionis arcum notum facere in regione, cuius polus mundi arcticus elevatur grad. XXXXIX min. XXVII, quanta scilicet habetur poli eiusdem elevatio supra solum patrium. Angulus incidentiae signiferi et horizontis in eadem regione per XXIX est fere grad. XVII min. III, arcus autem visionis Saturni ex praedictis constat partibus XI. His demum arcubus duobus per primum aut quintum introitum extraho apparitionis arcum in grad. XXXXI min. XXX. Volens autem occultationis arcum elicere invenio per eandem XXIX angulum horizonte et ecliptica contentum super capite arietis in semicirculo horizontis occidentali grad. LXIIII min. III, quibus et arcu visionis grad. XI, ut ante, per primum aut quintum introitum deprehendo occultationis arcum grad. XII et XX minutorum. |

Propositio LXXXIIII. 388v

Dato sidere in quacumque signiferi parte constituto cum latitudine aliqua eius aut apparitionis aut occultationis arcum numerare.

Quaeramus ergo inprimis per LXV huius zodiaci punctum, quo datum sidus aut oritur, si apparitionem velimus, aut occidit, si occultationem. Deinde per XXIX huius habeatur etiam angulus ex horizonte et ecliptica super puncto sideralis ortus occasusve compaginatus, ortus quidem, si apparitionem quaerimus, occasus vero, si occultationem.

Post haec primus aut quintus fiat introitus | cum visionis arcu atque cum angulo incidentiae horizontis signiferique ad punctum sideralis ortus facto, si desideremus apparitionem, vel apud occasus punctum creato, si occultationem sideris invenire velimus; arcus itaque compertus sublatus ei arcui, qui vero sideris loco atque puncto ortus, si apparitionem, vel occasus puncto, si occultationem quaerimus, clauditur, aut econtra, dempto videlicet arcu minori de 389r

---

Die Werte von v sind nach Ptolemaeus für die einzelnen Planeten:

Saturn	11
Jupiter	10
Mars	$11\frac{1}{2}$
Venus	5
Mercur	10.

Man bestimmt nach Proposition 29 den östlichen oder westlichen Winkel η_2 bzw. η'_2 zwischen Ekliptik und Horizont, dann ist

$$\sin A = \frac{\sin v}{\sin \eta_2} \text{ (Aufg. 5)}$$

$$\sin U = \frac{\sin v}{\sin \eta'_2}.$$

Beispiel: λ des Saturn $= 0^0$, $\varphi = 49^0 27'$. Resultat: $\eta_2 = 17^0 5'$, $v = 11^0$, $A = 41^0 30'$, $\eta_2' = 64^0 3'$, $U = 12^0 20'$.

maiori, quaesitum vel apparitionis vel occultationis arcum relinquit, ipsa scilicet latitudine sideris subiecta boreali; quae si fuerit austrina, prorsus iidem arcus duo pariter aggregentur, ut vel apparitionis vel occultationis arcum habeamus. Hic quoque, velut in praecedenti, lector est quisque admonendus, quod si praemissus angulus per XXIX quaesitus quadrante maior provenerit, eodem grad. CLXXX sublato reliquum huic negotio conveniet.

Velut in hoc exemplo, sit Iovis astrum cum latitudine boreali min. XXXXVI in fine vicesimi gradus leonis, volens igitur eius apparitionis arcum invenire ad patrii soli | latitudinem invenio per LXV huius esse perortos cum oriente Iove grad. XIX min. XX leonis. Sed per XXIX huius angulum in ortivo hoc Iovis puncto signifero et horizonte comprehensum partium LVI min. XXXXI fere, quas cum visionis arcu grad. X per primum aut quintum introitum inferens excipio grad. XII min. X fere, quibus auferens min XXXX, quae reperiuntur inter ortivum Iovis punctum et verum ipsius locum, remanebit arcus apparitionis partium XI min. XXX, quod est intentum.

389v

At occultationis arcus non multo aliter reperitur per angulum occiduum puncti subiecti sideris.

Propositio LXXXV.

Quod in praecedenti proponitur, alia quidem et prolixiori via investigare.

In primis itaque intrandum est per primum aut quintum introitum cum regionaria latitudine et com|plemento sideralis declinationis, arcus hoc pacto

390r

---

84. Proposition.

Bestimmung des arcus apparitionis und occultationis für irgendeinen nach Länge und Breite bekannten Stern (Fig. 56 u. 57).

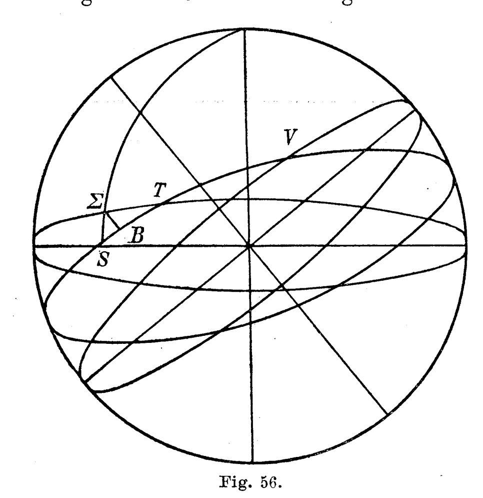


Fig. 56.

Man bestimmt nach Proposition 65 den Punkt λ_τ des Tierkreises, mit dem der Stern gleichzeitig auf- bzw. untergeht, und nach Proposition 29 den Winkel η_2 bzw. η'_2 zwischen Ekliptik und Horizont. Dann bildet man $\sin x = \frac{\sin v}{\sin \eta_2}$, ferner $\lambda - \lambda_\tau$, dann ist (Fig. 56 u. 57) $A = |x - (\lambda - \lambda_\tau)|$, wenn β positiv, $A = x + (\lambda - \lambda_\tau)$, wenn β negativ ist.

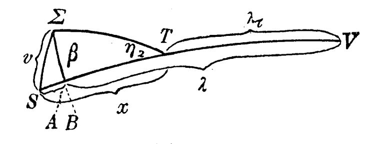


Fig. 57.

Beispiel: λ (des Jupiter) $= 140^0$, $\beta = 47^0$. Resultate: $\lambda_\tau = 139^0 20'$, $\eta = 56^0 41'$, $v = 10^0$, $x = 12^0 10'$, $\lambda - \lambda_\tau = 40'$, $A = 11^0 30'$.

repertus esto inventum primum. Deinde per introitum secundum introducamus distantiam sideris ab altero punctorum tropicorum, utri propinquius ipsum accesserit, hac videlicet distantia quadrantem non exsuperante cum maxima solis declinatione repertus itaque arcus secundum esto inventum, quod per primum rursus aut quintum introitum cum complemento declinationis sideralis reddat nobis arcum, qui adiungatur invento primo, si verus sideris locus ascendentem signiferi semicirculum possederit, aut dematur, si descendentem signiferi semicirculum possederit.[a]) Utrum igitur fecerimus, tertium prodibit inventum, quod introitu secundo cum sideralis latitudinis complemento deductum reddat nobis arcum, cuius complementum inventum quartum dicatur, et est angulus ecliptica et horizonte compaginatus in puncto signiferi, cum quo subiectum sidus vel oritur, si apparitionem aut occultationem matutinam quaerimus, vel occidit, si occultationem aut apparitionem vespertinam velimus.

Hoc deinde quartum inventum cum siderali latitudine primo aut quinto introitu illatum prodet inven|tum quintum, quo demum cum invento tertio per introitum secundum deducto sextum producetur inventum, et est arcus eclipticae vero sideris loco et horizonte comprehensus. 390v

Post haec visionis arcus cum invento quarto per primum aut quintum introitum inferatur et septimum exibit inventum, quod est signiferi arcus horizonte et nondum perorti solis umbilico conclusus.

Postremo auferamus sextum inventum ab invento septimo aut contra,

a) Hs. hat nochmals: *aut dematur, si descendentem.*

85. Proposition.

Andere Lösung der vorhergehenden Aufgabe (Fig. 58).

Man bildet $\sin \mathrm{I} = \frac{\sin \varphi}{\cos \delta}$ ($\mathrm{I} = \sphericalangle D\Sigma O$ im $\triangle D\Sigma O$), $\sin \mathrm{II} = \sin \triangle \cdot \sin \varepsilon$ ($90^0 - \mathrm{II} = \sphericalangle BFV$ im $\triangle BFV$, $90^0 - \triangle$[1]) $= BV$) $\sin x = \frac{\sin \mathrm{II}}{\cos \delta}$ ($x = \sphericalangle FBD$ im $\triangle FBD$), $\mathrm{III} = x \pm \mathrm{I}$ (jenachdem Σ auf dem aufsteigenden oder fallenden Ekliptikbogen ist) ($\mathrm{III} = \sphericalangle B\Sigma T$ im $\triangle B\Sigma T$), $\cos \mathrm{IV} = \sin \mathrm{III} \cdot \cos \beta$ ($\mathrm{IV} = \eta_2 = \sphericalangle \Sigma TB$), $\sin \mathrm{V} = \frac{\sin \beta}{\sin \mathrm{IV}}$ ($\mathrm{V} = \Sigma T$ im $\triangle \Sigma TB$), $\sin \mathrm{VI} = \sin \mathrm{V} \cdot \sin \mathrm{III}$ ($\mathrm{VI} = BT$ im $\triangle \Sigma TB$), $\sin \mathrm{VII} = \frac{\sin v}{\sin \mathrm{IV}}$ (VII = Bogen zwischen Horizont und Sonne), $A = |\mathrm{VI} - \mathrm{VII}|$.

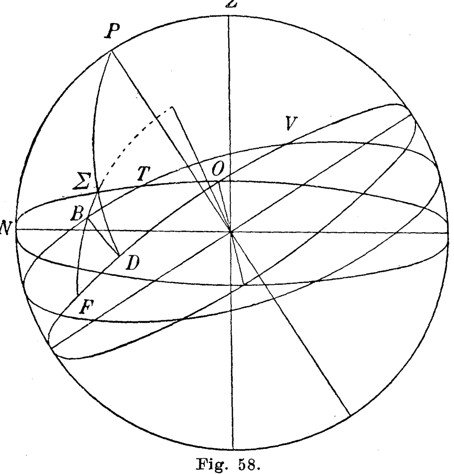


Fig. 58.

Ist $\triangle = 90^0$, so ist zu bilden: $\sin x = \frac{\cos \delta}{\sin \varepsilon}$, $\mathrm{III} = x \pm \mathrm{I}$ usw.
Ist $\triangle = 0^0$, so ist $\mathrm{I} = \mathrm{III}$ usw.

1) $\triangle$ ist der Abstand vom nächsten Solititialpunkt.

minus scilicet a maiore, et relinquitur arcus apparitionis vel occultationis, quod oportebat invenire.

Verum quando subiectum sidus altero insteterit aequinoctiorum puncto[a]), primi inventi arcu ingrediendum est primo vel quinto introitu cum sideralis complemento declinationis atque cum maxima solis declinatione, arcus itaque collectus invento primo vel addatur, si verus sideris locus arietis caput ex-
391r titerit, vel dematur, si librae fuerit principium; hoc namque | pacto prodibit arcus, quo deinceps perinde atque tertio utamur invento.

Postquam autem subiectum sidus vero suo loco possederit caput vel cancri vel capricorni, primum inventum tertii vices inventi supplebit; ceterum, ut prius, agendum est; has duas cautiunculas ille doctus mathematicus Ioannes de Regiomonte in canonibus primi mobilis, nescio, qua in curia, praetermisit. Tertio est quoque cavendum, quod ipse tamen diligenter etiam persecutus est, quando sidus nullam omnino declinationem obtinuerit, quia tunc regionis latitudo primum inventum, reliqua pro traditi praecepti operabimur institutione.

Sit igitur exemplum tale. Sidus Iovis occupet finem gradus vicesimi Leonis[b]) cum latitudine boreali min. XXXXVI; volo igitur pro patria latitudine Iovis apparitionis arcum reperire; ergo per LVIII huius aut eius sequentes
391v huius sideris declinationem reperio grad. XV min. XXXIII | borealem quoque; eius itaque complementum partium LXXIII min. XXVII cum patrii soli latitudine grad. XXXXIX min. XXVII per primum aut quintum inferens introitum, excipio inventum primum grad. LII, rursus ingredienti mihi posthaec cum huius sideris a capite cancri distantia partium L atque cum maxima solis declinatione grad. XXIII min. XXX per introitum secundum partes offeruntur XVII min. XXXXV pro secundo invento, cum quo deinceps atque cum complemento declinationis sideralis primo aut quinto introitu partes excipio XVIII min. XXXV. quibus invento primo detractis tertium relinquitur inventum grad. XXXIII min. XXV.

His deinde atque complemento latitudinis partium LXXIIII min. XXVII per introitum secundum arcus elicitur, quo grad. LXXXX detracto quartum remanet inventum partium LVI min. XXXX, quibus demum atque subiecti sideris latitudine introitu primo aut quinto quintum proditur inventum partis
392r unius, qua posthaec atque invento tertio grad. XXXIII min. XXV | per introitum secundum sextum constabit inventum fere minutiorum XXXX.

Exercens postremo primum aut quintum introitum cum visionis arcu partium X atque cum invento quarto[c]) grad. LVI mi. XXXX arcum excipio partium XII min. X, quibus invento sublato quaesitus relinquitur visionis arcus grad. XI et semis; quod oportuit invenire.

a) Hs. hat *pu . . cto* korr. aus *prae . . to*. b) Hs. hat *Leonis* korr aus *Iovis*. c) Hs. hat *quarto* korr. aus *primo*.

Ist $\delta = 0^0$, so ist $I = \varphi$ usw.

Beispiel: λ des Iupiter $= 140^0$, $\beta = 46^0$. Resultate: $\delta = 15^0 33'$, $I = 52^0$, $\triangle = 50^0$, $\varepsilon = 23^0 30'$, $II = 17^0 45'$, $x = 18^0 35'$, $III = 33^0 25'$, $IV = 56^0 40'$, $V = 1^0$, $VI = 40'$, $VII = 12^0 10'$, $A = 11\frac{1}{2}^0$.

86. Proposition.

Bestimmung, zu welcher Zeit ein gegebener Stern „de subradiis solaribus“ sichtbar oder unsichtbar wird.

Propositio LXXXVI.

Tempus, quo datum sidus de subradiis solaribus vel apparet vel occultatur, invenire.

Sciendum igitur est, planetas tres superiores et sidera fixa unicam dumtaxat obtinere de subradiis solaribus apparitionem, matutinam videlicet, quando ab eis sol recedens concedit eos ab hominum oculis matutino tempore primum conspici, | unam solam quoque occultationem, quae id tempus appellatur, quando 392v propter solis vicinitatem sidera haec ab humano aspectu amplius conspici post occasum solarem atque in crepusculo vespertino desinunt.

Igitur ob solis propinquitatem planetae tres superiores cum sideribus fixis duo tantum patiuntur, scilicet matutinam apparitionem et vespertinam occultationem, et in praecedentibus problematis talem feci sermonem praeceptionis, ac si de solis loquerer sideribus non erraticis atque planetis tribus superioribus, eandem tamen doctrinam Veneri etiam et Mercurio non difficulter accomodabimus. Nam haec sidera duas sibi vendicant apparitiones atque occultationes duas, matutino enim tempore per solis ab eis recessum incipiunt apparere vicissimque per eorum ad solares radios accessum occultari.

Vespere quoque et serotino tempore sideribus eisdem eadem contingunt. Has quidem siderum vel erraticorum vel non errantium passionem | Georgius 393r Purbachius in Theoricis suis copiose luculenterque tractavit. Qui latius illas intelligere cupiat, ei necesse est libellum illum de Theoricis eiusdem autoris repetere.

Denique pro Venere et Mercurio matutinae vel apparitionis vel occultationis arcus per doctrinas praecedentium problematum eo reperiuntur modo, qui traditus est de apparitione, quae in tribus superioribus planetis semper est matutina.

Serotinas vero ac vespertinas Veneris et Mercurii passiones ea reperimus doctrina, quae de occultatione in praecedentibus traditur. Nam utroque siderum horum solem antecedente atque sub radiis constituto solaribus, si ipsum sole tardioris fuerit motus, tunc evenire poterit, ut matutino tempore in aliquo die videri incipiat, quod quidem visionis initium a plerisque apparitio seu ortus appellatur matutinus. Sin autem matutino tempore vel Venere vel Mercurio ante solis exortum apparente et Venus et Mercurius | sole velocioris cursu ad 383v eius coniunctionem festinaverit obque solis propinquitatem mane videri conspicique desinerit, tunc dicimus aut Venerem vel Mercurium, utri hoc ipsum acciderit, occultari per occasum matutinum. Pari modo ratiocinemur de Veneris et Mercurii vespertina vel apparitione sive exortu vel occultatione occasuve. Si haec duo sidera sole iuxta signiferi partes et successionem fuerint

---

Die drei oberen Planeten und die Sonne besitzen eine apparitio de subradiis solaribus, „wenn die sich von ihnen entfernende Sonne gestattet, daß sie morgens gesehen werden“, und eine occultatio, „wenn sie wegen der Sonnennähe nach Sonnenuntergang und in der Abenddämmerung nicht mehr gesehen werden können.“

Venus und Merkur dagegen besitzen zwei apparitiones und zwei occultationes.

Ist der arcus apparitionis bzw. occultationis gleich dem Bogen zwischen Stern und Sonne, und geht der Stern morgens vor der Sonne auf, so hat er

posteriores, eorum enim altero sub radiis solaribus latente et sui motus acceleratione solis decursum exsuperante postque solis occasum conspici incipiente ipsum a plerisque astronomis[a]) oriri dicitur ortu respectivo. Contra vero, si duae stellae Veneris et Mercurii aut earum altera, post solis occasum serotino tempore visa fuerit, et eam ob sui cursus tarditatem solare lumen velociori motu insequens occupat subito et abscondit ab aspectu nostro, tunc iam cognoscimus eandem occultari vespertino occasu.

394r His itaque demonstratis ad propositi declara|tionem venio.

Si enim arcus ille, quem in praecedentibus aut apparitionis aut occultationis appellavi, solis et propositi sideris aequaverit verorum motuum intercapedinem, et sidus idem mane ante solem oriatur, tunc ipsum die eodem videtur ortu matutino.

Sin autem vespere eodem sidus vero motu solem sequatur, ipsum occidere prohibetur occasu vespertino. De stellis fixis et tribus planetis superioribus loquor, quod Veneri et Mercurio etiam, ut dictum est, accommodari potest. Solis autem et subiecti sideris verorum locorum distantia minore, quam sit inventus arcus aut apparitionis aut occultationis, ut prius cognoscemus appropinquantis quidem soli sideris occultationem praeteriisse, a sole vero recedentis stellae futuram esse apparitionem; ubi autem haec verorum motuum solis et suppositi sideris differentia prius reperto vel apparitionis vel occultationis arcu maior eveniat, sidere quidem solis accedente propinquitati, occultationem 394v futuram esse, contra vero eodem solis vicinia refugi|ente, apparitionis ortum augurabimur praeteriisse.

Denique si verorum locorum solis et sideris intercapedinis excessum, supra occultationis aut apparitionis arcum, aut contra huius supra illam, pro stella quidem directa per diurnorum superationem motuum diviserimus, pro regressa vero per eorundem accervationem motuum, exibit dierum numerus, qui nostrae inter considerationis momentum et diem quaesitae vel apparitionis vel occultationis apprehenditur.

Pro praesenti doctrina tale subiciatur exemplum.

Anno salutiferae incarnationis domini nostri salvatoris MDV currente die X Iulii in meridie iuxta tabulas Alphonsi verus solis locus fuit grad. XXII mi. XXXX cancri, Iovis autem locus fuerat partium XX min. XI leonis cum latitudine boreali min. XXXXVI fere. Ob solis itaque ac Iovis vicinitatem

a) Hs. hat *astronimis.*

---

einen sichtbaren ortus matutinus; geht er nach der Sonne unter, so hat er keinen sichtbaren occasus vespertinus.

Ist der arcus apparitionis bzw. occultationis größer als der Bogen zwischen Stern und Sonne und nähert sich der Stern der Sonne, so ist die occultatio schon früher erfolgt, entfernt er sich aber von der Sonne, so wird die apparitio erfolgen.

Ist der arcus apparitionis bzw. occultationis kleiner als der Bogen zwischen Stern und Sonne, und nähert sich der Stern der Sonne, so wird die occultatio erfolgen, entfernt er sich von ihr, so ist die apparitio schon früher erfolgt.

Die Zahl an Tagen zwischen dem Beobachtungstag und dem Tage der apparitio oder occultatio erhält man, wenn man die Differenz des Bogens

tunc suspicabar Iovem non multis ante diebus occasu vespertino sub solaribus radiis latuisse, quam ob rem secundum praecedentis doctrinam, ut de hac fierem certior, pro Iove occultationis arcum | inveneram grad. XXIX et min. fere XXXXII, quibus detracta verorum motuum solis et Iovis differentia grad. XXIII min. XXXI fuit reliquum partium VI min. IX, quae partita secundum superationem diurni motus solis supra diurnum Iovis motum exibant dies VIII cum quinta diei, quo deprehendi Iovis astrum ante dies VIII latuisse occasu vespertino; pari ratione pro similibus aliis problematis erit agendum. 395ʳ

Hinc quoque liquere poterit, eum omnino decipi, quicumque tales propositiones Ptolemaei tabulis, quas ipse in libro tertio decimo magnae compositionis scriptas reliquit, absolvi arbitrabitur, huiuscemodi namque vel occultationem vel apparitionem arcus diversos variosque reperiri semper necesse est, tum propter multiplices eclipticae ac horizontis inclinationes, tum vero pro ipsius aeris, quem prorsus visionis nostrae modulus comitatur, varia in singulis climatibus dispositione, nonnunquam denique pariter ob utrumque. |

Propositio LXXXVII.

395ᵛ

Locis duobus longitudines latitudinesque cognitas habentibus unius ad alterum itinerarium cognoscere intervallum.

In praesenti ac etiam subsequenti telluris orbem suppono fere consummatae rotunditatis. Itinerarium vero spatium, quod inter assignata loca duo clauditur, portionem imaginor magni super sphaerica telluris superficie designati circuli locis eisdem[a]) interceptam.

Sub hoc namque circulo geographi suum viatores iter autumnant conficere.

Proposita itaque loca, si eundem teneant meridianum, eorundem latitudinis accipiatur differentia, si uterque latitudinem eiusdem partis obtinuerit; differentia namque hac | locorum praebebit interstitium. 396ʳ

At locis sub eodem meridiano positis, latitudines si ab aequatore in diversas abeant plagas, eorum itinerarium interstitium iunctis emerget latitudinibus.

Sed locis duobus subiectis aequas obtinentibus in eandem partem latitudines, igitur secundum agamus introitum cum dimidio longitudinalis differen-

a) Hs. hat *eisdem* korr. aus *eiusdem*.

---

zwischen Stern und Sonne und dem arcus apparitionis bzw. occultationis durch die Summe bzw. Differenz der täglichen Bewegungen des Sterns und der Sonne teilt.

Beispiel: Am 11. Juli 1505 12^h hat die Sonne die Länge $\lambda_S = 112^0 40'$, Iupiter $\lambda_J = 140^0 11'$, $\beta_J = 46'$, arcus occultationis $= 29^0 42'$, arcus occultationis $= (\lambda_J - \lambda_S) = 29^0 42' - 23^0 31' (!) = 6^0 11'$. $d = 8\frac{1}{5}$, d. h. Iupiter hatte vor acht Tagen seinen occasus vespertinus.

87. Proposition.

Bestimmung des Abstandes zweier nach Länge und Breite bekannter Orte der Erde.

tiae, atque cum alterius latitudinum complemento, arcus itaque reperti duplum pro itinerario locorum servemus interstitio.

Velut suppositis locis duobus, quorum uterque latitudinem obtineat vel borealem vel austrinam grad. XXVI. Eorum quoque longitudinalis differentia esto partium XXX. Cum earum ergo dimidio grad. XV atque cum communis latitudinis complemento grad. LXIIII reperio partes XIII et semis, quibus duplicatis iter resultat quaesitum grad. XXVII.

Ubi vero loca duo dabuntur diversas ad eandem partem habentia latitudines, longitudinum tamen differentiam grad. LXXXX minorem, igitur cum 396v differentia hac atque cum minoris complemento latitudinis, | per introitum secundum organo incidentes primum elicuimus inventum. Cum eius deinde complemento atque cum breviore latitudine per introitum primum aut quintum alius a nobis excipiatur arcus, quo maiori latitudini detracto reliquum statuatur inventum secundum, cuius demum complemento cum primi complemento inventi per introitus secundi ianuam remisso arcus proferatur, quo gradibus LXXXX detracto locale rursus interstitium relinquitur.

Veluti volens interstitium urbis Romae atque soli patrii, hoc est Norimbergensis civitatis investigare, suppono iuxta Ptolemaei autoritatem urbis Romae iuxta longitudinem esse grad. XXXVI et tertii fere, at latitudinem partium XLI min. L. Tantam enim, cum Romae agerem, multiplici perdidici exper[i]mento, et Plinii confirmat autoritas de umbrarum ratione parallelorumque distinctione pertractans.

Sed Norimbergae latitudo reperitur iuxta recentiores observationes par-397r tium XLIX min. XXVII. Huius denique et urbis Romae longitudinum | differentiam tum per eclipses, tum vero per itinerariam profectionem deprehendi grad. VIII fere.

Eandem tamen Ioannes de Regiomonte novem supposuit graduum, sed eo non obstante sumo eam secundum observationem meam grad. VIII, cum quibus et cum brevioris latitudinis complemento, partium XLVIII min. X meteoroscopium introitu secundo ingrediens primum excipio inventum grad. V min. L. Cuius deinde complemento grad. LXXXIIII min. X et breviore latitudine partium XLI min. L per primum aut quintum introitum prodibunt partes XLII

Die Aufgabe, für die die Erde als vollkommene Kugel betrachtet wird, ist vollkommen analog der in Proposition 78 behandelten Aufgabe.

1. $\lambda_1 = \lambda_2$; $i = \beta_1 - \beta_2$ (β_1 und β_2 positiv oder negativ),

2. $\beta_1 = \beta_2 = \beta$; $\sin \frac{i}{2} = \sin \frac{\lambda}{2} \cdot \sin (90^0 - \beta)$.

Beispiel: $\beta = 26^0$, $\lambda = 30^0$, $i = 27^0$.

3. $\beta_1 > \beta_2$ und beide positiv, ferner $\lambda < 90^0$; $\sin \mathrm{I} = \cos \beta_2 \sin \lambda$, $\sin x = \frac{\sin \beta_2}{\cos \mathrm{I}}$, $\mathrm{II} = \beta_1 - x$, $\cos i = \cos \mathrm{I} \cdot \cos \mathrm{II}$.

Beispiel: $\beta_1 = 49^0 27'$ (Nürnberg), $\beta_2 = 46^0 50'$ (Rom), $\lambda_2 = 36\frac{1}{3}^0$, $\lambda = 8^0$. $\mathrm{I} = 5^0 50'$, $x = 42^0 15'$, $\mathrm{II} = 7^0 12'$, $i = 9^0 20'$. Um die Entfernung in italienischen Meilen zu erhalten, multipliziere man mit $62\frac{1}{2}$; man erhält 584 italienische Meilen = 140 deutsche Meilen ($1^0 = 15$ deutsche Meilen) = 4666 Stadien ($1^0 = 500$ Stadien).

min. XV, quibus prolixiori latitudini detractis secundum relinquetur inventum grad. VII min. XII fere. Huius demum complemento partium LXXXII min. XXXXVIII atque inventi primi complemento per introitum secundum partes exibunt LXXX min. XXXX fere, quibus quadranti detractis remanent grad. IX min. XX, quibus scilicet Norimberga Germaniae civitas ab urbe Roma recedit; quod est intentum.

Si quis autem hoc intervallum per miliaria cupiat noscere Italica, his ducat grad. IX et XX min. seu tertium unum gradus unius, per LXII et semis.| 397v Nam et tot milia passuum componunt gradum unum circuli magni in telluris superficie descripti. Ait enim Plinius ex autoritate Eratosthenis passus CXXV stadium unum conficere, mille autem passus milliare italicum. Supponamus ergo secundum Ptolemaeum[a]) uni gradui convenire stadia CCCCC. Notandum est etiam iuxta multorum opinionem germanicum milliare par esse leucae, qua Galli et Hispani sua metiuntur itinera. Necessario sequitur, ut grad. I terrestris efficiat millia passuum LXII et semis, quare totius itineris inter Romam et Norimbergam magnitudo complectitur millia passum DLXXXIIII fere. Sed praebendo grad. uni milliaria germanica XV idem iter ex eisdem milliaribus constituetur CXXXX fere, sed iuxta graecam itinerum observationem venient fere stadia IIII MD CCLXVI.

Diversis deinceps duorum locorum latitudinibus ad eandem plagam oblatis cum differentia longitudinum quadrantem aequante secundus fiat introi|tus 398r cum utrisque latitudinibus. Arcus itaque repertus, si grad. LXXXX detrahatur, interstitium relinquit quaesitum.

Velut suppositis duobus locis, uno cum latitudine vel austrina vel boreali grad. XXVI, altera vero cum eiusdem partis latitudine grad. XXXX, eorum autem longitudinis differentia sit quadrans. Volens igitur itinerarium computare intervallum, secundo introitu ingredior cum utrisque latitudinibus, excipioque partes XVI cum min. XV fere. His quadranti detractis grad. LXXIII min. XXXXV desiderati remanent interstitii.

Deinde differentia longitudinali pro subiectis locis, quam sit quadrans, constituta maiore, minore tamen quam semicirculus, ergo quadrans differentiae

a) Hs. hat *Ptolemaei*.

---

4. $\beta_1 \gtrless \beta_2$, $\lambda = 90^0$; $\cos i = \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2$.

Beispiel: $\beta_1 = 26^0$, $\beta_2 = 40^0$; $i = 73^0 45'$.

5. $\beta_1 > \beta_2$, $90^0 < \lambda < 180^0$; $\sin \mathrm{I} = \sin(\lambda - 90^0)\cos\beta_1$, $\sin \mathrm{II} = \frac{\sin\beta_1}{\cos \mathrm{I}}$, $\sin \mathrm{III} = \cos \mathrm{II} \cdot \sin\beta_2$, $\cos \mathrm{IV} = \frac{\cos\beta_2}{\cos \mathrm{III}}$, $\mathrm{V} = \mathrm{IV} + (90^0 - \mathrm{I})$; $\sin(i - 90^0) = \cos \mathrm{III} \cdot \cos \mathrm{II} \cdot$ (für $\mathrm{I} > \mathrm{IV}$).

$\mathrm{I} = \mathrm{IV}$; $\mathrm{V} = 90^0 = i$.

$\mathrm{I} < \mathrm{IV}$; $\mathrm{V} > 90^0$; $\sin \mathrm{VI} = \sin(\mathrm{V} - 90^0) \cdot \sin \mathrm{III}$, $i = 90^0 - \mathrm{VI}$.

Beispiel: $\beta_1 = 60^0$, $\beta_2 = 30$, $\lambda = 150^0$; wie oben. Res. $i = 86^0 40'$.

5. $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $90^0 < \lambda < 180^0$, ebenso wie 2.

6. $\lambda = 180^0$; $i = 180^0 - (\beta_1 + \beta_2)$ für gleiche und $i = \beta_1 + 180^0 - \beta_2$ für verschiedene Vorzeichen von β_1 und β_2.

7. $\lambda < 180^0$, $\beta_1 = -\beta_2$; $\cos\frac{i}{2} = \cos\beta_1 \cos\frac{\lambda}{2}$. Beispiel wie oben.

longitudinum auferendus est; reliquum et complementum maioris latitudinis per introitum secundum meteoroscopio introductum primum proferat inventum, cuius complemento atque maiore latitudine per primum aut quintum introitum 398v arcus educatur, qui secundum esto inventum, cuius deinde | complemento atque latitudine minore per introitum secundum arcus tertii reperiatur inventi, cuius complemento atque minoris latitudinis complemento per primum aut quintum introitum arcus inveniatur, quo sublato de grad. LXXXX quartum remanebit inventum, quo iuncto ad inventi primi complementum erit haec aggregationis summa quintum inventum; cum cuius demum complemento atque cum complemento inventi tertii secundus si fiat introitus, arcum obtinebimus, quo ad quadrantem coniecto quaesitum constabit intervallum. Foret itaque faciendum, quando inventum primum fuerit quarto maius invento. At si quartum inventum primo par fuerit, ipsius interstitii arcus quadrantem aequabit, quare rursus nostra liquebit intentio.

Ubi vero primum inventum minus fuerit invento quarto, quintum inventum gradus exsuperabit LXXXX, igitur ex invento quinto quadrantem auferamus, reliquum cum inventi 399r | tertii complemento per introitum secundum sextum producet inventum, quod quadranti detrahentes propositum relinquimus.

Sint ergo loca duo, quorum unus latitudinem possideat partium XXX, alter[a]) habeat eiusdem partis latitudinem grad. LX, et propositum esto reperire itineris intervallum alterius ad alterum, subiecta tamen prius longitudinum differentia partium CL. Igitur per introitum secundum ingrediens cum maioris latitudinis complemento partium XXX atque cum partibus LX, quibus differentia longitudinum quadrantem supergreditur, reperio inventum primum ex partibus XXV et min. XXX constare, quarum deinde complemento graduum LXIIII et semis atque maiori latitudine partium LX per primum aut quintum introitum secundum deprehenditur inventum grad. LXXIII et semis, quorum deinde complemento partium XVI et semis et minori latitudine partium XXX per secundum introitum elicio inventum tertium grad. VIII, quorum complemento partium LXXXII atque minoris latitudinis complemento per primum 399v aut quintum introitum partes | produco LXI, quibus ex grad. LXXXX detractis quartum remanet inventum grad. XXIX. Quod si primi congregavero inventi complemento, quintum excrescet inventum partium XCIII et semis, quibus quadrante detracto gradus remanebunt tres et semis. Eis demum et inventi tertii complemento partium LXXXIII per introitum secundum produco grad. III et min. XXX, quibus denique quadranti sublatis quaesitum itineris relinquitur intervallum partium LXXXVI min. XXXX; quod est intentum.

Quod si longitudinum differentia proponatur maior grad. LXXXX, minor tum grad. CLXXX, subiectaque loca pares habuerint ad eandem plagam lati-

a) Hs. hat *alterum*.

8. $\lambda < 90^0$, β_1 positiv, β_2 negativ; $\sin \mathrm{I} = \cos\beta_2 \cdot \sin\lambda$, $\sin x = \frac{\sin\beta_2}{\cos \mathrm{I}}$,
$\mathrm{II} = 90^0 - x + 90^0 - \beta_1$, $\sin \mathrm{III} = \cos \mathrm{I} \cdot \cos \mathrm{II}$, $i = \mathrm{III} + 90^0$ (für $\mathrm{II} < 90^0$).
$\mathrm{II} = 90^0$; $i = 90^0$.
$\mathrm{II} > 90^0$; $\cos i = \cos \mathrm{I} \cdot \sin(\mathrm{II} - 90^0)$.
Beispiel: wie oben.

tudines, haud secus agendum est, ac si longitudinum differentia subiceretur quadrante minor, paribus etiam subiectis ad eandem plagam latitudinibus.

Ubi demum longitudinum differentia semicirculum impleverit, locorum latitudines, si eiusdem fuerint appellationis, simul | aggregentur. Hoc itaque 400r aggregatum semicirculo sublatum, petitum relinquit intervallum.

At tali longitudinum differentia subiecta cum latitudinibus diversarum denominationum, igitur latitudinum altera semicirculo sublata arcum relinquet, quod ad reliquam latitudinum adiecto intervallum, quod quaerebatur, iterum patebit.

Sed datis duorum locorum latitudinibus aequis ad diversas ab aequatore partes cum longitudinum differentia, quae minor sit semicirculo, ea igitur per aequa scindatur, et eius dimidii complementum cum complemento alterius latitudinum per secundum si deducatur introitum, arcus quidam prodibit, quo ex LXXXX grad. oblato et eo, quod remanet, duplicato nostrum liquebit intentum.

Sint ergo causa exempli loca duo longitudinis habentia differentiam partium CXX, et utrumque latitudinem obtineat grad. LX, alterum quidem versus austrum, alterum vero boream | versus. 400v

Volens ergo illorum invenire interstitium sumo longitudinalis differentiae dimidium grad. LX, quorum complementum partium XXX cum paris latitudinis complemento grad. quoque XXX per secundum inducens introitum comperio partes XIIII cum min. XX fere, quibus quadranti sublatis gradus remanent LXXV min. XXXX. His demum geminatis intervallum, quod desiderabatur, constabitur grad. CLI min. XX.

Deinceps autem locorum duorum latitudinibus oblatis ad varias aequatoris partes cum differentia longitudinali grad. LXXXX minore, igitur secundus fiat introitus cum eadem differentia atque cum complemento austrinae latitudinis ac deinde primus aut quintus exerceatur introitus cum arcus extracti, qui primum dicatur inventum, complemento atque austrina latitudine repertique arcus complementum borealis addatur latitudinis complemento, et hoc aggregatum inventum esto secundum. Cum huius denique | complemento atque 401r cum inventi primi complemento per secundum rursus introitum arcus quidam eliciatur, qui tertium sit inventum. Quod si quadranti iungatur, quaesitum constabitur interstitium. Sin autem secundum inventum quadrans evenerit, necesse est locale intervallum quadranti quoque par esse.

Ubi vero illud quadrantem exsuperaverit, ei grad. LXXXX sublatis et cum residuo atque cum complemento inventi primi arcus introitu secundo reperiatur, qui quadranti sublatus relinquit intervallum, quod quaerebatur.

Sint ergo loca duo, quorum unus[a]) austrinum possideat latitudinem par-

a) Hs. hat *unum*.

9. $90^0 < \lambda < 180^0$, β_1 positiv, β_2 negativ; $\sin \mathrm{I} = \cos \beta_2 \cdot \sin (180^0 - \lambda)$ $\cos \mathrm{II} = \frac{\sin \beta_2}{\cos \mathrm{I}}$, $x = \mathrm{II} - (90^0 - \beta_1)$, $\sin \mathrm{III} = \cos x \cos \mathrm{I}$, $i = 90^0 + \mathrm{III}$.

$\mathrm{II} = 90^0 - \beta_1$; $i = 180^0 - \mathrm{I}$.

Beispiel wie oben.



tium XL, alter[a]) borealem graduum LX, sitque longitudinis eorum partium LXX, et propositum esto itineris eorum reperire intervallum.

Igitur per introitum secundum cum eadem differentia longitudinis atque austrinae latitudinis complemento grad. L inventi primi reperio quantitatem 401v grad. XXXXVI, quorum deinde complemento partium XLIIII et austrina la|titudine grad. XXXX per primum aut quintum introitum prodeunt partes LXVIII cum tertio unius, quorum complementum grad. XXI min. XXXX addens borealis complemento latitudinis secundum constituo inventum partium LI min. XXXX, quarum demum complemento grad. XXXVIII min. XX atque primi complemento inventi per introitum secundum pro tertio invento partes exibunt XXV et min. XX, quadranti quibus adiectis investigatum proditur interstitium grad. CXV et min. XX, quod intendebam reperire.

Ubi deinceps inaequalibus latitudinibus ad diversas ab aequatore plagas subiectis longitudinum differentia quadrantem excedat, minor tamen semicirculo, eadem gradibus CLXXX est auferenda, reliquum cum austrinae latitudinis complemento per introitum secundum proferat inventum primum, cuius deinde complemento atque latitudine austrina per primum aut quintum introitum qui- 402r dam | reperiatur arcus, quo grad. LXXXX dempto reliquum secundum esto inventum. Quod si borealis complemento latitudinis exsuperetur aut econtra, minus ex maiori detrahatur, si secundum inventum borealis latitudinis complemento maius extiterit, ac deinde residui complemento atque complemento inventi primi per introitum secundum arcus extrahatur inventi tertii, quo grad. LXXXX coniecto intervalli, quod petebatur, quantitas erit perspicua.

At secundo invento complementum borealis latitudinis aequante inventum primum semicirculo dematur, ac iterum constabit intentio.

Pro hac doctrina tale sit exemplum: Loca duo sunto, quorum unus[b]) austrinam teneat latitudinem grad. XXXX, alter vero septentrionalem partium LX, longitudinumque differentia graduum esto CXX, quibus ex semicirculo sublatis erit residuum grad. LX; quibus et complemento latitudinis austrinae 402v grad. L per introitum secundum pro inven|to primo grad. XXXXI et semis invenio, quorum deinde complemento partium XLVIII et semis ipsaque latitudine austrina per primum aut quintum introitum partes elicio LIX min. XX, quarum complementum grad. XXX min. XXXX, secundum scilicet inventum, quoniam maius est borealis latitudinis complemento, igitur hoc ex illo demptum remanent min. XXXX, quibus quadranti detractis partes relinquuntur LXXXIX cum min. XX, quibus et inventi primi complemento grad. XXXXVIII et semis per introitum secundum pro invento tertio partes excipiuntur XLVIII min. XXVI fere. His demum quadranti congregatis habeo grad. CXXXVIII min. XXXX, quod est intentum.

a) Hs. hat *alterum*. b) Hs. hat *unus* korr. aus *unius*.

10. $\lambda = 90^0$, β_1 positiv, β_2 negativ; $\sin(i - 90^0) = \sin\beta_1 \sin\beta_2$.
Beispiel wie oben.

11. $\beta_2 = 0$; $\lambda_1 - \lambda_2 = 90^0$; $i = 90^0$.
$\lambda_1 - \lambda_2 < 90^0$; $\cos i = \cos\lambda \cdot \cos\beta_1$.
$\lambda_1 - \lambda_2 > 90$; $\sin(i - 90^0) = \sin(\lambda - 90^0)\cos\beta_1$.
Beispiel wie oben.

Latitudinibus postremo inaequalibus non ad eandem partem subiectis cum longitudinum differentia quadrantem aequante secundus fiat introitus cum latitudinibus duabus. Arcus itaque | compositus et quadranti coniunctus exhibebit propositum. 403r

Sint igitur exempli gratia loca duo, quorum unius austrina latitudo sit partium XLV, alterius vero borealis grad. LXIII, estoque intentio itineris intervallum inter data reperire loca; subiecto scilicet quadrante pro longitudinum differentia, igitur secundo introitu cum latitudine boreali grad. LXIII atque cum austrina latitudine partium XLV producens grad. fere XXXIX eos adicio quadranti, crescetque locorum intervallum partium CXXXIX, quod oportebat invenire.

Haec hucusque de locis latitudines habentibus; nunc de locis his dicendum est, quorum alter aut uterque latitudine careat; quod si locus unus latitudinem obtinuerit, altero subter aequatorem examussim posito cum longitudinum differentia quadrantem aequante necesse est, ut intervallum locale sit etiam quadrans, longitudinum autem differentia grad. LXXXX inferiore, igitur per introitum secundum cum talis complemento differentiae atque | cum alterius loci latitudinis complemento arcus extrahatur, quo grad. LXXXX detracto interstitium, quod quaerimus, relinquitur. 403v

Denique huiusmodi longitudinum differentia quadrantem exsuperante, altero scilicet datorum locorum latitudinem tantum obtinente, longitudinali differentiae quadrans subtrahendus est, residuum cum latitudinis complemento introitu secundo quendam producet arcum, quo grad. LXXXX congregato desideratum exhibebitur intervallum.

Datis autem locis sub aequatore positis aliud non erit itineris intervallum, quam ipsa longitudinum differentia; pro praesenti doctrina unicum dumtaxat exemplum esse satis arbitror.

Sint ergo loca duo, quorum unius latitudo fuerit grad. XXXX, alterius sedes aequatori subiciatur, sitque differentia longitudinis eorum grad. CXX, et esto propositum iter ipsum inter haec loca di | metiri. Tollens igitur ex differentia longitudinum quadrantem relinquo grad. XXX, quibus deinde atque subiecta latitudinis complemento grad. L per introitum secundum deprehendo partes XXII cum tertio, his adiectis quadranti gradus prodeunt CXII cum tertio unius, quibus postremo investigatum itineris intervallum perspicitur. 404r

Quantum in hoc etiam problemate Ioannes de Regiomonte in canonibus super primo mobili defecerit, nemo nesciet, qui cum illius commentis haec mea contulerit, milliaria demum aut stadia cognoscat[a]) et gestiens praedicta repetat.

a) Hs. hat *cognosce*.

---

88. Proposition.

Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen zwei Orten und der Breite des einen Ortes aus ihrem Abstand, der Breite des anderen Ortes und seinem Richtungswinkel (Azimut).

Der Richtungswinkel r ist der Winkel des Abstandes mit dem Meridian.

Propositio LXXXVIII.

Si itinere inter data loca cognito latitudo noscatur alterius 404v tantum loci, cui notus positionis subicitur angulus, | eorum longitudinis differentiam atque alterius loci latitudinem patefieri.

Subiectum iter vel in millibus passuum vel stadiis aut leucis aut in quibuscumque aliis itinerum mensuris in gradus reducatur iuxta doctrinam in praecedenti traditam.

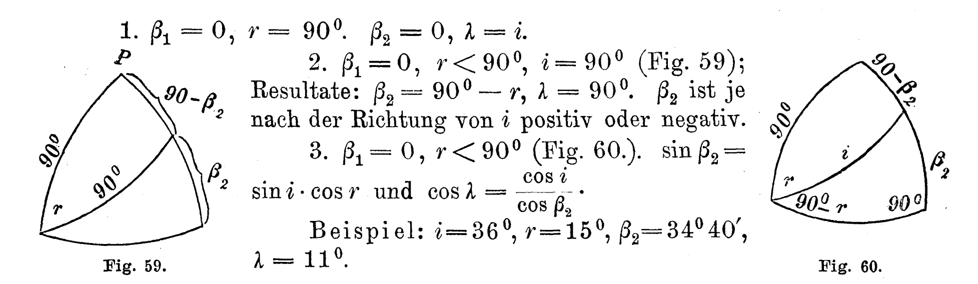
Deinde si locorum alter aequinoctiali subiciatur, rectusque fuerit positionis angulus, quantacumque itineris subiecta quantitate reliquus quoque locus sub aequinoctiali poni necessario convincitur, longitudinum etiam differentia itineri coaequabitur; locorum autem altero subtus aequatorem posito quantitas itineris par fuerit quadranti, et positionis angulus quadrante minor, igitur eodem angulo de grad. LXXXX dempto reliquum erit latitudo alterius loci, septentrionalis quidem, si[a]) viae processus ab aequinoctiali ad septemtrionem 405r vergebat, meridionalis vero, si versus | austrum, ac longitudinum differentia quadrans necessario constituetur

Deinde loco dato subter aequatorem posito cum positionis angulo grad. LXXXX minore sive acuto, igitur secundus fiat introitus cum itineris arcu et cum dati complemento anguli, arcus itaque compertus alterius loci latitudo constituatur, facto deinde introitu primo vel quinto cum complemento latitudinis iam repertae atque cum arcus itinerarii complemento arcus exibit, quo grad. LXXXX detracto quaesita longitudinum relinquitur differentia.

Ut duorum locorum alter aequatori subiciatur, alter vero ad septentrionem accedat, prioris ad hunc iter contineat grad. XXXVI cum positionis angulo partium XV, propositumque sit latitudinem alterius loci et longitudinum differentiam invenire; secundo igitur introitu per complementum dati anguli grad. XXV et iter subiectum grad. XXXVI alterius invenio loci latitudinem partium XXXIIII min. XXXX; deinde per introitum primum aut quintum cum itineris complemento grad. LIIII atque cum inventae latitudinis complemento partium | 495v LV min. XX invenio gradus LXXIX, quibus quadranti detractis grad. XI remanent, qui sunt longitudinum differentia, quam investigabam.

Si de locis subiectis alter sub aequatore iaceat, apud quem positionis angulus fuerit rectus, atque unius ad alterum itineris longitudo supra quadrantem protendatur, ergo secundus fiat introitus cum anguli dati complemento atque cum eo arcu, qui remanet itinere gradibus CLXXX detracto, arcus ita-

a) Hs. hat *sic*.



1. $\beta_1 = 0$, $r = 90^0$. $\beta_2 = 0$, $\lambda = i$.

2. $\beta_1 = 0$, $r < 90^0$, $i = 90^0$ (Fig. 59); Resultate: $\beta_2 = 90^0 - r$, $\lambda = 90^0$. β_2 ist je nach der Richtung von i positiv oder negativ.

3. $\beta_1 = 0$, $r < 90^0$ (Fig. 60.). $\sin\beta_2 = \sin i \cdot \cos r$ und $\cos\lambda = \frac{\cos i}{\cos\beta_2}$.

Beispiel: $i = 36^0$, $r = 15^0$, $\beta_2 = 34^0 40'$, $\lambda = 11^0$.

Fig. 59. Fig. 60.

que compertus alterius erit loci latitudo, septemtrionalis quidem, si in septemtrione iter vergat, austrina[a]), si ad austrum aspiciat; subtrahatur deinde quadrans itineris quantitati, reliquum cum latitudinis iam inventae complemento per primum aut quintum introitum reddet nobis arcum, qui quadranti coniunctus longitudinum differentiam constituet.

Ut duorum locorum alter esto subiectus aequatori cum positionis angulo grad. XXXVI, viae spatium inter haec loca duo contineat grad. CXX[b]), et sit intentio alterius lati|tudinem loci atque longitudinum differentiam invenire. 405v Igitur subtracto itinere grad. CXX de semicirculo grad. remanent LX, quibus et dati anguli complemento per introitum secundum excipio quaesitam latitudinem partium XLIIII et semis; gradibus deinde LXXXX ex itinere sublatis gradus relinquntur XXX, qui cum repertae latitudinis complemento partium XLV min. XXX per primum aut quintum introitum produnt grad. XXXXIIII min. XXXXX, quadranti quibus adiectis longitudinis exibit differentia partium CXXXIIII et min. XXXXV fere.

Si propositorum duorum locorum alter aequinoctiali subiciatur, apud quem positionis angulus quadrante maior fuerit, itinere unius ad alterum grad. LXXXX coaequante, fiet longitudinis differentia quadrans. Deinde si detraxerimus angulo dato quadrantem, erit residuum alterius loci latitudo in eam plagam deflexa, in quam iter praecipue dirigitur.

Subiecto itaque subter aequatorem aliquo loco, inter | quem et aliam ab 406r aequatore in septemtrionalem plagam locatum itineris observati longitudo ex amussim grad. contineat LXXXX, angulus autem positionis partes amplectatur CXXVII; dico igitur longitudinum differentiam inter haec loca constare quadrantem, sublatis deinde ex anguli huius quantitate grad. LXXXX relinquitur alterius loci latitudo partium XXXVII, quod est intentio.

Denique locorum altero, ut iam subter aequatorem posito cum positionis angulo quadrantem excedente, si spatium itinerarium hoc grad. etiam LXXXX exsuperaverit, igitur itineris arcus ex semicirculo abiciatur, residuum cum arcu, qui relinquitur, dato positionis angulo grad. LXXXX detractis per introitum secundum praebebit nobis alterius loci latitudinem septemtrionalem, si quidem profectio fuerit in borealem ab aequatore plagam, meridionalis autem erit latitudo, si in austri|nam; auferamus deinceps ex itineris arcu quadrantem re- 406v liquum, et inventae latitudinis complementum introitu primo vel quinto pro-

a) Hs. hat *austrinam*.
b) Nach *CXX* hat Hs. die Worte *de semicirculo grad. remanent* (vgl. unten) gestrichen.

4. $\beta_1 = 0$, $r < 90^0$, $i > 90^0$. Resultat: $\sin\beta_2 = \sin(180^0 - i)\cos r$ und $\sin(\lambda - 90^0) = \frac{\sin(i - 90^0)}{\cos\beta_2}$.

Beispiel: $r = 36^0$, $i = 120^0$. $\beta_2 = 44\frac{1}{2}^0$, $\lambda = 134^0 45'$.

5. $\beta_1 = 0$, $r > 90^0$, $i = 90^0$ (Fig. 61). $\lambda = 90^0$, $\beta_2 = r - 90^0$.

Beispiel: $r = 127^0$; $\beta_2 = 37^0$.

Fig. 61.

ducat nobis arcum, qui quadranti coniectus quaesitam longitudinum differentiam componet.

Sint igitur loca duo, et eorum altero sub aequatore sedem suam statuente positionis angulus ibidem obtineat partes CXXIIII, iter autem inter eadem grad. CXI, et propositum esto alterius loci latitudinem cum longitudinum differentia reperire; abiecto igitur itineris arcu de grad. CLXXX erit reliquum grad. LXIX; sublatis deinde angulo huic grad. LXXXX partes remanebunt XXXIIII, quae residua duo per introitum secundum ipsam offerunt latitudinem partium XXXI et min. XX eius partis, in quam contingit profectio.

Ex itineris arcu deinde quadrans auferatur, erit itaque reliquum grad. XXI, qui cum inventae latitudinis complemento partium LVIII min. XXXX per introitum aut primum aut | quintum reddunt grad. XXIIII min. XXXXV fere, (407v) his cum quadrante congregatis longitudinalis resultat differentia partium CXIIII min. XXXXV, quod oportebat invenire.

Post haec, si factus apud locorum alterum quadrante minoris latitudinis angulus LXXXX gradibus inferior extiterit, itinere quoque non exsuperante quadrantem, secundum exerceamus introitum cum subiectae latitudinis complemento atque cum angulo dato, repertus itaque arcus primum esto inventum. Deinde primus aut quintus fiat introitus cum huius inventi complemento atque cum subiecta latitudine, arcus itaque collecti complementum pro secundo servetur invento, id si par itineri fuerit, ipsum cum latitudinis complemento per primum aut quintum introitum manifestabit desideratam longitudinis differentiam, ipsum quoque primum inventum, si quadranti detractum fuerit, alterius la|titudinem loci relinquet. (408r)

At secundo invento minore, quam itineris arcus extiterit, hoc ex illo dematur, residuum tertium sit inventum, cuius complementum cum primi complemento inventi secundo introitu producet, quo loci latitudinem manet alterius, cuius deinde complemento atque invento tertio eodem per primum aut quintum introitum arcus exibit, quo duplicato longitudinis differentia prodetur, si residuum hoc, quod tertium sit inventum, invento secundo par fuerit, id est, si secundum inventum itineris dimidium fuerit, sin autem idem inventum tertium, quod scilicet relinquitur, quando secundum inventum itineri detrahitur, invento secundo fuerit impar, ergo cum repertae latitudinis complemento atque cum

---

6. $\beta_1 = 0$, $r > 90^0$, $i > 90^0$. Resultat: $\sin \beta_2 = \sin (180^0 - i) \sin (r - 90^0)$; $\sin (\lambda - 90) = \frac{\sin (i - 90^0)}{\cos \beta_2}$.

Beispiel: $r = 124^0$, $i = 111^0$. $\beta_2 = 31^0 20'$, $\lambda = 114^0 45'$.

Fig. 62.

7. $\beta_1 < 90^0$, $r < 90^0$, $i < 90^0$ (Fig. 62). Resultat: $\sin \mathrm{I} = \cos \beta_1 \cdot \sin r$ $(\mathrm{I} = PL)$ $\cos \mathrm{II} = \frac{\sin \beta_1}{\cos \mathrm{I}}$ $(\mathrm{II} = \Sigma_1 L)$.

Ist $i = \mathrm{II}$, so ist $\sin \lambda = \frac{\sin \mathrm{II}}{\cos \beta_1}$ und $\beta_2 = 90^0 - \mathrm{I}$.

Ist $\mathrm{II} < i$, so ist $\mathrm{III} = i - \mathrm{II} (= L\Sigma_2)$ und $\sin \beta_2 = \cos \mathrm{I} \cdot \cos \mathrm{III} (\beta_2 = 90^0 - P\Sigma_2)$. Ferner, wenn $\mathrm{III} = \mathrm{II}$ ist, $\sin \frac{\lambda}{2} = \frac{\sin \mathrm{III}}{\cos \beta_2} \left(\frac{\lambda}{2} = LP\Sigma_2\right)$. Ist aber

invento tertio per primum aut quintum introitum arcus extrahatur, qui pro quarto invento servandus est, deinde iterum primus aut quintus fiat introitus cum complemento latitudinis suppositae atque cum invento secundo, arcus itaque collectus invento quarto coniectus longitu|dinum differentiam iterum (408v) constituet, sed invento secundo itinerarium exsuperante spatium illo ex hoc ablato reliquum esto tertium inventum, cuius complemento atque primi complemento inventi per introitum secundum loci latitudo alterius educetur, deinde primo vel quinto introitu per complementum subiectae latitudinis atque per secundum inventum arcus emanabit, qui quartum vocetur inventum. Postea primum rursus aut quintum agamus introitum cum complemento latitudinis alterius loci modo repertae cumque tertio invento; arcus itaque compertus quarto iunctus invento iterum petitam conflabit longitudinis differentiam.

Proponantur igitur exempli gratia duo loca, sitque unius eorum latitudo grad. XXXXI, alterius vero ad alterum via contineat grad. XXX, positionis autem angulus apud locum subiectae latitudinis esto grad. LXX, et sit intentio alterius loci latitudinem invenire atque longitudinis differentiam. Se|cundo (409r) igitur introitu per subiectae latitudinis complementum grad. XXXXVIIII atque angulum dat. grad. XXXXV min. X pro primo producuntur invento, cuius deinde complemento partium XLIIII min. L atque data latitudine grad. XXXXI per introitum primum aut quintum arcus exibit graduum LXVIII min. XXX, qui quadranti detractus relinquit pro invento secundo partes XXI et semis, quibus ex itineris arcu sublatis tertium remanet inventum grad. VIII et semis, quorum demum complemento partium LXXXI min. XXX atque primi complemento inventi grad. XXXXIIII min. L per secundum introitum loci alterius exibit latitudo grad. XXXXV et min. X unius, quorum complementum partium XLIII min. L cum invento tertio per primum aut quintum introitum prodit inventum quartum partium XII et min. XV, primo rursus aut quinto introitu per complementum subiectae latitudinis grad. exeunt XXIX min. XXXXV, quibus quarto congregatis invento longitudinis differentia quaesita constituetur partibus XLII fere.

Sed ubi latitudo alterius loci quadrante minor subicitur cum itinere LXXXX gradibus inferiore et posi|tionis angulus rectus fuerit, hoc est grad. (409v) LXXXX complectatur, ergo secundus fiat introitus cum itineris complemento

---

$\mathrm{III} \gtrless \mathrm{II}$, so bildet man $\sin \mathrm{IV} = \frac{\sin \mathrm{III}}{\cos \beta_2}$ $(\mathrm{IV} = LP\Sigma_2)$ und $\sin x = \frac{\sin \mathrm{II}}{\cos \beta_1}$ $(x = \Sigma_1 PL)$, dann ist $\lambda = \mathrm{IV} + x$.

Ist $\mathrm{II} > i$, so ist $\mathrm{II} - i = \mathrm{III}$, $\sin \beta_2 = \cos \mathrm{III} \cdot \cos \mathrm{I}$, $\sin \mathrm{IV}' = \frac{\sin \mathrm{II}}{\cos \beta_1}$ $(\mathrm{IV}' = \Sigma_1 PL)$, $\sin x' = \frac{\sin \mathrm{III}}{\cos \beta_2}$ $(x' = \Sigma_2 PL)$, $\lambda = \mathrm{IV}' + x'$.

Beispiel: $\beta_1 = 41^0$, $i = 30^0$, $r = 70^0$. Resultat: $\mathrm{I} = 45^0 10'$, $\mathrm{II} = 21\frac{1}{2}^0$, $\mathrm{III} = 8\frac{1}{2}^0$, $\beta_2 = 45^0 10'$, $\mathrm{IV} = 12^0 15'$, $x = 29^0 45'$, $\lambda = 42^0$.

8. $\beta_1 < 90^0$, $i < 90^0$, $r = 90^0$ (Fig. 63). $\sin \beta_2 = \cos i \sin \beta_1$, $\sin \lambda = \frac{\sin i}{\cos \beta_2}$.

Beispiel: $\beta_1 = 42^0$, $i = 35^0$, $r = 90^0$. Resultat: $\beta_2 = 33^0 10'$, $\lambda = 43\frac{1}{2}^0$.

Fig. 63.

atque cum subiecta latitudine, arcus itaque compertus loci alterius erit latitudo partis eiusdem, in quam et subiecta recedebat latitudo; longitudinis autem differentia quinto aut primo proveniet introitu cum iam repertae latitudinis complemento atque cum subiecto viae spatio.

Velut sint loca duo, et unius eorum latitudo complectatur grad. XXXXII, itineris quoque longitudo partes habeat XXXV, positionis autem angulus apud locum subiectae latitudinis obtineat grad. LXXXXI, propositumque sit alterius latitudinem loci et utriusque longitudinum reperire differentiam. Igitur per introitum secundum cum itineris complemento grad. LV atque cum latitudine supposita partium XLII loci reperitur alterius latitudo grad. XXXIII min. X, quorum deinde complementum partium LVI min. L cum subiectae profectionis arcu grad. XXXX per primum aut quintum introitum quaesita patebit | longitudinum differentia grad. XXXXIII et semis fere.

410[r]

At utroque, quam itinere, tam nota loci alterius latitudine grad. LXXXX minore supposita cum angulo positionis obtuso, igitur eodem ex gradibus CLXXX sublato residuum cum arcu datae viae per introitum secundum producat inventum primum, cuius deinde complemento atque itineris complemento per primum aut quintum introitum arcus procedat, quo ad suppositae complementum latitudinis coniuncto secundum emerget inventum, quo quadrantem complente alter locorum subter aequatorem constitui necessario comprobatur, primum itaque inventum longitudinum differentia.

Sin autem inventum secundum quadrante permanserit inferius, igitur complementum inventi primi atque complementum inventi secundi praebebit introitu secundo quaesitam alterius latitudinem loci, secundo denique invento quadrantem exsuperante quadrans eidem auferatur, residuum cum inventi primi complemento investigatam exhibebit latitudinem, quae tamen in aliam migrabit aequatoris partem. |

410[v]

At pro posterioribus his inventi secundi modis longitudinis differentiam reperiemus introitu primo vel quinto per prius inventae latitudinis complementum atque per inventum primum.

Sit ergo suppositi loci latitudo grad. XX atque positionis angulus versus locum alterum partium CXXV, arcus itineris inter eadem loca grad. XXXX, estoque propositum alterius locorum latitudinem invenire; igitur dato positionis angulo grad. CLXXX sublato erit residuum partium LIIII, cum quibus atque cum dato itineris arcu grad. XXXX per introitum secundum arcus primi proditur inventi grad. XXXI min. XX fere, cuius deinde complemento partium

---

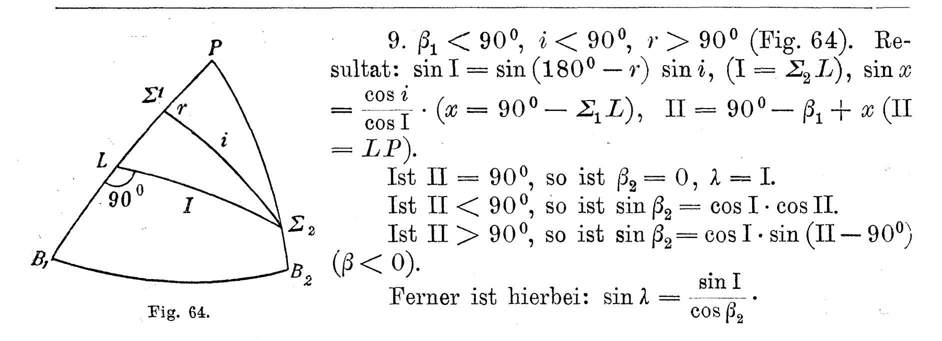


Fig. 64.

9. $\beta_1 < 90^0$, $i < 90^0$, $r > 90^0$ (Fig. 64). Resultat: $\sin \mathrm{I} = \sin(180^0 - r)\, \sin i$, $(\mathrm{I} = \Sigma_2 L)$, $\sin x = \frac{\cos i}{\cos \mathrm{I}} \cdot (x = 90^0 - \Sigma_1 L)$, $\mathrm{II} = 90^0 - \beta_1 + x$ $(\mathrm{II} = LP)$.

Ist $\mathrm{II} = 90^0$, so ist $\beta_2 = 0$, $\lambda = \mathrm{I}$.

Ist $\mathrm{II} < 90^0$, so ist $\sin \beta_2 = \cos \mathrm{I} \cdot \cos \mathrm{II}$.

Ist $\mathrm{II} > 90^0$, so ist $\sin \beta_2 = \cos \mathrm{I} \cdot \sin(\mathrm{II} - 90^0)$ $(\beta < 0)$.

Ferner ist hierbei: $\sin \lambda = \frac{\sin \mathrm{I}}{\cos \beta_2}$.

LVIII min. XXXX atque datae viae complemento grad. L per introitum quintum gradus exeunt LXIII et semis, quibus subiectae latitudinis complemento partium LXX coniectis secundum componitur inventum grad. CXXXIII min. XXX, quibus quadrante sublato erit residuum partium XLIII et semis.

His demum atque primi complemento inventi grad. XXXVIII min. XXXX per introitum secundum alterius latitudo loci egreditur | partium XXXVI, quorum denique complemento grad. LIIII atque invento primo per primum aut quintum introitum desiderata longitudinis exiit differentia partium fere XXXX. 411r

Praeterea, si quadrante latitudinem vincente propositum positionis etiam angulo grad. LXXXX minore itineris arcus quadranti par extiterit, ergo secundum agamus introitum cum angulo dato atque cum suppositae complemento latitudinis, arcus itaque compertus inventum esto primum, quo grad. LXXXX sublato, si residuum cum subiecta latitudine per primum aut quintum introitum ingeratur, arcus prodibit, cuius complementum secundum esto inventum, quod deinde cum primi complemento inventi per introitum secundum educet latitudinem quaesitam loci, scilicet alterius ad eandem aequatoris plagam.

Posthaec agamus primum aut quintum introitum cum suppositae complemento latitudinis atque cum invento secundo; arcus itaque collectus pro invento tertio servetur, per eundem quoque primum vel quintum introi|tum cum latitudinis iam repertae complemento cumque secundi complemento inventi ingredientes arcum deprehendimus, quo ad inventum tertium congregato ipsa constituetur longitudinum differentia. 411v

Igitur ex propositis locis alter habeat latitudinem grad. XXXXIX, angulus apud eundem constitutus esto grad. LX, iter vero quadrans, propositumque sit alterius latitudinem loci cum longitudinis differentia numerare; igitur per introitum secundum cum dato angulo grad. LX cumque subiectae complemento latitudinis inventum primum erit partium XXXIIII et semis. Deinde introitu vel primo vel quinto per huius inventi complementum grad. LV et semis perque latitudinem suppositam gradus eliciuntur LXVI, quibus quadranti detractis secundum residuat inventum partium XXIIII, quo et subiectae latitudinis complemento graduum XXXXI atque secundo invento per primum ant quintum introitum pro invento tertio grad. exeunt LIX et semis, rursus eodem introitu primo vel quinto partes emergunt LXXVI | fere, quibus ad inventum tertium aggregatis longitudinum differentia resultat grad. CXXXV et semis. 412r

---

Beispiel: $\beta_1 = 20^0$, $r = 125^0$, $i = 40^0$; Resultat: $\mathrm{I} = 31^0 20'$, $x = 63\frac{1}{2}^0$, $\mathrm{II} = 133^0 30'$, $\beta_2 = 36^0$, $\lambda = 40^0$.

10. $\beta_1 < 90^0$, $r < 90^0$, $i = 90^0$ (Fig. 65). $\sin \mathrm{I} = \sin r \cdot \cos \beta_1$ $(\mathrm{I} = PL)$ $\cos \mathrm{II} = \frac{\sin \beta_1}{\cos \mathrm{I}}$, $(\mathrm{II} = \Sigma_1 L)$, $\sin \beta_2 = \sin \mathrm{II} \cdot \cos \mathrm{I}$ $(90^0 - \beta_2 = P\Sigma_2)$.

Ferner: $\sin \mathrm{III} = \frac{\sin \mathrm{II}}{\cos \beta_1}$ $(\mathrm{III} = \Sigma_1 PL)$, $\sin x = \frac{\cos \mathrm{II}}{\cos \beta_2}$ $(x = LP\Sigma_2)$, $\lambda = \mathrm{III} + x$.

Fig. 65.

Propositio LXXXIX.

Duorum propositorum locorum, si cognitae fuerint latitudines cum positionis angulo prope alterum eorum, noto longitudinis reperire differentiam.

Nota loci utriusque latitudine cum positionis angulo per praemissam longitudinem differentia latere non poterit.

Propositio LXXXX.

Quocumque die, si solis supra quemcumque horizontem offe- 412v ratur altitudo, horam ante vel | post meridiem investigare.

Igitur pro vero solis loco propositae diei per XV huius semidiurni reperiatur arcus, qui quadrante minor semper est sole meridionalia signa seu austrinam zodiaci medietatem perambulante, maior autem quadrante in borealibus signis seu septentrionali signiferi semicirculo sole constituto, sed quadrans erit utriusque aequinoctiorum tempore.

Post haec per XIX pro loco solis meridiana eius altitudo reperiatur, quae in sexto regulae spatiolo numerata e regione finis huius numerationis, in quarto spatiolo regulae partes quaedam invenientur sexagesimae, quarum multitudo primus vocetur numerus, pari modo ad ipsam regulam, ut prius, intrando cum praesenti solis altitudine sexagesimae partes ex quarto capiantur spatiolo, quae summa secundus nuncupatur numerus.

413r Deinde advertendum est, utrum semidiurnus | quadrantem aequet, an eo fuerit vel maior vel minor; qui si quadrante fuerit inferior, eo quadranti sublato reliquum in sexto regulae spatiolo quaeratur, et e regione ipsius in quarto regulae spatiolo sexagesimarum numerus acceptus, qui horarium vocetur argumentum, ex LX numero dematur; residuum tertius erit numerus, quo in secundum ducto summaque producta in primum divisa quartus exibit numerus, quo rursus ad argumentum horarium iuncto hocque aggregatum, si in quarto regulae spatiolo computetur, e regione ipsius in spatiolo sexto graduum reperitur numerus, qui si de quadrante tollatur, gradus relinquuntur, quibus

---

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $r = 60^0$, $i = 90^0$. Resultat: $\mathrm{I} = 34\frac{1}{2}^0$, $\mathrm{II} = 24^0$, $\mathrm{III} = 59\frac{1}{2}^0$, $x = 76^0$, $\lambda = 135\frac{1}{2}^0$.

89. Proposition.

Bestimmung der Längendifferenz zweier Orte aus ihren Breiten und dem Richtungswinkel.

Die Aufgabe ist in der vorigen, in der λ aus β_1, r, β_2 berechnet wird, mit behandelt.

90. Proposition.

Bestimmung der wahren Sonnenzeit aus der Sonnenhöhe (Fig. 66).

Man sucht zunächst den halben Tagbogen t_m nach Proposition 15, dann die Kulminationshöhe h_m nach Proposition 19.

revolutis sol ad meridianum proveniet, si eius altitudo sumpta fuerit ante meridiem, aut tot gradibus a meridiano recessit, si post meridiem altitudo fuerit accepta, quibus demum per XIII huius in horas et earum minuta conversis nostra prodetur intentio.

Velut die XXIX decembris altitudo solisante meridiana sit grad. IX in regione, cuius | latitudo partium XLIX. Sol itaque illo die ad eandem regio- 413v nem, quasi in grad. XVIII capricorni quotannis constituitur; altitudo itaque meridiana solis habetur ferme partium XVIII min. XXXX, quibus in sexto regulae spatio computatis de quarto spatio sexagesimae XIX cum tertio unius respondent, quae pro primo serventur numero. Sed grad. IX altitudinis propositae in sexto spatio computatae de spatio quarto competunt sexagesimae IX et tertia duo, quae secundus erunt numerus, sed per XIII huius arcus semidiurnus est grad. LXI et semis fere, quibus ex quadrante sublatis remanent gradus XXVIII et semis, quibus ex regulae sexagesimis competunt XXVIII fere, et his horarii argumenti cognomen impositum esto, sublato de LX residuum erit XXXII sexagesimarum, quae tertium perhibent numerum, quo iuxta praemissam doctrinam in novenarium et duo tertia, qui secundus est numerus, ducto summa proveniet CCCIX et tertia; his per numerum primum, scilicet XIX, par|titis quartus exibit numerus XVI unitatum. His argumento horario, 414r videlicet XXVIIII sexagesimarum, quae per sextum et quartum regulae spatium indicant nobis gradus XXXXVII cum quarto unius fere, quorum complementum grad. XXXXII min. XXXXV est aequinoctialis portio, revolvenda quidem, donec sol meridianum possideat, eas autem per XIIII huius horae duae cum minutiis LI respondent, quod est intentum.

At arcu semidiurno quadrantem excedente numerus tertius alia quadam ratione investigabitur. Nam ipsi quadrans aufertur atque reliquo in regulae sexagesimas, velut traditum est, converso ipsum pro argumento servetur horario, cui numeris LX iunctis tertius conflabitur numerus, quare deinde iuxta traditionem praedictam quartus exibit numerus, quo argumentum coaequante horarium indicabitur nobis horas sex ad meridiem esse futuras, si solis altitudo fuerit antemeridiana, vel totidem horas a meridie praeteritas, si postmeridiana.

Sin autem | quartus numerus argumentum horarium superaverit, ex eo 414v

---

Mittels des „Lineals" bestimmt man dann $I = \sin h_m (= S_m F_m$ und $II = \sin h (= SF$, das Lineal gibt 60mal so große Werte, da der $\sin 90^0 =$ 60 Tl. gesetzt ist), ferner, wenn $t_m < 90^0$, $\sin(90^0 - t_m)$, das argumentum horarium H ($H = NM = \cos t_m$), und $III = 1 - H$, (da er mit 60mal größeren Zahlen rechnet, bildet er $60 - H$), $III = S_m M - NM = S_m N$, hierauf $IV = \frac{II \cdot III}{I}$ (da $\triangle S_m F_m N \sim \triangle SFQ$, so ist $IV = SQ = \frac{SF}{S_m F_m} \cdot S_m N$), $IV + H (= MN + SQ = MO)$ uud sucht endlich den Winket t, dessen cosinus $= IV + H$ ist ($MO = \cos \widehat{S_m S} = \cos t$).

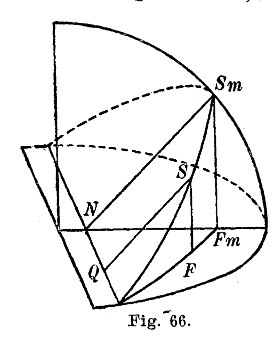


Fig. 66.

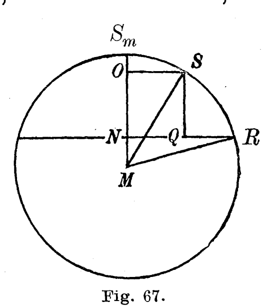


Fig. 67.

illud auferendum est, et reliquo per sextum ac quartum regulae spatium in grad. commutato eoque arcu quadranti dempto residuum erit numerus graduum aequatoris, revolvendus quidem, priusquam sol meridianum possideat, altitudine solis proposita antemeridiana, vel revolutus sole a meridiano prolabente.

Ubi demum quartus numerus ab argumento superetur horario, is ex illo dematur, reliquum per quartum et sextum regulae spatium in gradus conversum indicabit nobis, quot gradibus aequatoris sol ab hora sexta ante vel post meridiem pro altitudinis exigentia disteterit, quo deinde arcu per XIIII in horas et horarum minutias commutato atque eisdem horae sex si coarcerventur, totum tempus vel ante meridianum vel post meridianum conflabitur, velut solaris admonuerit altitudo. |

415r Exempli causa sit sol aliqua die proposita in principio geminorum, altitudo solis ante vel post meridiem sumpta contineat grad. XXXVI in regione, cui mundi polus borealis grad. XXXXIX subtollitur, eo die per XIII arcus semidiurnus est grad. CXV, et per XIX huius altitudo solis meridiana reperitur fere grad. LXI min. XX, cui de regulae sexagesimis competunt LII et duae tertii fere unius, quae primus sunt numerus, altitudini vero propositae de sexagesimis eisdem XXXV cum uno tertio unius conveniunt, quae pro secundo teneantur numero. Tertius autem numerus in hoc proposito invenitur arcui semidiurno gradibus LXXXX sublatis, et reliquum grad. XXV per quartum et sextum regulae spatium in regulae sexagesimas computatum porriget nobis argumentum horarium earundem sexagesimarum XXV cum quarto unius, cui LX congregatis numerus constituetur tertius partium LXXXV cum uno quinto, denique iuxta praemissam doctrinam[a]) numero hoc in secundum multiplicato productoque in primum partito quartus elicietur numerus, similium partium LVII cum $\frac{25}{158}$, quod paulo plus habetur septima unius. |

415v His argumentum superantibus horarium eo detracto partes sexagesimae XXXI cum $\frac{25}{28}$ remanent, quibus in quarto regulae spatio computatis e regione in sexto grad. XXXII aut plus paulo videbimus, quorum complementum grad. LVIII indicat nobis, quantum sol a meridiano removetur. His autem grad. LVIII de tempore per XIIII respondent horae tres cum minutiis LII unius, quod est propositum.

Subiecto rursus solis loco in geminorum capite in eadem regione sit eius altitudo supra eundem horizontem grad. XV min. X, quibus sexagesimae XV cum quatuor quintis debentur, secundus scilicet numerus.

Numerus autem primus idem, ut ante, manet partium sexagesimarum LII

a) Hs. hat *praemissae doctrinae.*

Beispiel: Am 29. Dezember sei $h = 9^0$, $h_m = 18^0 40'$. Resultate: $\mathrm{I} = 9\frac{2}{3}$ ($\sin h = 9\frac{2}{3} : 60$), $\mathrm{II} = 19\frac{1}{3}$, $t_m = 61\frac{1}{2}{}^0$, $H = 28$, $\mathrm{III} = 32$, $\mathrm{IV} = 16$, $\mathrm{IV} + H = 44$, $\varphi = 47\frac{1}{4}{}^0$, $t = 42^0 45' = 2^h 51^m$.

Ist $t > 90^0$, so bildet man $\sin(t - 90^0) = H$, $H + 1 = \mathrm{III}$, $\mathrm{IV} = \frac{\mathrm{II} \cdot \mathrm{III}}{\mathrm{I}}$.

Ist $\mathrm{IV} = H$, so ist $t = 90^0 = 6^h$.

Ist $\mathrm{IV} > H$, so ist $\arcsin(\mathrm{IV} - H) = \varphi$ und $90^0 - \varphi = t$.

Ist $\mathrm{IV} < H$, so ist $\arcsin(H - \mathrm{IV}) = \varphi$ und $t = \varphi + 90^0$.

et tertiorum duorum, pro tertio denique numero eandem summam, ut prius, obtinebimus sexagesimas LXXXV et quintum unius, ergo per praecedentem doctrinam numerus prodibit quartus sexagesimarum XXV et semis. At argumentum horarium idem cum eodem die etiam perseverat, nunc quoque sexagesimarum est XXV et quarti. Cum autem ei quartus numerus fere | sit aequalis, concludimus id temporis altitudinis observatae horis ferme sex a meridie removeri, quod rursus est propositum. [416r]

Sit demum solis altitudo grad. IX in eodem die et regione; scilicet gradibus IX sexagesimae debentur quasi IX cum quintis duobus, quae secundum exhibent numerum, primus autem numerus, ut ante hac, est partium 52 et $\frac{2}{3}$, tertius quoque numerus idem, ut prius, sexagesimarum LXXXV[b]) cum quinto. Quare per antecedentem doctrinam numerus quartus erit earundem partium 15 et $\frac{1}{5}$ fere, quibus horario sublatis argumento partes remanent X cum una vicesima, quae indicant grad. IX et dimidium, qui constituunt minutias XXXVIII horae unius, quae si horis aequalibus VI congregentur, tempus emerget, quo sol pro altitudine observata distat a meridie.

Quod si semidiurnus arcus aequaverit quadrantem, horae diei per acceptam solis altitudinem maiori compendio reperiuntur; intrando scilicet | meteoroscopium per primum introitum aut quintum cum regionariae latitudinis complemento cumque deprehensa subiectae observationis altitudine, arcus enim, qui sic colligitur, per XIIII tempus ostendet elapsum ab exortu solis usque in observatae altitudinis momentum, si solis altitudo fuerit antemeridiana, vel futurum usque in occasum, si postmeridiana. Quod si tempus idem de sex auferatur horis, praesentis momenti recessus a meridie relinquetur. [416v]

Velut aequinoctiorum tempore semidiurnus in omni ferme regione quadranti par est, et propositum esto in regione, cuius latitudo graduum habetur XXXXIX per altitudinem solis grad. XXX tempus diei reperire.

Igitur cum regionariae complemento latitudinis grad. XXXXI atque cum subiecta solis altitudine grad. XXX per introitum primum aut quintum ingressus comperio grad. XXXXIX cum minutiis XXXXV ferme, qui de tempore praebent horas tres min. XIX unius, tantum itaque tempus exactum est ab solis exortu usque ad observatae momentum altitudinis, si ea fuerit antemeridiana, vel | in occasum solis futurum, si postmeridiana, quod etiam tempus sex demptum horis relinquit horas duas min. XXXXI ante vel post meridiem, velut solaris admonebit altitudo. [417r]

---

a) Hs. hat *rursus* korr. aus *demum*. b) Hs. hat *LXXXVIII*.

Beispiel: $\lambda_s = 60^0$, $h = 36^0$, $t_m = 115^0$, $h_m = 61^0 20'$. Resultate: $\mathrm{I} = 52\frac{2}{3}$, $\mathrm{II} = 35\frac{1}{3}$, $H = 25\frac{1}{4}$, $\mathrm{III} = 85\frac{1}{5}$, $\mathrm{IV} = 57\frac{25}{158} \sim 57\frac{1}{7}$, $\mathrm{IV} - H = 31\frac{25}{28}$, $\varphi = 32^0$, $t = 58^0 = 3^h 52^m$.

$\lambda_s = 60^0$, $h = 15^0 10'$; Resultate: $\mathrm{II} = 15\frac{4}{5}$, $\mathrm{I} = 52\frac{2}{3}$, $\mathrm{III} = 85\frac{1}{5}$, $\mathrm{IV} = 25\frac{1}{2}$, $H = 25\frac{1}{4}$, also nahezu $\mathrm{IV} = H$, folglich $t = 6^h$.

$\lambda_s = 60^0$, $h = 9^0$. Resultate: $\mathrm{II} = 9\frac{2}{5}$, $\mathrm{I} = 52\frac{2}{3}$, $\mathrm{III} = 85\frac{1}{5}$, $\mathrm{IV} = 15\frac{1}{5}$, $H - \mathrm{IV} = 10\frac{1}{20}$, $\varphi = 9\frac{1}{2}^0 = 38^m$, $t = 6^h 38^m$.

Ex his tandem horas diei vel noctis pro cuiuslibet morae regionis ac horarum initio numerandarum undecimque vel a meridie vel ab occasu sumpto nullum erit inveniendi negotium, nisi peritiae sideralis penitus experti.

Sciendum quoque pro eadem numeralis diei spatio numerum primum et tertium cum horarum argumento non variari; haec etiam circa solstitia per multos dies parum mutari, circa aequinoctia vero sensibilem fere diebus alterius variationem percipere.

Denique noctis horas eodem ferme deprehendimus modo per stellas fixas noctu nobis apparentes. Nam observatis earum altitudinibus earundem a meridiano distantias, quemadmodum de sole dictum est, inveniemus cum arcubus semidiurnis atque meridiana earum altitudine.

417v Hanc autem distantiam adda|mus intervallo, quod ab observato sidere et sole comprehenditur, si ipsum in occidentali hemisphaerio constituatur, aut eidem intervallo distantiam eandem conferamus sidere orientalem caeli partem occupante; utro namque modo post meridiem recessus constabit. Hoc autem sideris atque solis intervallum reperitur sublata sideris ascensione recta ex recta solis ascensione eidem additis grad. CCCLX, si detractio non poterit alioquin fieri; hic arbitror exemplo non opus esse, cum id ex praecedentibus satis pateat.

Propositio LXXXXI.

Ex praemissa tribus numeris proportionalibus inventis aliter quartum cuiusdam instrumenti recti linearis auxilio compendiose[a]) subiungere. |

418r Id eam ob rem proposui, ut praecedens propositio brevius explicetur, utque arithmeticae rudimentis non satis exercitatis minus oberrare contingat.

Pro hoc autem proposito trigonica quaedam fiat designatio; sumamus in plano quopiam rectam AB quantamlibet, quae vel in LX vel in centum et quinque aut in quotvis aequas scindatur partes.

At in praesenti negotio, si eam in CXX ad maximum diviserimus partes,

a) Hs. hat *compendiosae*.

Ist $t_m = 90^0$, so kann man die Aufgabe folgendermaßen lösen; man bildet $\sin \tau = \frac{\sin h}{\cos \varphi}$ (Aufg. 1), dann ist $t = 90^0 - \tau$.

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $h = 30^0$. Resultat: $\tau = 49^0 45' = 3^h 19^m$, $t = 2^0 41'$.

Die Stunden der Nacht können in gleicher Weise aus Sternhöhen bestimmt werden, indem man den Abstand Sonne—Stern (Differenz der Rektaszensionen) zur gefundenen Zeit t addiert bzw. von ihr subtrahiert.

91. Proposition.

Lösung der Proportion $a:b = c:x$.

Zur mechanischen Lösung wird ein triangulus proportionalis verwandt, dessen Einteilung und Konstruktion aus der Figur ersichtlich ist (Fig. 68).

Man zählt a von C aus auf CA ($CA' = a$), dann b von dem Endpunkte

sic enim omni serviet regioni, quod et obtingere poterit, ea in pauciores partibus CXX incisa, geminato videlicet eius usu, velut ex sequentibus videbitur, postea de puncto A sive perpendiculariter aut qualitercumque contingat AC recta protrahatur in totidem distincta sectiones, recta denique BC protrahatur, quae totidem quoque teneat particulas aequas, quot vel recta AC vel AB possidet.

In duabus demum rectis AC et BC puncta dua singulis rectis pariliter[a]) a C puncto recedentibus colligabimus, quae erunt | cum AB recta pares numero sectionum atque inter se pariter aequidistantes. Ex punctis quoque lineae BC ad puncta divisionum rectae AB singula pari modo singulae producantur rectae, quae AC sibique invicem aequedistabunt. 418[v]

Postremo extra hunc triangulum ABC iuxta latus eius AC divisionum numerus ab nota C inchoando scribatur, collectis simul quivis sectionibus, numerum videlicet inscriptum per quinque augendo usque ad CV, pari modo fiat infra lineam AB, ut numerus partium ab A versus B progrediendo signetur. Sic tandem organi huius consumabitur perfectio, quod triangulum proportionalem rite nuncupabimus, quoniam per ipsum datis numeris tribus quartum subicere quibimus, ad quem tertius habeatur velut primus ad secundum; per secundum enim sexti singuli transversae cum conterminis sibi portionibus lateris AC sunt in eadem proportione, transversas quoque ipsae descendentes in pares quantitate sectiones distinguunt, unde liquet etiam huius officium trianguli; uti|litas eius summatim haec est, inventis per praecedentem numeris tribus, eorum primum computabimus, secundum particulas lateris AC a C in A punctum numerando, et huius numerationis fini contermina transversalis, alterum iuxta particulas suas numerum reddat et eius numeri secundi termino, punctoque C regula applicata atque ipsa sic manente numerabimus tertium in latere AC. Denique in transversali eiusdem numeri fini contermina quartus inter latus AC et regulam apparebit. 419[r]

Ut sit primus numerus XXXXV, secundus XXX, tertius C; computatis igitur XXXXV supra AC lineas ac deinde in transversali, quae eorum fini contermina est XXX numeratis atque ad horum exitum supraque C punctum

a) Nach *pariliter* hat Hs. das Wort *aequidist* gestrichen.

A' aus auf der Transversale ($b = A'B'$) und legt ein Lineal in die Richtung CB'. Zählt man dann wiederum c auf der Seite CA von C aus ($CC' = c$), so schneidet das Lineal auf der von C' ausgehenden Transversale x ab ($x = C'D$).

Beispiel: $a = 45$, $b = 30$, $c = 100$, $x = 66\frac{2}{3}$.

Ist $c >$ als die Seite AC, so bildet man zunächst $a : b = (c - AC) : y$, dann $a : b = AC : z$, dann ist $x = y + z$.

Beispiel: $a = 45$, $b = 30$, $c = 129$, $AC = 105$, $y = 16$, $z = 70$, $x = 86$.

Für die Anwendung des Instruments in Verbindung mit dem Meteoroskop ist die geeignetste Teilung die in 120 Teile.

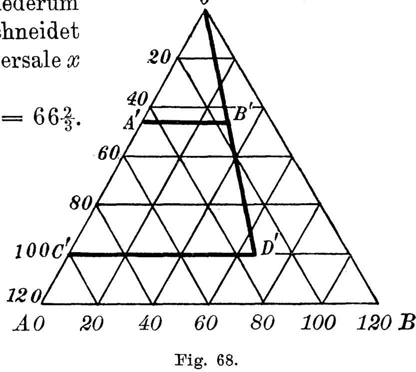


Fig. 68.

applicata regula sicque firmata centum numerus in latere AC rursus recenseatur, mox habebimus in transversali contermina inter latus AC et regulam quartum numerum LXVI unitatum cum tertiis duobus.

Notandum est etiam, quod, quando numerus tertius exsuperaverit multitudinem sectionum | lateris AC, tunc ex ipso lateris AC multitudo est subtrahenda, reliquum quoque pro tertio teneatur numero, pro quo quartus, velut traditum est, numerus inveniatur, qui servandus est postea, summa partium lateris AC pro tertio subiciatur numero, cui etiam iuxta eandem doctrinam quartum reperiamus numerum proportionalem, qui iam pridem reperto quarto numero congregatus componit numerum quartum, quem quaerebamus. 419v

Ut, quemadmodum prius, numerus primus esto XXXXV, secundus XXX, tertius CXXIX; quibus CV numeros egredientibus, igitur ex CXXIX detraho CV, et remanent XXIIII, quibus pro numero quarto XVI congruunt. At CV pro quarto numero respondent LXX. His ergo coacervatis crescunt LXXXVI, integer videlicet numerus quartus, ad quem se habent CXXIX, quemadmodum XXXXV ad XXX, primi scilicet numeri ad secundum. |

420r Ignorandum quoque non est quodlibet trium laterum trianguli ABC non in pauciores partium debere partibus eis[a]), in quas semidiameter seu regula ipsius meteoroscopii aequaliter scinditur, ut si illa in LX distinguatur aequas particulas, hoc quoque in LX scindatur pariles sectiones. Quod si latus trianguli huius in duplas numero aequalibus partibus regulae distinctum fuerit, illas semper posse sufficere per simplicem ipsius trianguli ingressum ad omnes regiones, quare si regulae longitudo, quae ex umbilico usque ad circumferentiam sapheae semidiametro par fuerit, in LX distinguuntur particulas, quodlibet laterum trigoni proportionalis in CXX sectiones est partiendum, et pari modo de ceteris regulae sectionibus.

Si quem autem duplicis introitus non taederet, is posset trigoni latera singula in paucio|res etiam quam CXX secare. Denique in praesenti negotio primus numerus LX nunquam supergreditur, secundus primo semper erit minor, tertius est ambiguus, etenim is primo quandoque minor habetur, aliquando par, nonnunquam vero maior, nunquam tamen CXX exsuperabit. | 420v

a) Hs. hat *eis* korr. aus *eius*.

IOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS DE METEOROSCOPIIS.

421r

LIBER QUARTUS.

Secundi Meteoroscopii constructio.

Propositio prima.

Magnus super sphaera circulus per polos minoris ingrediens secat eum ad rectos angulos, horum quoque sectio communis erit diameter minoris circuli, quam axis eiusdem separat in centro per aequa.

Sit in sphaera $ABCD$ minor circulus AC | designatus, per cuius polos B et D magnus ingrediatur circulus $ABCD$, duoque circuli $ABCD$ et AC secentur a se invicem super recta AC. Dico eos sibi vicissim ad rectos insistere angulos, atque rectam AC diametrum esse minoris circuli AC; ducto deinde BD axi circuli AC, et esto centrum eius nota E. Dico axim BD diametrum circuli AC in centro E per aequa distinguere.

421v

Fig. 69.

Haec universa per *Theodosii* librum primum *de sphaericis* sunt perspicua, qui eorum cupiat ostensionem, inde flagitet.

Propositio secunda.

Propositi circuli dato arcui, qui semicirculo minor extiterit, sinum rectum subtendere.

DE METEOROSCOPIIS.

VIERTES BUCH.

Konstruktion des zweiten Meteoroskops.

1. Proposition.

Ein größter Kreis auf einer Kugel, der durch die Pole eines beliebigen Kreises geht, schneidet diesen rechtwinklig und die Schnittlinie ist der Durchmesser dieses Kreises und wird durch die Achse halbiert (Fig. 69).

Zum Beweis vgl. Theodosius lib. I de sphaericis.

Rectus sinus est dimidia corda dupli arcus.

422r Sit ergo propositus circulus $ABCD$, cu|ius centrum E, in quo detur arcus AB semicirculo minor. Nam duplo maioris chorda protrahere non est per definitionem sinus, cum totus circulus in duos tantum semicirculos ad summum separari valeat, quibus ex circuli peripheria sublatis nihil erit reliquum. Huic ergo AB arcui intentio sit in sinum rectum subtendere.

Sumamus igitur arcum AD parem AB arcui, protractaque linea recta BD erit ipsa per definitionem corda totius arcus BAD. Diametrus deinde AEC producatur separans cordam BD super puncto F.

Dico BF rectam sinum esse rectum arcus dati AB, quod ita demonstrabitur. Protractis duabus lineis rectis BC et CD, quae sunt sibi vicissim pares, nam cordae sunt duorum arcuum BC et CD, qui per praesentem suppositionem sunt pares, ergo per XXIX tertii *elementorum* duae chordae BC et CD 422v sunt aequales; postea duo anguli | BCF et DCF aequantur, cum ipsi super aequos arcus AB et AD consistant per XXVII tertii *elementorum Euclidis*; ergo per IIII primi eorundem duorum triangulorum BCF et DCF duo latera BF et FD erunt aequalia propter commune latus CF utrique triangulo.

Cum autem arcus BAD duplus ex suppositione fuerit arcui AB, cuius chorda BCD, et huius dimidium, velut ostensum fuit, est linea BF, constabit ergo propositi circuli dato arcui, qui semicirculo minor extiterit, sinum rectum subtendisse, quod oportuit ostendere. Quod si BD chorda secuerit diametrum AEC super E centro, tunc per definitionem circuli BD chorda in centro E per aequa secabitur; quare per definitionem sinus recte propositum erit effectum.

Propositio tertia. |

423r Ex proposita recta portionem aequalem sinui recto propositi similis arcus quadrante minoris in eo circulo, cuius ipsa fuerit semidiameter, resecare.

Sit data linea recta AE, et super eius altera extrema nota E iuxta intervallum AE designemus $ABCD$ circulum, cuius ABC arcus quadrans esto, sitque arcus BC proposito similis et eius residuo AB par accipiatur arcus AD, protractaque corda BD, quae rectam AE secet super G signo, dico portionem EG lineae rectae AGE aequalem esse sinui recto arcus BC, quod ita perspicuum erit; protracta inprimis EC semidiametro, et per praecedentem arcui BC sinus rectus BF subtendatur, qui necessario terminabitur in signo F super CF semidiametro. Cum autem ex praesenti subiectione arcus ABC quadrans

---

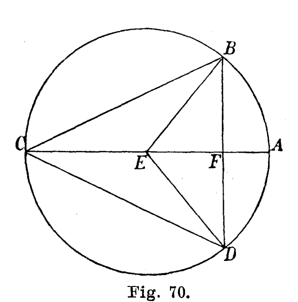


Fig. 70.

2. Proposition.

Konstruktion des sinus rectus eines Winkels (Fig. 70).

„Der sinus rectus ist die halbe Sehne des doppelten Bogens.“

Zum Beweise zieht man BC und DC. Dann ist $BC = DC$ als Sehnen gleicher Bögen, $\sphericalangle BCF = \sphericalangle DCF$ (Eucl. III. 27) (Peripheriewinkel), also $BF = FD$ (Eucl. I. 4, ähnliche Dreiecke), d. h. die Sehne wird halbiert.

sit, erit angulus AEC rectus, et per modum | demonstrandi praemissam, quilibet quatuor angulorum circa G punctum rectus; pari modo probabitur angulus BFE rectus. Igitur per XXVIII primi *elementorum* quadrangulum $BGFE$ aequedistantium erit laterum, ergo per XXXIIII primi eorundem BF sinus rectus ipsius arcus BC par est EG portioni lineae rectae AE; igitur ex proposita recta portionem aequalem sinui recto et cetera; quod erat demonstrandum. 423v

Propositio quarta.

Quod praecedens proponit per subscriptam numeralem tabulam aliter efficere.

In hac tabula omnium arcuum, qui ab gradu uno inchoantes in LXXXX finiunt sinus recti describuntur in sexagesimis totius, qui quadranti circuli subtenditur.

Quod si ex data recta linea sinum rectum iubeamur | resecare, ipsam in aequas 60 partes separabimus atque deinceps non erit difficile intentum praestare. 424r

Nam cum arcu proposito ad praemissam tabulam ingressi in linea graduum e regione comperimus partes sexagesimas atque minuta earum, quibus ex data linea pridem desectis intentio liquebit.

Ut quando velimus ex proposita recta, quae sit AB pro gradibus XXII sinum rectum abscindere, igitur tabulam ascendens e regione grad. XXII invenio partes XXII minu. secunda.

His numeratis super datam rectam in particulas 60 aequas divisam computus talis ab signo A versus B deductus terminetur super C nota; erit igitur AC portio sinus rectus, qui quaerebatur.

Eiusdem[a]) autem tabulae compositio facilis habebitur ex tabula sinuum, quae maximum in partibus 60000 subicit, eam autem hac potissimum ratione condidimus, quod in organis ad usum nostrum | accomodis nulla linea recta nisi admodum magna[b]) in totidem partes secari poterit, cum autem recta talis nulla penitus in instrumentis inveniatur, cuius magnitudo 60000 particulis sufficeret, coactus fui sinus huiuscemodi in minores reducere numeros, eis pene proportionales, hoc videlicet pacto. Nam 60000 ad 1000 in ea sunt habitudine, qua 60 ad unitatem, ergo, quotiens in eadem tabula pro sinu quopiam 424v

a) Hs. hat *Eniusdem* statt *Eiusdem.*
b) Vor *magna* hat Hs. das Wort *vel* gestrichen.

---

3. Proposition.

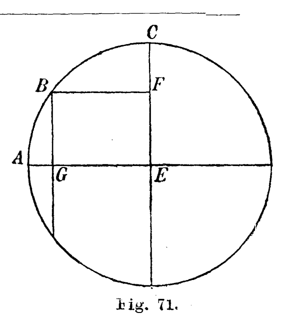


Fig. 71.

Konstruktion des sin eines gegebenen Bogens $< 90^0$ auf dem Halbmesser des zugehörigen Kreises (Fig. 71).

Der Bogen sei CB, dann ist GE der gesuchte sinus.

Zum Beweise wird gezeigt, daß $GE = BF$ ist (Eucl. I, 28 u. 32, $BFEG$ ist ein Rechteck).

scriptos reperi 1000 numeros[a]), tot scripsi sexagesimas partes maximi seu integri sinus. At quotiens 100, totiens addidi minu. 6.

Ex hac enim suppositione 1000 numeri competunt uni sexagesimae parti sinus integri, 100 autem pars sunt decima ex 1000. Atqui intentio est unam sexagesimam totius sinus rursus in minut. 60 dividere atque minutiam in se-
425r cunda 60 ac ita deinceps. Ideo pro qui|buslibet[b]) centenariis senas adieci minutias, ut videlicet pro centum 6, pro ducentis duodecim, pro trecentis decem et octo minutias, parique ratione de reliquis agendo centenariis. Sex enim numeri de 60 pars sunt decima, quemadmodum 100 de 1000, velut in subscripta patet tabula. Pro singulis autem 10 numeris adieci secunda sena tricena, quo fit, ut pro denariis duobus numeraverim minutiam I, secunda XII[c]), pro tribus minutiam unam secunda 48, et ita pari ratione usque ad 100, velut ex sequenti liquebit tabula.

Denique manifestum nunc est, decem unitatibus 60000 partium integri sinus de eius sexagesimis competere. Secunda igitur iuxta decuplae proportionis exigentiam singulae unitates deposcunt secunda 3 et tertia 36. Quapropter unitatibus duabus secunda 7 et tertia XII[c]) respondebunt, tribus vero secunda
425v 10 tertia 48, unitatibus autem quatuor | secunda 14 tertia 24, velut ex subscripta tabula perspicuum erit.

Propositio quinta.

Meteoroscopium secundum designare.

Sumendus est itaque quadrans ex circulo AB super centro C descripto, qui sit quadrans ABC, et protractis ex C duabus semidiametris AC et BC circumferentia AB quadrantis ABC in aequas LXXXX partes dividatur. Deinde per secundam singulorum LXXXX arcuum quadrantis AB ab gradu uno incipientium per unitatis differentiam naturali serie[d]) crescentium singuli protrahantur sinus, ita videlicet, ut horum arcuum sumatur initium ab A nota
426r progrediendo in B signum, | eritque protractorum sinuum maximus BC, qui

a) Hs. hat *1000* aus *10000* korr. b) Hs. hat *quibuslibet* korr. aus *quibusdem*.
c) *XII* fehlt in der Hs. d) Hs. hat *seriae*.

4. Proposition.

Benutzung der Sinustafeln zur Konstruktion des sinus auf der in 60 Teile geteilten Geraden.

Da in der (nicht mitgeteilten) Tabelle der sin $90^0 = 60000$ gesetzt ist, so ist zu setzen: 60000 proportional der Länge der ganzen Strecke, 1000 proportional 1 Teil der Strecke. Die Teile werden in 60 Minuten, diese in 60 Sekunden und diese in 60 Tertien geteilt, also ist 100 proportional 6 min., 200 proportional 12 min. usf., 10 proportional 36 sec., 20 proportional 1 min. 12 sec., 30 proportional 1 min. 48 sec. usf., endlich 1 proportional 3 sec. 36 ter., 2 proportional 7 sec. 12 ter., 3 proportional 10 sec. 14 ter., 4 proportional 14 sec. 24 ter.

subtendit peripheriam AB. Hi denique sinus necessario terminabuntur ad quadrantis latus AC per III tertii *elementorum* et definitionem sinus.

Postea extra circumferentiam AB alia super centro C circumgiretur AB priori calami latitudine distans pro gradibus signandis, extra quem postremo tertia designetur circumferentia de secunda latiori spatio recedens pro partium numeris scribendis, velut in designatione primi meteoroscopii est admonitum, positaque regula secundum partem unam super centrum C ex alia parte supra singulas divisiones peripheriae AB parvulae protrahantur lineae intra peripheriam AB et proximam desinentes, sed de quinque in quinque puncta usque ad extimum circulum, denique numeri notentur a B usque in A punctum scribendo in primis quinque, deinde decem posthaec | quindecim, ac sic deinceps usque ad nonaginta, quae prope A signum describantur. 426v

Propositio sexta.

Regulam pro meteoroscopio secundo fabricare.

Igitur super plano in aliqua solidaque constanti materia rectam protrahamus lineam DE aequalem alteri quadrantis laterum AC aut BC eamque per tertiam aut quartam ita secemus, ut omnium arcuum ab gradu uno inchoantium ac deinde naturali serie gradus unius auctu usque in LXXXY crescentium rectos sinus contineat, sumendo ex ea inprimis DF, sinum gradus unius, deinde DG, sinum graduum duorum, et ita de reliquis sinibus, ita, ut DE tota nonagesimus existat sinus ipsius quadrantis.

Posthaec huiuscemodi regulae DE sectionibus nu|meri adscribantur ex D in E punctum, ut, ubi quinque finiant, quinque, ubi decem, 10, ubi 15 segmenta, 15 numeri, et ita deinceps, ut iuxta signum E LXXXX adnotentur. 427r

His sic inscriptis circum notam D latitudine unius culmi ex materia, in cuius plano recta DE protracta fuit, modicum relinquatur spatiolum, universum reliquum, quidquid extra DE rectam etiam designatos numeros reliquum est, abscindatur, factoque parvo foramine terete in D puncto ipsa regula in eo cum clavo notando, cuius spissitudo foraminis concavitatem omni ex parte aequaliter attingat, super C signum quadrantis ABC figatur, ita, ut ea facillime circumagi valeat; secundum itaque meteoroscopium erit completum.

---

5. Proposition.

Konstruktion des zweiten Meteoroskops (Fig. 72).

Die Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich; die Basis ist nach sin geteilt.

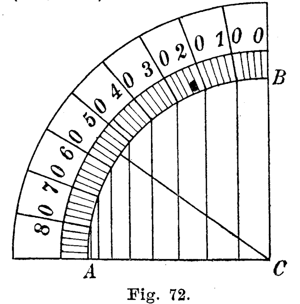


Fig. 72.

6. Proposition.

Konstruktion des Lineals für das zweite Meteoroskop.

Das Lineal wird ebenso wie die Basis nach sin geteilt und im Mittelpunkt des Meteoroskops drehbar befestigt. Außerdem erhält das Lineal noch eine zweite Teilung in 60 gleiche Teile.

Eius demum utilitas communis est cum primo, quotiens problemata tertii 427v libri solis de|terminantur aequedistantibus. Singuli denique sinus quadrantis *ABC* singulorum semidiametros aequant circulorum parallelorum, qui super sphaera, cuius maximus orbis aequalis foret circulo quadrantis *ABC*, velut iidem paralleli in sphaera aliqua eorum supra *A* polo descripti fuissent, itaque *AC* dimidius axis haberetur, et quilibet sinus semidiameter correspondentis sibi paralleli, velut ex prima liquet.

At ut idem meteoroscopium omni conveniat problemati sphaerico siderali-que eidem regulae talis adicienda est partitio. Duae quaedam rectae lineae calami dimidii latitudine ab sese recedentes de recta linea atque sibi invicem paralleli protrahantur, atque ex *DE* punctis agantur perpendiculares duae secantes tractas lineas rectas earundemque linearum portiones intra easdem perpendiculares deprehensae in 60 aequas particulas dividantur protractisque rectis lineis parvulis et parallelis ad scalae similitudinem earum numerus, ut 428r antea dictum est, | adscribatur progrediendo ex *D* in *E*, et completa est ipsa regula, cuius forma tibi subicietur. Sitque partitio huiusmodi scala secunda.

IOANNIS VERNERI NORIMBERGENSIS DE METEOROSCOPIIS.

LIBER QUINTUS.

Tertii Meteoroscopii constructio.

Propositio prima.

Sectionis diametri, apud quam arcuum aequis differentiis sese superantium sinus terminantur, quo circuli centro magis appropinquant, eo sunt remotioribus maiores.

Sit circulus $ABCD$, cuius diameter AF, et ipsius arcus AB sinum protrahamus BL secantem | diametrum AF in puncto L, quam ex definitione sinus 428v et praesenti subiectione atque per tertiam tertii *elementorum Euc idis* ad angulos secabit rectos, separemus praeterea ex eodem semicirculo $ABCDEF$ arcum ABC, cuius sinus CM protractus per easdem perpendiculariter insistit super diametrum AF super M signo, et protracta diametro EOG secante diametrum AF super O centro ad angulos rectos, sitque arcus DE par BC arcui, sinusque DM subtendens arcum $ABCD$ secet diametrum AF super N nota. Dico NO particulam diametri AOF esse maiorem LM, quod patebit producto CM sinu recto, quousque circumferentiae circuli $ABCD$ occurrat, obviet in signo H, protractis deinde BH et DG rectis duae perpendiculares deducantur, BJ quidem super CM sinum et DK super sinum EO.

Atqui per XXVII tertii eorundem *elementorum* angulus DGK par est angulo BHJ, et angulus DKG ex subiectione par angulo | BJH; uterque 429r enim rectus est; igitur per quartam sexti eorundem *elementorum* proportio DG ad DK erit sicut BH ad BJ. Ergo permutatim DG ad BH sicut DK ad BJ. Sed DG maior est ipsa BH ex communi sententia dictante eiusdem circuli arcuum maiorem longiori corda subtendi, igitur per XIIII quinti *ele-*

DE METEOROSCOPIIS.

FÜNFTES BUCH.

Konstruktion des dritten Meteoroskops.

1. Proposition.

Bestimmt man die zwischen den sin zweier Winkel (deren Differenz konstant ist) liegenden Abschnitte auf der Basis, so sind diese um so größer, je größer die Winkel sind, d. h. $\cos\alpha - \cos\beta$ wächst mit wachsenden Winkeln, wenn $\alpha - \beta =$ const. (Fig. 73).



mentorum Euclidis DK recta exsuperat BJ, at per XXXIIII primi eorundem DK par est ON et BJ aequalis ipsi LM. Ergo sectiones diametri, apud quam arcuum aequis differentiis sese superantium, ut supra, quod decuit ostendere.

Unde etiam liquet eam diametri AF particulam, qua cuius alterum extremum circuli centrum fuerit qualibet, remotiorum fore longiorem.

Manifestum denique fit, quod trium arcuum, quorum quilibet quadrante minor existat, si secundi ad primum excessus par extiterit, differentiae tertii ad secundum primusque fuerit minimus, | et tertius eorum maximus, differentiam sinus secundi arcus super primi sinum esse maiorem excessu sinus maximi arcus tertii supra sinum secundi. [429v]

Propositio secunda.

Similium arcuum recti sinus eam possident habitudinis rationem, quam diametri circulorum, in quibus similes sumpti sunt arcus, eodem si conferantur ordine.

In duobus circulis BC et FG duo similes sumantur arcus, in hoc quidem BC, in illo autem FG, et ex centro A circuli BC rectae duae trahantur AB et AC, et ex puncto B super AC recta perpendicularis BD submittatur. Pari modo ex centro E circuli FG ad eius circumferentiam rectae duae descendant EF et EG atque a signo F perpendicularis FH super EG rectam producatur. Erit ita|que per definitionem ipsius sinus intercedente tertia tertii *elementorum Euclidis* recta BD sinus ipsius arcus BC et FH sinus ad arcum FG. Dico igitur, proportionem BD sinus ad FH sinum esse sicut diametrum circuli BC ad diametrum circuli FG, quod ita perspicuum erit. Nam per definitionem similium arcuum angulus BAD trianguli ABD aequalis est angulo FEG trianguli FEH, et angulus BDA par angulo EHF, uterque enim rectus; igitur per XXXII primi *elementorum Euclidis* triangulus ABD aequiangulus triangulo EFH. Ergo per quartam sexti eorundem proportio sinus BD ad sinum FH erit sicut semidiameter AB circuli BC ad semidia- [430r]

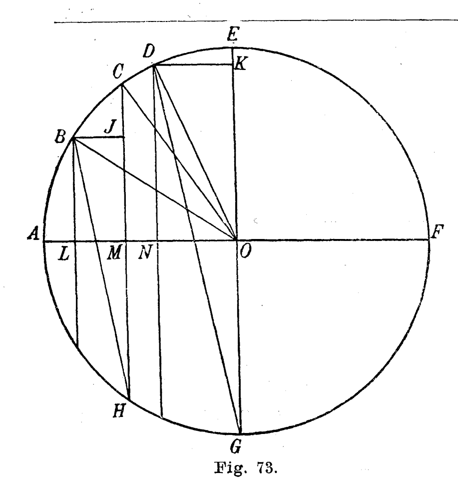


Fig. 73.

In Fig. 73 sei $BC = DE$, $BL \parallel CM \parallel DN \parallel EO \perp AF$, $BJ \perp CH$, $DK \perp EG$. Dann ist $\sphericalangle DGK = \sphericalangle BHJ$ (Eucl., III, 27), $\sphericalangle DKG = \sphericalangle BJH = R$ (nach Konstr.), also $DG : DK = BH : BJ$ (Eucl., VI, 4, ähnliche Dreiecke) oder $DG : BH = DK : BJ$. Nun ist $DG > BH$, also auch (Eucl. V, 14) $DK > BJ$ und, da $DK = ON$ und $BJ = LM$ (Eucl. I, 34, Rechtecke) $ON > LM$.

Sind drei Winkel α, β, γ (α der kleinste und γ der größte) gegeben, und ist $\beta - \alpha = \gamma - \beta$, so ist $\sin\beta - \sin\alpha > \sin\gamma - \sin\beta$.

metrum EF circuli FG. Ergo per XV quinti *elementorum*, sicut totius diametri circuli BC ad totum diametrum circuli FG, quod est propositum. |

Propositio tertia.

430v

Si propositi sinus diametris suorum circulorum fuerint proportionales, ipsi similes arcus subtendunt.

Haec praecedentis est conversa ipsiusque manente figuratione. Dico, si fuerit sinus BD ad sinum FH sicut diameter circuli BC ad diametrum circuli FG, erit arcus BC similis arcui FG; erit itaque ex hypothesi et communi scientia, si ab aequalibus proportionibus pares auferas, relinquentur aequales, proportio AB semidiametri ad BD sinum sicut EF semidiametri ad FH sinum.

Atqui angulus ADB par est EHF, uterque enim ex hypothesi rectus, igi|tur per VII sexti *elementorum* angulus BAC aequalis est angulo FEG. 431r Ergo per definitionem similium arcuum BC arcus similis est FG. Ergo, si propositi sinus diametris suorum circulorum fuerint proportionales, ipsi similes arcus subtendunt; quod est ostendendum.

Propositio quarta.

Magnis duobus in sphaerica superficie circulis ad se invicem inclinatis, si circumferentiae unius eorum recta quaedam in uno sui extremo cohaerens ita ipsius peripheriam giret, ut ipsi ex reliquo sui termino indefinita ad alterius superficiem circuli continue perpendiculariter insistat, necesse fiet ab ea in huius plano, supra quod erigitur, curvam de|signari lineam, quae circularis 431v non fit, quam etiam communis datorum sectio circulorum per aequa inscindat.

Sint super data sphaera circuli duo $ABCG$ et AHC ad se vicissim inclinati. In circulo $ABCG$ linea recta BD cohaerens in puncto B[a]) et ex

a) B fehlt in der Hs.

---

2. Proposition.

Die in zwei verschiedenen Kreisen konstruierten sin eines Winkels verhalten sich wie die Durchmesser beider Kreise.

Dies folgt unmittelbar aus der Ähnlichkeit der Dreiecke.

3. Proposition.

Sind die an zwei Kreisen gemessenen sin den Durchmessern proportional, so gehören sie zu gleichen Winkeln („ähnlichen Bögen“).

Umkehrung von Proposition 3.

4. Proposition.

Sind zwei größte Kreise einer Kugel gegeneinander geneigt, und bewegt sich eine durch die Peripherie des ersten Kreises

parte D indefinita ita in circulo $ABCG$ revolvatur, ut super circuli AHC planum in sui circuitione perpendicularis esse nunquam desinat, donec in peripheria circuli $ABCG$ punctum B revolutionem compleat, ad idem circuli eiusdem signum, unde ipsa moveri coeperat.

Esto igitur, ut recta BD super plano circuli AHC designaverit curvam lineam $ADCF$. Eam dico non esse circularem et diametro AC, quae communis est sectio duorum | circulorum AHC et $ABCG$ per aequa secari. (432r)

Primum ita perspicuum fiet[b]).

Sit centrum sphaerae subiectae punctus E, atque in circulo AHC per centrum E recta DEF trahatur ad diametrum AC perpendicularis secans curvam $ADCF$ hinc super D signo, illic vero in F nota, et ex D et F punctis duae perpendiculares ad planum AHC in diversas partes educantur, donec circumferentiae $ABCG$ in notis B et G occurrant, ex priori namque supposito eas occurrere necesse est, protractisque duabus BE, GE probabo in primis rectam DEF in puncto E per aequa divisam esse; nam per XVIII undecimi *elementorum Euclidis* duorum triangulorum BED et FEG uterque ad planum circuli HAC erigitur, cum autem diameter AC ex hypothesi sit perpendicularis ad communes sectiones | duarum superficierum duorum triangulorum EFG et BDE cum plano circuli AHC, consequens est per definitionem perpendicularis diametrum AEC ad duas rectas BE et GE fore perpendicularem, quare per definitionem duorum circulorum a *Theodosio* libro primo *de sphaeris* traditam, sive per definitionem plani super planum inclinati ab *Euclide* libro XI *elementorum* positam angulus BED par erit angulo FEG; uterque enim per definitionem eandem quantitas est inclinationis duorum circulorum $ABCG$ et AHC. At ex subiectione angulus BDE par habetur angulo EFG; nam uterque rectus subicitur; recta vero BE par est EG. Igitur per XXVI primi *elementorum* triangulus BED triangulo EFG aequilaterus probatur. Ergo recta DE par est | EF. Atqui duae rectae DF et AC intra peripheriam curvae $ABCD$ terminatae super E puncto per aequa vicissim secantur, ergo per conversam quartae tertii *elementorum Euclidis* necessario comitabitur, si $ABCF$ linea curva fuerit circularis, ut nota E sit eius centrum. At duarum rectarum DE et EF utraque longe minor est AE

(Marginal folio marks: 432r, 432v, 433r)

a) Hs. hat *fiet* korr. aus *erit*.

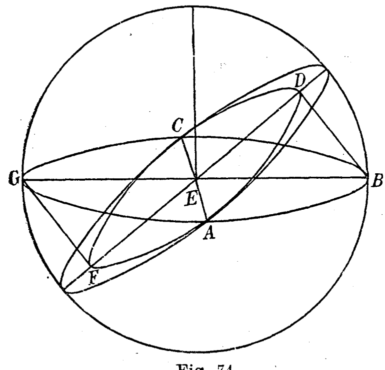


Fig. 74.

gehende Gerade so, daß sie stets auf dem zweiten Kreise senkrecht steht, so schneidet sie aus diesem eine Kurve aus, die kein Kreis ist, und durch die Schnittlinie beider Kreise halbiert wird (Fig. 74, Ellipse).

Zunächst wird die Kongruenz der Dreiecke BED und GEF bewiesen, hieraus folgt: $FE = ED$, ferner $DE < EA$, also kann die Kurve kein Kreis sein.

Dann wird, wieder aus der Gleichheit der einzelnen Stücke, gezeigt, daß AC die Kurve halbiert.

aut eius aequali EC, quare per definitionem circuli consequens est lineam $ABCF$ non esse circularem. Quod autem DE vel eius aequalis EF recta minor sit AE, par est BE, quae per penultimam primi *elementorum Euclidis* potentior est recta DE in quadrato BD, igitur per communem scientiam BE maior habebitur DE recta, ergo AE linea vel eius aequalis EC superabit rectam DE, igitur et rectam EF, quod inprimis oportuit ostendere.

Deinde praemissum est curvam $ABCF$ a diametro AC per aequa secari, quod ita li|quebit. Subiecta nota E super diametro AC alibi, quam in datae sphaerae centro, et manente huius schematis eadem figuratione, eisdem etiam suppositionibus recta DE semper eodem modo probabitur aequalis FE. Quare AF portio in curva $ADCF$ aequalis erit portioni AD. 433[v]

Nam anguli super eas consistentes circa punctum E recti sunt, et duae lineae AE et DE comprehendentes portionem AD aequales sunt duabus lineis AE et EF concludentibus portionem AF; pari ratione DE et CF portiones probantur aequales. Ergo ADC par erit AFC portioni per communem scientiam: „magnitudines sunt aequales, quae ex aequalibus consistunt partibus“.

Idem aliter ita constabit: Nam per XXIII primi *elementorum Euclidis* DE et EG rectae sunt linea una et per secundam partem tertiae tertii eorundem in E puncto per aequa|lia divisa, cum ex prius ostensis super eam AC recta perpendiculariter incidat; igitur arcus AB probabitur aequalis arcui AG. Ergo portio AF curvae lineae $ADCG$ par erit AD; nam earum utraque per aequalem arcum circuli $ABCG$ pari modo describitur, eadem denique ratione DC portio aequabitur CF. Igitur ADC aequabitur AFC portioni. Nam utraque semicirculi peripheria pariformique ratione creatur. Ergo communis duorum circulorum ACG et AHC sectio AC secat curvam lineam $ADCF$ per aequa, quod secundo decuit ostendere. 434[r]

Propositio quinta.

Si in subiecti circuli plano curva talis iuxta praemissam fuerit designata, et ab eiusdem ac circularis | peripheriae communi diametro quotlibet perpendiculares in eandem partem usque ad circuli circumferentiam educantur, ipsas omnes curva linea proportionaliter secabit. 434[v]

---

5. Proposition.

Die zwischen dem großen Halbmesser und der Peripherie einer Ellipse gelegenen Abschnitte einer Senkrechten zum Halbmesser verhalten sich wie die zugehörigen Abschnitte (halben Sehnen) zwischen Durchmesser und Peripherie des der Ellipse umschriebenen Kreises (Fig. 75).

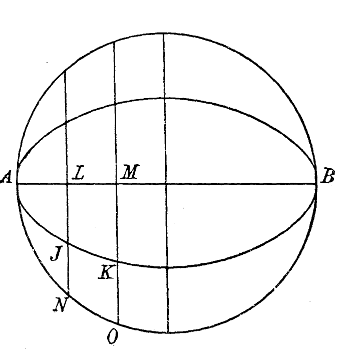


Fig. 75.

Zum Beweis wird auf einer Kugel gezeichnet (Fig. 76): Der Kreis $ANOB$ (der umschr. Kreis), der Kreis $ACDB$, dessen Projektion auf

Sit ergo circulus $ANOB$, cuius diameter AB, et in eius plano iuxta praemissam curva linea $AJKB$ lineetur. Deinde super diametro AB signa duo sumantur L et M, ex quibus in eandem partem usque ad circumferentiam circuli $ANOB$ duae perpendiculares egrediantur LJN et MKO secantes curvam $AJKB$ in punctis J[a]) et K, peripheriae autem $ANOB$ incidentes super N et O notis. Dico portionem perpendicularis LJN ad suam particulam 435r LJ | fore, sicut MKO perpendicularem ad suam portionem KM, quod sic erit manifestum.

Nam circulum $ANOB$ tamquam magnum super aliqua sphaera designatum intelligentes in eadem describemus circulum quoque magnum $AEFB$ ad planum circuli $ANOB$ erectum, deinde alium magnum $ACDB$, qui circulo $ANOB$ talis sit inclinatus, sub quo curva $AJKB$ fuerit procreata, et super B polo secundum arcum BN designabimus circulum NCE secantem circulum $ACDB$ super C, circulum vero $AEFB$ super E notam. Iterum super eodem B polo iuxta intervallum BO arcus alius designetur, circulus ODF secans circulum $ACDB$ in D, circulum vero $AEFB$ in F nota, protractisque lineis quatuor DK, FM, CJ et EL duae perpendiculares etiam producantur, CG 435v quidem super | E, L, DH vero super F, M, erit perpendicularis autem CG aequalis LJ rectae. Nam per primum librum *Theodosii de sphaericis* uterque duorum circulorum ODF et KCE erectus est ad circulum $ANOB$ per XIX undecimi *elementorum* et subiectionem praemissam, duae rectae EL et FM eriguntur ad planum circuli $ANOB$. At per definitionem creationis curvae $AJKB$ duae rectae CJ et DK ad eiusdem quoque circuli planum eriguntur, ergo per VI eiusdem undecimi duae lineae EL et CJ sunt parallelae, per eandem quoque DK et FM aequedistant. Sic quoque per eandem CG et LJ sunt parallelae. Ergo per XXXIIII primi eorundem CG par est LJ et DH ipsi KM rectae coaequalis. Atqui per secundum librum *Theodosii de sphae-*

a) J fehlt in der Hs.

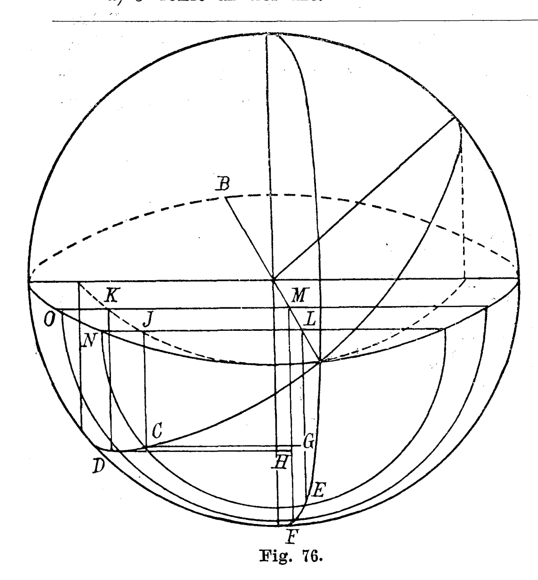


Fig. 76.

$ANOB$ die Ellipse $AJKB$ ist, der Kreis $AEFB \perp ANOB$, ferner die Kreise NCE und MDF. Dann ist K die Projektion von D, J von C, L von E und M von F.

Man zieht diese vier Verbindungslinien, ferner $DH \perp MF$ und $CG \perp LE$.

Dann wird bewiesen, daß $CJ \parallel EL$ und $DK \parallel FM$ ist. Da ferner $CG \parallel LJ$ ist, so folgt $CG = LJ$ und $DH = KM$. Nun ist $DH = \sin \widehat{DF}$ und $CG = \sin \widehat{CE}$, $\widehat{DF}$ und $\widehat{CE}$ sind ähnliche Bögen, die zu den Halbmessern MKO bzw. LJN gehören, also folgt $LJ : MK = LJN : MKO$.

ricis arcus CE circuli ECN similis est arcui DF | circuli FBD, et per primam libri tertii atque praesentes subiectiones linea recta LJN semidiameter est circuli ECN atque recta MNO semidiameter circuli FDO et DH recta sinus est arcus DF et linea recta CG sinus est arcus CE. Igitur per secundum huius intercedente XV quinti *elementorum Euclidis* proportio sinus CG ad sinum DH erit sicut[a]) semidiametri LJH circuli ECN ad semidiametrum MNO circuli FDO, quare per iam ostensa proportio LJ ad MK est sicut semidiametri LJN circuli ECN ad semidiametrum MKO circuli FDO; igitur, si in subiecti circuli plano curva talis iuxta praemissam fuerit designata ac ab eiusdem et circularis peripheriae communi diametro; quod oportuit ostendere. |

Propositio sexta.

436v

Lineis rectis quotlibet propositis totidem pares ad instar alicuius in partes divisae partire.

Quod propositio XII sexti *elementorum Euclidis* de singulis, id ego de quotlibet lineis rectis demonstrare intendo.

Sit ergo AB recta per E et D puncta trifariam divisa, atque in similes partes animus est secare duas rectas R et S. Igitur rectae AB super B signo angulariter iungo, velut sors tulerit, rectam BC et protracta linea AC concludo triangulum ABC atque ex C nota per XXXI | primi *elementorum Euclidis* erigo CG rectam lineam rectae AB aequidistantem et ex parte G indefinitam, deinde officio circini ex CG recta seco CF lineam, quae sit aequalis S, ex eadem quoque CG separo CG, quae rectae R sit aequalis, protracta deinde BC recta ex parte B in continuum et rectum, quousque libeat, in notam J, sic, ut tota sit CBJ, posthaec per eandem XXXI primi *elementorum* 437r

a) Hs. hat *sicut* korr. aus *sinus*.

---

6. Proposition.

Gegebene Strecken ebenso zu teilen wie eine gegebene geteilte Strecke (Fig. 77).

Die gegebene geteilte Strecke sei AB, die Teilstriche E und D; die zu teilenden Strecken seien S und R.

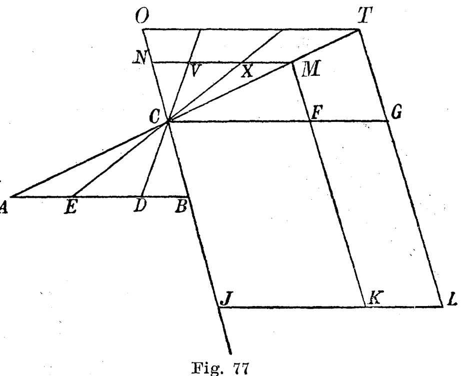


Fig. 77

Man trägt an der willkürlich gewählten Spitze des Dreiecks ABC parallel zu AB die Strecken $CF = S$ und $CG = R$ an, ebenso in einem beliebigen Punkt J der verlängerten Geraden CBJ die Strecken $JK = S$ und $JL = R$; dann zieht man KF und LG, die die Verlängerung von AC in M und T schneiden. Dann zieht man MN und TO parallel zu AB, die JC in N und O schneiden; dann ist $MN = S$ und $OT = R$, was leicht zu be-

lineae AB aequedistans JKL recta ducatur, ex qua denique officio circini linea JKL, quae sit aequalis R rectae abscindatur. Ac deinde eidem reseco rectam JK, quae sit S lineae compar. Aliae quoque duae FK et GL producantur, quantum FK secet AC ex parte A in longum protractam, si fuerit opus, super signo M, eandem denique recta GL | scindat super T nota. Posthaec in linea CBJ ex puncto C[a]) etiam in continuum et longum protracta, quantum satis erit, sumo CN aequalem FM rectae et CO, quae par sit GT. Protractis quoque MN et OT rectis ostendam OT parem esse R rectae et lineam MN aequalem rectae S. Nam duae rectae KL et CFG ex supposito aequedistant. Cumque CF par sit JK et JL aequalis CG, consequens erit ex XXXIII primi *elementorum* duas rectas FK et GL aequedistantes fore BCJ rectae, igitur per eandem TO par erit JKL rectae. Quare per communem sententiam et praesentem subiectionem ipsa probatur aequalis esse R rectae. Non aliter concludemus MN rectam parem esse ipsi lineae S.

437v

438r

Praeterea productis CE et CD rectis, quarum CE dividat | OT in signo Q et MN super X nota, CD vero secet OT super P puncto, rectam autem MN super V. Dico, rectas duas, TO, quae probata est R aequalis et MN parem S rectae, ad instar AB separatas esse, quod de recta $OPQT$ ita liquebit. Nam ipsa rectae AB est parallela[b]) per XXXIII et XXX primi *elementorum Euclidis*, ideo per XXIX et XXXII triangulus BEC erit aequiangulus triangulo COQ. Igitur per quartam sexti eorundem proportio BE ad OQ erit sicut BC ad CO. Haud dissimilem quoque rationem probabimus esse inter BD et OP et inter AB et OT, igitur permutatim arguendo proportio AB ad BE est, sicut OT ad OQ, et sicut BE fuerit ad BD, ita erit OQ ad OT. Ergo perspicuum est, rectam OT, quae R rectae par subicitur, ad instar AB rectae divisam esse. Idem etiam et eodem liquebit modo de recta NM aequali S rectae fieri in signis X et V. Denique per rationem penitus similem innumeras alias rectas ad instar AB distinguemus. Ergo lineis rectis quotlibet propositis totidem pares ad instar alicuius in partes divisae partivi, quod volui docere.

Propositio septima.

Si duae lineae rectae intra circulum aliquem protractae fuerint non sese intersecantes atque ex circumferentia circuli eius-

a) Hs. hat J. b) Hs. hat *pararella*.

---

weisen. Zieht man nun EC und DC, so schneiden diese MN bzw. TO in den Punkten X und V bzw. Q und P, die die gesuchten Teilpunkte sind. Beweis aus der Ähnlichkeit der Dreiecke.

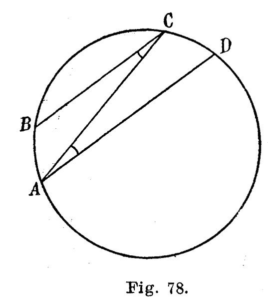


Fig. 78.

7. Proposition.

Zwei sich nicht schneidende Sehnen eines Kreises, die aus der Peripherie gleiche Bogen ausschneiden, sind parallel (Fig. 78).

Die gleichen Peripheriewinkel CAD und BCA

dem duos pares arcus utriumque separaverint, ipsae sunt parallelae sibi invicem. |

Sit circulus $ABCD$, inter quem rectae duae BC et AD productae de eiusdem circuli peripheria abscindant arcus duos aequales AB et DC. Dico duas lineas AD et BC parallelas esse, quod sic erit perspicuum. 439r

Protracta videlicet recta AC erunt enim per XXVI tertii *elementorum* coalterni anguli duo ACB et CAD aequales. Ideo per XXVII primi *elementorum Euclidis* duae rectae AD et BC erunt parallelae. Igitur, si duae lineae rectae intra circulum aliquem protractae fuerint, non sese intersecantes etc; quod oportuit ostendere.

Propositio octava.

Si duarum rectarum utraque cum diametro duos pares ex peripheria | circuli resecet, ita, quod quatuor illi arcus vicissim fuerint aequales, ipsas pares esse oportet. 439v

Sit ergo circulus $ABCD$, cuius diameter AD, et ex semicirculo $ABCD$ duo sumantur arcus AB et CD aequales. Item ex reliquo semicirculo $DEFA$ duo arcus DE et FA pares, protractisque lineis rectis BC et EF dico eas aequas esse; quod[a]) sic constat.

Nam ex communi sententia, si ab aequalibus aequalia demas, quae relinquuntur, paria sunt, duae rectae BC et EF aequos subtendunt arcus. Ideo per XXVIII tertii *elementorum* duae rectae BC et EF sunt aequales. Ergo, si duarum rectarum utraque cum diametro etc.; quod oportuit ostendere.

Non aliter propositionem ostendemus, si duae huiusmodi lineae cum duabus diametris pares arcus ex subiecta peripheria resecent. |

Propositio nona.

440r

Intra eiusdem circuli peripheriam multis rectis lineis vicissim aequedistanter protractis, si aliqua recta per centrum veniens earum unam in aequa scindat, reliquas aequaliter dividere necesse est.

Esto circulus $ABCD$, intra cuius peripheriam aliquot lineae protrahantur parallelae, AB, CG, DE, quarum AB per rectam $HGJK$ per centrum

a) Hs. hat *quo*.

---

sind zugleich Wechselwinkel an den Parallelen AD und BC.

8. Proposition.

Zwei Sehnen, die mit dem Durchmesser gleiche Bogen aus der Peripherie ausschneiden sind einander gleich (Fig. 79).

Es sei $\widehat{AB} = \widehat{DC} = \widehat{DE} = \widehat{FA}$. Dann ist $\widehat{BC} = 180^0 - \widehat{AB} - \widehat{CD} = \widehat{FE} = 180^0 - \widehat{AF} - \widehat{ED}$. $\widehat{BC}$ und $\widehat{FE}$ sind somit als Sehnen gleicher Bögen einander gleich.

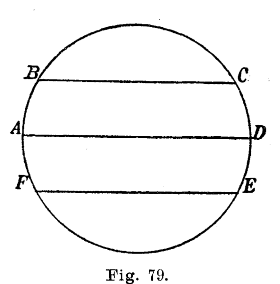


Fig. 79.

G venientem in paria dividatur super H signo, productaque GH in longum, donec secet etiam CF et DE rectas, hanc quidem in J nota, illam vero super K, dico 440v rectam FC super J et DE super K per aequa fuis|se divisam, quod ita patebit.

Nam GH super AB perpendiculariter instat per III tertii *elementorum Euclidis,* igitur per XXIX primi *elementorum* eorundem, sicut per definitionem perpendicularis angulus AHG rectus est, ita quoque duorum angulorum FJG et EKG uterque rectus est. Ergo per eandem tertiam tertii recta $HGJK$ separat aequaliter utramque linearum FJC et EKD, hanc quidem super J, illam vero super K nota. Idem quoque non aliter ostenderetur de pluribus parallelis. Ergo inter eiusdem circuli peripheriam multis rectis lineis vicissim aequedistanter protractis, si aliqua per centrum veniens earum unam in aequa scindat, etc. quod oportuit ostendere.

Propositio decima.

Curvam lineam, qualem quarta huius procreare docet, trans- 441r euntem | per extrema diametri subiecti circuli et per punctum inter ipsius peripheriam atque inter eandem diametrum assignatum verisimiliter designare.

Sit ergo subiectus circulus $AEBF$, cuius assignata diameter sit AB, inter quam et circuli peripheriam datus sit punctus C, per quem atque per diametri extrema A et B propositum esto describere modo quodam verisimili curvam lineam, cuius creatio ex quarta huius traditur. Ergo per XII primi *elementorum* ex signo C perpendicularis CD producatur ad diametrum AB, quae utrimque continuata in longum secet peripheriam circuli $AEBF$ in punctis duobus E et F, sic, ut tota sit $ECDF$ secans diametrum AB super D nota. Quae si fuerit centrum circuli $AEBF$, consequens erit, ut EDF 441v sit etiam diameter circuli | $AEBF$ scindens dimetientem AB ex suppositione super centro D ad angulos rectos. Ideoque circulus $AEBF$ separabitur in quadrantes quatuor AE, EB, BF et AF, quorum quisque in quotlibet aequas numero et magnitudine dividatur particulas, quae quanto plures fuerint, tanto accuratius proposita haec curva linea designabitur.

Deinde singula puncta semicirculi AEB cum singulis semicirculi AFB, quae in eandem partem paribus arcubus ex E et F notis abeant lineis, velut si punctum G tanto arcu recedat ab E versus A, quanto punctus J ab F

B C D H J G K A F E

Fig. 80.

9. Proposition.

Wird von den parallelen Sehnen eines Kreises eine von einem Durchmesser halbiert, so werden es alle übrigen (Fig. 80).

Der Beweis ergibt sich nach *Eukl.* III 3 daraus, daß $\sphericalangle AHG = \sphericalangle FJG = \sphericalangle EKG = 90^0$ ist.

10. Proposition.

Konstruktion einer Ellipse (Fig. 81).

Die große Achse sei ADB, die kleine Achse CDP. Macht man $GE = JF = EK = FM$, so sind GJ und

usque eandem partem. Ideo ipsa continuanda sunt per GJ rectam, pari modo K et M signa aequalibus arcubus abeuntia versus B notam per KM rectam colligentur. Huiusmodi autem lineae per septimam vicissim sunt parallelae.[a]) Omnes quoque eas dimetiens ABD per aequa dividit per IX, per octavam denique quaelibet duae | cum diametro EF aequos arcus abscindentes ex peripheria AE, BF sibi sunt aequales, velut si arcus EG aequetur EK, arcusque JF arcui FM, per eandem duae lineae rectae GJ et KM pares erunt. 442r

Harum parallelarum dimidia dua per VI secentur, quemadmodum ECD divisa est in puncto C, ad id autem faciendum non erit necesse singula dimidia seorsum dividere. Sed satis erit illa sic distinguere, quae continentur sub uno quadrantum quatuor, velut sub quadrante ADE, ita tamen, ut proportionales particulae horum dimidiorum sumantur ab diametro ADB versus circumferentiam $AEBF$; unde patet proportionalem talem particulam in uno dimidio repertam sufficere aliis tribus coaequalibus; ut, si duae parallelae GHJ et KLM fuerint aequae et NH proportionalis pars ipsius, GH ipsa quoque pertinebit tribus aliis dimidiis aequalibus HJ, KL et | LM. 442v

Haec autem ex his reliquis etiam abscindatur, et sit ipsa HQ in HJ, OL super KL et LR in dimidio LM, hoc itaque pacto in reliquis fiat dimidiis.

Sit demum portio DP ex semidiametro DF aequalis ipsi CD. His postremo punctis per rectas lineas proximis duabus quibusque colligatis, dico propositae curvae verisimilem constare effigiem. Nam, si per signa tria A, C, B iuxta quartam penitus esset creata, ipsa per quintam et praesentem subiectionem permearet singulas horum dimidiorum sectionum notas.

Quod si lineae rectae huiuscemodi in sectionum signa colligantes parvae fuerint, plurimum ipsae a conterminis inter proxima puncta particulis, curvae lineae verae nullo ferme saltem sensibili distabunt discrimine.

Hanc autem ideo proposui, quoniam difficile fuerat ex quarta talem curvam in plano aliquo describere. |

Propositio undecima. 443r

Meteoroscopium tertium describere.

Per quintam libri quarti meteoroscopio secundo descripto latus eius BC dividatur ad similitudinem divisionis, qua latus AC per sinus omnes seu paral-

a) Hs. hat *pararellae.*

MK gleich und parallel und schneiden den Durchmesser ADB, auf dem sie senkrecht stehen, in H und L. Setzt man nun $HN : HG = DC : DG$, so ist N ein Punkt der Ellipse, ebenso Q, R und O, wenn $HN = HQ = LR = LO$ gesetzt wird.

In gleicher Weise werden möglichst viele Ellipsenpunkte konstruiert und verbunden.

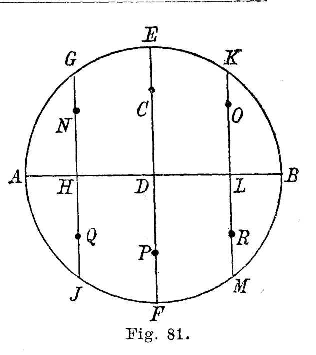


Fig. 81.

11. Proposition.

Konstruktion des dritten Meteoroskops.

Ebenso, wie beim zweiten Meteoroskop AC, wird



lelas lineas partitur, id est latus BC partiatur ex C in B per tertiam quarti, ut ipsum ab uno gradu in LXXXX progrediendo universorum arcuum integris gradibus constantium sinus contineat rectos.

Deinde per singula harum sectionum signa et per punctum A singulae describantur curvae lineae, quales IIII et X huius producere docent.

His itaque descriptis atque in centro C regula coniuncta, velut in secundo meteoroscopio, tertium complebitur. |

443r Sit DE aequalis ipsi AC iuxta rectorum sinuum rationem divisa, rursus DF et FE sint aequales, et earum utraque iuxta rectorum sinuum rationem divisa coniungantur portionum puncta ipsius DF cum punctis similis divisionis ipsius EF.

Erunt itaque convexae hae rectae lineae recti sinus earum circumferentiarum, quarum circuli semidiameter aequalis extiterit ipsi DE rectae lineae atque parallelae. Et a puncto ad partitionis puncta ipsius DE convexae rectae lineae dividerit parallelas ipsius DE ad similitudinem divisionis ipsius DE. Regula denique meteoroscopii huius eadem est, quae praecedentis. |

BC nach sin geteilt und dann durch A, B und die einzelnen Teilstriche von AC die Ellipsen konstruiert (Fig. 82).

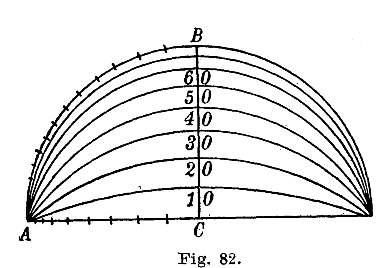


Fig. 82.

Ferner wird ein gleichseitiges Dreieck DEF konstruiert, dessen Seiten ($= AC$) gleichfalls nach sin Teilstriche geteilt sind und durch die von DF und EF die Parallelen zu DE gezogen (Fig. 83).

Das Lineal ist ebenso wie beim zweiten Meteoroskop.

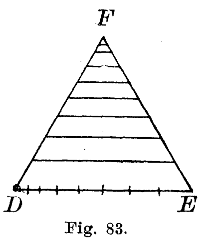


Fig. 83.

IOANNIS VERNERI
DE METEOROSCOPIIS.

444r

LIBER SEXTUS.
Quarti Meteoroscopii constructio et usus.

Propositio prima.

Quartum meteoroscopium construere.

In superioribus libellis illa tractata fuere curvarum linearum meteoroscopia, quibus propositio aliqua duobus aut pluribus etiam ingressibus conficitur, et quae reddant quaesita non aliter, quam investigato prius aliquo angulo. Nunc autem in praesenti libro trademus compositionem | et usum eius meteoroscopii ex eisdem curvis lineis et unico introitu vel duplici ad summum, quamlibet propositionem exhibeat notam. 444v

Iuxta doctrinam igitur primi libri sapheae dimidium velut ABC descriptum esto. Deinde semidiametro DE velut EB diviso per singula divisionis huiusmodi[a]) puncta, et per extremitates dimetientis AC, videlicet per signa A, C, iuxta propositionem decimam quinti libri singulae curvae describentur lineae in A, C punctis terminatae, quibus ita descriptis quartum construitur meteoroscopium, cuius effigies hic subicitur.

Hoc itaque organum, quanto maius exstructum est, tanto ampliori commoditate et minori fallacia problematibus absolvendis inserviet. |

445r

Propositio secunda.

Regulas quarti meteoroscopii fabricare.

Regulamenta quartum meteoroscopium duo postulat, unum quidem simplex et ab omni penitus divisione immune ac ipsius meteoroscopii dimetienti

a) Das Wort *huiusmodi* hat Hs. am Rande hinzugefügt.

DE METEOROSCOPIIS.
SECHSTES BUCH.
1. Proposition.

Konstruktion des vierten Meteoroskops.

Der Radius EB und ED wird wie beim ersten Meteoroskop geteilt und durch die Teilstriche und A und C werden Ellipsen gelegt.

ad minimum aequale, aut parum eo maius longiusculumque; alterum vero semidiametro aequale aut paulo maius, in quotlibet aequas partes divisum et, quo in plures minoresque, eo magis erit proposito nostro commodum aptumque.

Ego autem portionem propositionem eiusdem regulae, scilicet semidiametro ipsius organi aequalem, distribui in CXX partes. Facta igitur tali divisione iuxta easdem partes, ut moris est, numeri conscribantur, collectisque videlicet quivis partibus singuli annotentur numeri, velut in dividundis regu-445r lamentis praemissorum meteoroscopiorum facere consuevimus; itaque in|scriptis secundum quarti meteoroscopii regulamentum complebitur; ut autem huiusmodi regulae nobis nullam ingerant fallaciam, opera danda est, ut sint rectissimae praesertim in eis lateribus, quorum frequens usus in determinandis indiget propositionibus.

Propositio tertia.

Quarti meteoroscopii introitus aperire.

Ad idem meteoroscopium iidem quoque possint fieri introitus, qui et ad antecedentia, quos simplices quidem dico, quod per eos unico accessu exhibitum nobis problema ex eisdem praecedentibus meteoroscopiis inveniatur.

Fiunt autem huiuscemodi simplices introitus in praemissa meteoroscopia, quoties propositum constat triangulo sphaerico unum rectum habente angu-445v lum; cum autem quadrans praesen|tis meteoroscopii nihil differat a primo; est enim ipse sapheae quadrans — manifestum est igitur, ad talem quadrantem ex organo hoc, id est ex quarto meteoroscopio assumptum, omnes primi organi posse fieri introitus adhibita quadam regula simili regulamento primi meteoroscopii, quod, si ea non habeatur, uti poterimus regulamento huius secundo ita, ut, quando arcus aliquis iubetur super regulam computari, ipse in semidiametro BE ex E centro versus B punctum numeretur, extremoque uno ipsius regulamenti secundi, unde sectionum incipit numerus, supra E centro applicato reliquaque totius parte ipsi BE semidiametro adiuncta punctus regulamenti huius suppositus termino arcus supra EB semidiametro iam pridem numerato memoriae mandetur; ipse namque eandem praestabit commoditatem, quam paris a centro distantiae punctum regulae primi meteoroscopii.

Non aliter quoque reperiemus, quantum arcum huius regulae data portio 446r repraesentat; | ea namque supra EB semidiametro iam dicto modo applicata quaesitum aperiet arcum.

Velut sit talis arcus graduum XXX. Secundo igitur regulamento ipsi BE semidiametro, sicut praecipitur, applicito reperiuntur partes fere 31 eiusdem regulamenti competere gradibus XXX.

Exempli gratia sit arcus propositus graduum XXXX, et semidiameter EF

---

2. Proposition.

Konstruktion der Lineale des vierten Meteoroskops.

Das erste Lineal ist gleich oder etwas größer als der Durchmesser der Saphea, und hat keine Teilung, das zweite ist gleich oder etwas größer als der Halbmesser und in beliebig viele gleiche Teile, etwa in 120, geteilt.

ex partibus regulae contineat 120. Propositum esto invenire, quot earundem partium regulae aequent datam semidiametri EB particulam eosdem gradus XL significantem.

Regula igitur ipsi semidiametro EB, ut praecipitur, applicita partes ipsius fere reperiuntur, vicissim vero partes XLIIII pari ratione convertemus in gradus XL.

At organum hoc, idest quartum meteoroscopium, peculiares obtinet ingressus, qui praedictorum comparatione ferme sunt compositi, quod unico ingressu ipsum datum solvatur problema, cum alioque duplici aut triplici vix introitu ex praemissis meteoroscopiis definiri posset, qui universi in sequentibus declarabuntur theorematibus. |

Theorema primum.

447r

Ex dato trigono sphaerico tribus lateribus cognitis fuerit intentio quemlibet angulorum trium cognoscere.

Sit datus trigonus sphaericus GFH trium notorum laterum datusque angulus GFH, quem notum quoque oportet reddere in eis partibus, quarum maximi orbis eiusdem sphaerae circumferentia CCCLX possidet, quas quidem partes astronomorum vulgus graduum appellat nomine.

Id autem lector est admonendus, ut facta mentione in sequentibus de triangulo sphaerico intelligat eundem ex sectionibus magnorum eiusdem sphaerae orbium componi; sed eo regredior, unde parum lapsus sum.

Ex circumferentia limitis huius meteoroscopii ab A signo duae sumantur portiones | aequales, ex semicirculo quidem ABC portio AJ, vero ADC sectio AK; earumque utraque sit similis FG lateri trigoni GFH. Deinde prima regula super J, K signis apposita eius cum diametro AC communis sectio signetur L litera. 447v

Haec autem sectio ad paralellas meteoroscopii huius diligenter comparatur, ignorari etiam nullo literarum elemento adscripto facile non poterit, nullum tamen lateat, quod in sequentibus initium secundi regulamenti et praedictam sectionem L littera promiscue denoto rursus ex semicirculo ABC sectio AJM numeretur similis FH[a]) lateri trigoni dati FGH, prima super K, M signis apposita eius et diametri AC sectio sit N, parallelus autem per idem N signum veniens sit NO.

Posthaec ex KL recta linea portio LP sumatur significans arcum similem lateri GH et extremitate una ipsius | regulae secundae super L signo posito et tota alioqui rectae lineae KL applicita intervallum LP in eadem regula iuxta eius particulas et divisiones notetur. 448r

a) Hs. hat H korr. aus M.

---

3. Proposition.

Fundamentalaufgaben des vierten Meteoroskops.

Zunächst können, da der Quadrant der gleiche ist, alle Fundamentalaufgaben des ersten Meteoroskops mit ihm gelöst werden; nur muß man ein Lineal wie beim ersten benutzen, oder mittels des an den Halbmesser EB an-

Huius autem accepti intervalli extremitate una supra L puncto firmata, altera vero extremitate circumvoluta, donec tangat NO parallelum in signo Q, per quod inclinatus AQC ostendit, quantus sit angulus GFH. Nam ipsis inclinatis in eodem meteoroscopio quarto ad singulos inscriptis gradus quotus AQC inclinatus ab AEC dimetiente fuerit, tot gradus continebit angulus GFH propositus, quod erat inveniendum.

Velut in hoc exemplo sit latus FG gradus XLI, GH eorundem LIIII, HF grad. LXIX min. XL; suppositis igitur partibus secundae regulae 120 aequalibus semidiametro limitis, hoc est circuli $ABCD$ recta linea LP grad. 448ᵛ LIIII significans seu ei aequalis LQ earundem | ipsius regulae partium est XL fere; iuxta igitur hanc traditionem procedendo NO parallelus fere est XXIX ipsius organi et AQC inclinatus est fere octavus et quinquagesimus ab AEC dimetiente.

Igitur angulus GFH erit fere gradus LVIII, quod oportebat invenire.

Huius praecepti haec est demonstratio. Recta linea JK bifariam secatur in L signo per AE diametrum. Ex hypothesi namque duae sectiones AK, AJ ipsius peripheriae $ABCD$ sunt aequales. Igitur super L centro secundum intervallum KL circulo JKR descripto ipse transibit per J quoque signum, protracta deinde KAR recta linea apud circumferentiam circuli KJR terminata et communis sectio peripheriae JKR et rectae lineae KNM sit S punctum. Quod si circulum JKR tamquam rectum aliquem, sive ut aequinoctia- 449ʳ lem intelligamus, in planisphaerio AL recta linea | repraesentat erga aequinoctialem JKR arcum quendam similem arcui JR. Is autem per definitionem similium circuli sectionum similis est utrique duarum sectionum AJ, AK circumferentiae $ABCD$.

Nam duae JR, JA eundem communem angulum rectilineum JKR in duabus circumferentiis JKR, $ABCD$ constitutum subtendunt, et idcirco ipse JR, AJ, AL sunt similes. Igitur in planisphaerio, cuius rectus circulus seu aequinoctialis fuerit JKR circulus, recta linea AL significat magni orbis sectionem similem AK arcui, sed ex hypothesi AK sectio similis est FG lateri. Ergo AL recta in planisphaerio, cuius aequinoctialis est JKR, repraesentat magni orbis sectionem similem GF lateri. Rursus, quia ex hypothesi KL

---

gelegten zweiten Lineals zu dem gegebenen Winkel α den zugehörigen Wert $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ bestimmen.

Beispiel: $\alpha = 30^0$, $\mathfrak{T} = 31$; (sc. : 120); $\alpha = 40^0$, $\mathfrak{T} = 44$.

Dann aber kann eine Reihe von Aufgaben mit ihm einfach gelöst werden, zu deren Lösung man beim ersten Meteoroskop mehrere Fundamentalaufgaben anwenden mußte.

1. Theorem.

Bestimmung eines Winkels eines sphärischen Dreiecks aus den drei Seiten (Fig. 84).

Gegeben sei das sphärische Dreieck GFH, gesucht der Winkel GFH.

Man macht $AJ = AK = FG$ und verbindet J mit K; der Schnittpunkt mit AC ist L. Dann macht man $AJM = FH$, zieht KM, der Schnittpunkt

semidiameter similiter divisa est ipsi EB, semidiameter et ipsa significat quadrantem circuli magni per polos aequinoctialis JKR euntis, qui per primam primi libri | propositionem recta semper proveniet linea. Sed, ut partes EB 449v semidiametri gradus significant orbis magni per polos aequinoctialis, quem figurat circulus $ABCD$, euntis, ita partes semidiametri KL respectu JKR circuli. Igitur ex hypothesi PL recta linea in planisphaerio, cuius aequinoctialis JKR, repraesentat arcum similem GH lateri.

Et quoniam duae portiones AJM, RJS duorum circulorum $ABCD$, JKR per definitionem similium arcuum sunt similes — eundem namque angulum rectilineum MKR in eorum circumferentiis constitutum subtendunt, et arcus AM ex hypothesi similis est FH lateri — ergo portio RJS ipsius circuli JKR similis est FH lateri. At NO parallelus in eodem planisphaerio, cuius aequinoctialis JKR[a]) respectu A, C polorum descriptus ex omnibus magnis orbibus per eosdem polos descriptis inter suam circumferentiam et inter A | polum resecet circumferentias similes singulas ipsi AM arcui, ergo etiam 450r similes FH lateri. Quare AQ sectio ipsius inclinati AQC circuli portionem in eodem planisphaerio, cuius aequinoctialis JKR, significat similem ipsi FH lateri. At quia AL, LQ rectae lineae et AQ repraesentant arcus aequalium circulorum, videlicet magnorum descriptorum in sphaera, cui pertinet JKR planisphaerium, igitur circulorum sectiones per AL, LQ rectas lineas figuratae in ea sunt ratione, qua est latus[b]) FG ad latus GH, et arcus signatus sectione AQ ad arcum repraesentatum recta linea AL est, ut HF ad FG, et idem arcus AQ sectione figuratus ad arcum recta linea LQ repraesentatum sub ea est ratione, qua FH ad HG. Igitur in planisphaerio, cuius aequinoctialis JKR[c]), exhibebitur nobis quantitas anguli LAQ similis angulo GFH, quod oportuit ostendere. |

Aliter. 450v

Manente dispositione prioris figurae oportebit rursus alia quadam ratione angulum GFH in partibus seu gradibus, quorum

a) Hs. hat JKR korr. aus . . . b) Hs. hat *latius*. c) Hs. hat KR.

mit AC ist N. NO ist parallel zu LK. Schneidet man nun auf LK $LP = GH$ ab und zieht um L den Kreisbogen mit dem Radius LP bis zum Schnitt Q mit NO, so gibt die durch Q gehende Ellipse die Größe des Winkels FGH an.

Beispiel: $FG = 41^0, GH = 54^0, HF = 69^0 40'$. Resultat: $LP = LQ = 54^0 = 40$ Tl.; $NE = 29$ Tl., $AQC = 58$. Ellipse, also $\sphericalangle GFH = 58^0$.

Beweis. Beschreibt man um L mit dem Radius LK einen Kreis, so ist dieser die Projektion eines Parallelkreises auf der Kugel; sein Schnittpunkt mit KNM sei S. AL ist dann die Projektion eines Kreisbogens $= \widehat{JR}$; JR ist aber, was leicht zu beweisen, $= AJ = AK = FG$. LK ist Projektion eines Qua-

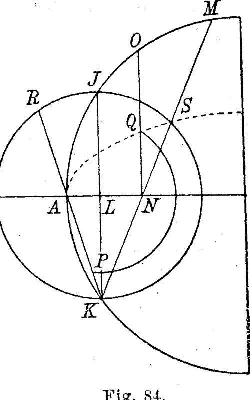


Fig. 84.

integra unius circuli circumferentia subicitur CCCLX, efficere cognitum.

Sit igitur, ut in praesenti descriptione, LQ sumpta ex secundo regulamento aequalis LP arcum indicante similem FH lateri, sed AL circumferentiae alicuius significet sectionem FG lateri similem, ut antea fuerat suppositum, arcus vero AM iam sit similis GH lateri. In ipso quoque secundo regulamento tot sumantur partes, quae sint | LQS partes aequent KL rectam lineam, sitque earundem partium L punctus extremitas una, P vero extremitas altera, et primo regulamento super LS[a]) signis applicito secet circumferentiam limitis $ABCD$ in puncto T, quo cadente inter J et C signa, angulus GFH obtusus est seu recto maior, quantum est circumferentiae alicuius segmentum simile portioni JT.

451r

Quare cognito JT peripheriae $ABCD$ segmento anguli GFH magnitudo non ignorabitur, quod erit intentum.

Sin autem T signum ceciderit inter K et J [?] puncta, eiusdem magnitudo anguli GFH recto minor est, quantum est arcus similis ipsi segmento JT.

Huius itaque segmenti partium numero ex LXXXX sublato relinquitur quantitas anguli GFH, qua rursus patebit propositum.

Sit in dato trigono sphaerico, ut ante, latus FG grad. XLI, GH latus grad. LXXXI, FH grad. LXIX et semis, et oportet anguli GFH invenire magnitudinem.

451v

Numeratis | igitur utrimque circa A in circumferentia $ABCD$ grad. XLI et ad exitum huiusmodi numerationis positis signis J, K atque super eis prima regula eius iterum et semidiametri AE sectio notetur L puncto.

Deinde eiusdem regulamenti una extremitate in K signo defixa, reliqua in semicirculo ABC firmetur ad exitum grad. LXXXI, quos latus GH continet, horum autem graduum finis sit M punctus, ipsum autem regulamentum secet AC dimetientem super N signo, quod, quia duobus quasi medium intercidit parallelis, quarum superior in organo gradibus XXXIIII, inferior grad. XXXV adscribatur, punctus igitur N indicat parallelum NO medium esse inter

a) Hs. hat KS.

dranten des Parallelkreises, also ist PL die Projektion eines Bogens $= GH$. Da ferner $RJS \sim AJM$ (Bögen über gleichem Winkel) ist, so entspricht RJS (bezogen auf den Kreis JKR) der Seite FH. Ebenso ist NO die Projektion eines Bogens, der der Seite FH entspricht, und somit auch AN. Somit ist auch AQ die Projektion eines Bogens FH und daher AQ gegen AN oder AL um den Winkel geneigt, den die durch Q gehende Ellipse, die Projektion eines gegen den Kugelmeridian geneigten Kreises, angibt.

2. Gegeben ist $GF = AJ$, $FH = LP$ und $GH = AM$; gesucht der Winkel GFH (Fig. 85).

Die Konstruktion ist zunächst wie bei 1; um aber den Winkel GFH zu finden, zieht man den Kreis um L mit dem Radius LP, der die Linie NO in Q schneidet; zieht man LQ, so schneidet es den Kreis um L mit dem Radius LK in S. Die Verbindungslinie KS schneidet die Peripherie AB in T. Dann ist $90 \pm JT$ der gesuchte Winkel.

dictos parallelos, et inter curvas lineas semicirculi ADC, numeratis super recta linea KL grad. LXIX et semis et fini numerationis huius P litera notato atque secundo regulamento ipsi LK, ut dictum fuit, applicito, erit LP[a]) aequalis regulamenti secundi partibus LIII et semis, tota vero eisdem partibus LXXVIII fere, uno igitur regulamen|ti huius extremo in L firmato et eiusdem 452r altero puncto Q partes LIII ferme terminante in NO parallelum translato ponatur prima regula in una eius parte super K signo, altera vero in secundi regulamenti punctum, quod sit S, partes 78 terminans translata secat ex limite meteoroscopii huius, hoc est ex circumferentia $ABCD$, arcum AT graduum L.

Et quoniam punctum T cecidit inter J et B signa recedens ab gradibus IX, igitur angulus GFH quaesitus complectitur grad. LXXXXIX, quorum angulus rectus sphaeralis continet LXXXX, quod est intentum.

Huius autem secundi modi absolvendi problematis talis est demonstratio. Sitque inprimis T signum inter J et C puncta sumptum. Et quoniam ex hypothesi duae rectae lineae AL, LQ in planisphaerio, cuius JKR fuerit rectus, significant duo latera GF, FH et paralleli NO distantia a polo similis| est GH lateri per hypothesim, igitur inclinati AQC sectio AQ indicat arcum 452v similem ipsi GH lateri propositi trigoni, ergo ALQ angulus angulum repraesentat aequalem ipsi GFH sphaerico angulo et protracta AC diametro in partem A, quosque secet JKR orbem in V puncto, et quoniam EAV recta linea secat KLJ super L ad angulos rectos, igitur circumferentia JRV quadrans est totius orbis JKR, at per definitionem similium arcuum duae sectiones circulares JT, JS similes sunt propter eundem angulum rectilineum JKT in circumferentiis duabus $ACBD$, JKR communiter constitutum et ab eisdem sectionibus JT, JS subtensum et JT sectionis ratio ex hypothesi ad sui circuli quadrantem cognoscitur, quare et JS sectionis ad sui circuli quadrantem ratio nota erit. Ergo totus arcus SRV ad totam circumferen|tiam 453r JKR notam habebit rationem. Igitur angulus ALQ ad quatuor rectos cognitae erit rationis, sed, velut ostensum est, angulus ALQ rectilineus similem

a) Hs. hat LD.

Beispiel: $FG = 41^0$, $GH = 81^0$, $FH = 69\frac{1}{2}^0$. Resultate: $LQ = 53\frac{1}{2}$ Tl. $LS = LK = 78$ Tl., $AT = 50^0$, $JT = 9^0$, $\sphericalangle GFH = 99^0$.

Im Beweis wird zunächst, wie bei 1 gezeigt, daß AL GF, LQ FH und AN GH entspricht, also auch ALQ dem gesuchten Winkel GFH. Dann ist $ALQ = 90^0 \pm \widehat{JS} = 90^0 \pm \widehat{JT}$.

Anwenden läßt sich diese Lösung (1 und 2) nur, wenn $LQ < LO$.

3. (Fig. 86). Man verlängert im $\triangle FGH$ FG bis X, so daß $FX = 180^0$ ist, ebenso GH bis X, so daß ebenfalls $GX = 180^0$; dann bestimmt man nach 1 oder 2 den $\sphericalangle HFX$, dann ist $GFH = 180^0 - HFX$.

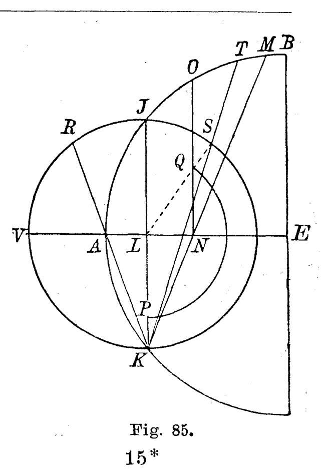


Fig. 85.

sphaerico GFH dato repraesentat angulum. Ergo angulus GFH sphaericus quoque cognitus est, quod fuit demonstrandum.

Rursus T punctus sit inter J, K signa. Idem quoque eodem modo demonstrabitur. Tunc enim S punctum deveniet in quadrantem JV orbis JKR, et sectio JS rursus similis erit JT sectioni, propter eundem angulum JKT, quem uterque arcuum JS, JT subtendit, et quoniam arcus JT notus est, ergo et JS. Igitur et quantitas anguli JLS, quare et reliquus de recto uno, angulus ALQ videlicet, cognoscitur, ergo et sibi similis GFH notus est, quod oportuit ostendere.

453ᵛ Verum iste secundus modus huius demonstrationis, | quando LQ maior extiterit ipso LO intervallo, theorema per hoc IIII. meteoroscopium non conficitur, nisi in eo paralleli sint scripti egredientes limitem $ABCD$.

Aliter.

Latus GF[a]) in partem F producatur usque in X, ut circumferentia GFX sit semicirculus. Sic quoque GH in partem H protrahatur, donec fiat semicirculus, qui necessario finitur etiam in X signo.

Duo autem arcus FG, GH ex hypothesi sunt cogniti. Ergo duo FX, XH arcus cognoscuntur; reliqui namque sunt ex semicirculis GFX, GHX, quare trigonum sphaericum HFX trium est notorum laterum; cognito igitur per 454ʳ primam | aut secundam scientiam sive demonstrationem huius problematis HFX angulo cognoscitur GFH angulus ex semicirculo seu duabus rectis reliquus.

Hic autem inquirendi problematis modus tertius, velut et in subsequentibus, idcirco ponitur, ut si problema ipsum commode primo modo fieri nequeat, saltem secundo fiat modo, et est tamquam cautio quaedam.

Corrolarium.

Quod si propositus angulus recto maior extiterit, per primam scientiam seu demonstrationem eius magnitudinem definire non poterimus. Nam ABC semicirculus in sua latitudine quadrantem tantum continet.

Quare secundam aut tertiam demonstrationem sive scientiam oportebit adoriri, ut propositam conficiamus quaestionem. |

a) Hs. hat LE.

Fig. 86.

Anmerkung. 1. ist nur dann zu gebrauchen, wenn der gesuchte Winkel $\sphericalangle 90^0$ ist.

4. Sind die beiden dem gesuchten Winkel anliegenden Seiten gleich ($AB = AC = a$, $BC = b$, $\sphericalangle BAC = \beta$), so ist

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin a} \text{ (Aufg. 1) (Fig. 87).}$$

Beispiel: $a = 30^0$, $b = 18^0$, $\beta = 37^0$.

Sind die drei Seiten ungleich ($b > c$, $\sphericalangle \alpha$ gesucht, Fig. 88, so bildet man $\sin\gamma' = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} b$

Fig. 87

Aliter.

454v

Ex dato triangulo sphaerico tribus lateribus datis, quo pacto quilibet angulus cognoscatur, alia quadam ratione investigandum est.

Quod si datum angulum, qui investigandus sit, aequa contineat latera, latus igitur appositum investigando angulo bifariam scindatur, dimidium cum altero duorum reliquorum laterum per primum aut quintum introitum primo aut secundo meteoroscopio immissum reddet nobis sectionem, cuius duplum indicat, quod quaeritur.

Velut in triangulo ABC sphaerico duorum laterum AB, AC | utrumque (455r) sit grad. XXX, basis BC sit graduum XVIII, quaerendusque fuerit angulus BAC aequis contentus lateribus; dimidium ergo BC basis est grad. IX, qui cum gradibus XXX alterius laterum BAC angulum ambigentium primo aut secundo meteoroscopio immissi producunt per primum aut quintum introitum grad. XVIII et semissem, quorum duplum, videlicet grad. XXXVII, qui definiunt angulum BAC quaesitum.

At tribus lateribus sibi invicem inaequalibus ingrediendum est ad idem meteoroscopium per XII[a]) introitum cum maiori duorum laterum, quae investigandum angulum comprehendunt, atque basi extractaque portione reliquo duorum laterum, quae quaerendum[b]) angulum complectuntur, aequali in priori situ manente regula, quasi cum eisdem numeris introitualibus elicita per primum aut quintum ingressum peripheria, qui scruta|batur, angulum ostendet. (455v)

Ut in triangulo ABC secundae figurationis, cuius latus AB grad. XXXIIII et dimidii, AC autem partium L, basis vero BC graduum sit XXXVIII min. L, quaeratur angulus BAC. Facto igitur ingressu duodecimo cum grad. L, maiori videlicet laterum angulum BAC continentium atque cum basi BC grad. XXXVIII min. L proditur latus AB rursus, id est grad. XXXIIII et semissae.

Perseverante igitur regulamento quasi per introitum primum aut quintum cum latere AC et basi BC exit angulus BAC grad. LV fere. Ubi demum circumferentia primum extracta minori laterum, quae scrutandum angulum complectuntur, aequalis non evenerit, ergo investigandus est arcus, qui per duodecimum ingressum inprimis cum minori latere anguli quaerendi, deinde |

a) Nach XII hat Hs. *meteoroscopium* gestrichen.
b) Nach *quaerendum* hat Hs. *laterum* gestrichen.

(Aufg. 12), ist nun $\gamma' = c$, so bildet man $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin b}$ (Aufg. 1). In diesem Falle ist nämlich $\beta = 90^0$ (Fig. 88).

Fig. 88.

Beispiel: $a = 38^0 50'$, $b = 50^0$, $c = 34\frac{1}{2}^0$. Resultat: $\gamma' = 38^0 50'$, $\alpha = 55^0$.

Den allgemeinen Fall sucht der Verfasser folgendermaßen zu lösen. „Man sucht einen Winkel x auf, der so groß ist, daß die Winkelsumme $\varphi + \psi = b$ wird, wenn $\cos\varphi = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} c$ und $\cos\psi = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} a$ sein soll“

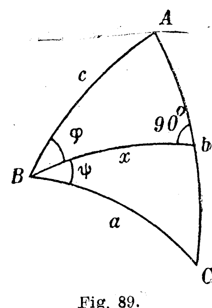


Fig. 89.

456r cum base, hoc est cum latere, quod eidem observatur angulo, duos educat arcus, unum scilicet cum base, alterum cum eodem minori latere, qui pariter sumpti constituant latus maius seu reliquum eiusdem trianguli.

Talis autem arcus necessario minor est utroque duorum laterum, quibus scrutandus comprehenditur angulus, quod fieri potest palpitante quadam tentatione, accipiendo scilicet, ut libet arcum aliquem, ea tamen lege, ne alterum dictorum arcuum exsuperet, qui si iuxta votum non fuerit sumptus, cum fortassis duae peripheriae per ipsum extractae vel amplius aut minus conflaverint simul, coniunctae maximo propositi latere trianguli, ergo alius accipitur arcus priore minor, si aggregatum tale maximo latere maius extiterit, aut minores
456v eadem aggregationis sum|ma minor longissimo trianguli latere contigerit.

Hac itaque cautela accuratius animadversa et tali tentatione aliquoties repetita tandem in arcum, qui desideratur, incidemus, nec frequens haec investigationis huius replicatio aliquem ab opere quasi ob laborum multitudinem prolixo et difficili deterreat, quae si brevi committetur exercitationi non in hoc plus temporis, quam in aliis absumetur eiusdem theorematis operationibus atque modis.

Velut in tertia figuratione triangulus ABC habeat latus AB grad. XXVI min. L, latus AC grad. L, BC vero basis grad. XXX. Quaerendo igitur angulum BAC per duodecimum introitum cum AC, CB lateribus extrahuntur grad.
457r XLII, plures illis in latere AB contentis, ergo praemissa tenta|tione seu inquisitione iam tradita talis arcus invenitur grad. XIII min. XL, quoniam cum eis et grad. XXX basis BC per XII reperiuntur primum grad. XXVII. Deinde cum eisdem grad. XIII min. XL et cum grad. XXVI min. L per eundem ingressum prodeunt grad. XXIII, qui grad. XXVII pridem repertis additi conficiunt grad. L aequales lateri AC, quod quidem signum est grad. XIII min. XL iuste inventos fuisse; facto demum primo vel quinto introitu cum gradibus XXVI min. L lateris AB et cum grad. XIII min. XL exibit angulus BAC grad. XXXII fere, quod erat investigandum.

Hic demum praesentis theorematis modus, si aliter propositio ad hoc theorema pertinens obtinere non poterimus, tum ob coactam linearum vicinitatem et propter spatiorum gradus significantium coartatam nimis strictitudinem, cum ob parvitatem arcuum, quibus problema investigandum erit, ope-

---

(Fig. 89). Dann ist $\sin\alpha = \frac{\sin x}{\sin c}$ (b ist hierbei die größere der dem Winkel α anliegenden Seiten).

Die Aufgabe kann auf diese Art nur empirisch gelöst werden, indem man für einen willkürlichen Winkel x die Winkel φ und ψ sucht und ihre Summe mit b vergleicht, und dann x entsprechend größer oder kleiner wählt.

Beispiel: $c = 26^0\,50'$, $b = 50^0$, $a = 30^0$. Resultat: $\gamma' = 42^0$, $x = 13^0\,40'$, $\varphi = 23^0$, $\psi = 27^0$, $\alpha = 32^0$.

Mit dieser Aufgabe kann die Zeitbestimmung aus der Sonnenhöhe oder die Entfernungsbestimmung zweier Punkte ausgeführt werden.

5. Lösung mittels des dritten Meteoroskops (Fig. 90).

Gegeben sei das $\triangle MNO$, gesucht der Winkel MNO. Man macht $AD = MN$, $DE = MO$, verbindet D mit C und macht $DF = \widehat{DE}$. Ferner

rationem nostram in huiusmodi propositis numquam frustrabitur, modo non desit medio|cris quaedam diligentia. 457v

Denique hoc pacto data solis altitudine supra horizontem quempiam diei horam vel elevatione stellae fixae tempora noctis inveniemus. Datis etiam duorum locorum latitudinibus atque itinerario spatio vel longitudinum differentiam vel positionis venabimur angulum atque innumera paene proposita, tum in astronomico, tum in geographico, congruenter absolvemus negotio.

Aliter.

Secus idem efficietur per meteoroscopium tertium adhibita regula particulatim divisa, qualis illa huius habetur quarti meteoroscopii.

Sit ergo meteoroscopium tertium, velut quadrans ABC, cuius centrum C, basis AC[a]), et esto datus triangulus MNO sphaericus | habens latera tria 458r MN, NO, OM data seu cognita, et fuerit propositum reperire ex tertio meteoroscopio ABC quantitatem anguli MNO, sumenda igitur est AD sectio similis alteri duorum laterum MNO angulum complectentium. Esto autem, ut AD sectio similis sit MN lateri, deinde NO lateri reliquo similis sit DE sectio et volubilis norma ipsius meteoroscopii super C centro infixa signo D accommodetur, atque in ea signum assumendum est, quod sit F, ita, ut CF portio repraesentet complementum ipsius sectionis DE. Posthaec extremitas illius regulae pridem divisae in particulas utcumque C, quae, quanto fuerint minutiores, tanto accuratius propositum absolves problema, super E signum, reliquo ad F signum applicato et posito AH segmento simili MO lateri trigoni MNO, sitque ipsius AH peripheria, dupli dimidia basis HJ, quam astronomorum vulgus sinum appellat rectum, et ego aequedistantem seu pa|rallelum 458v dixi, secans normam EFG super K signo, particulis itaque regulamenti EFG inter F, K signa comprehensis memoriae commendatis ipsa norma EFG super aequedistantem seu parallelum circumferentiae AP aequalis NO sumptae applicetur ita[b]), ut F punctum semidiametro AC cohaereat, K vero inter eandem

a) Hs. hat BC. b) Hs. hat *ita* korr. aus *itaque*.

sei $AH = MO$, $HJ \| BC (= \sin AH)$. Dann schneiden sich EF und AH im Punkte K. Dann macht man $AP = NO$ und zieht die Parallele zu BC durch P, der Schnittpunkt mit der Geraden AC sei F', macht man nun $F'K' = FK$, so geht durch K die Ellipse AKL und $\sphericalangle MNO = \sphericalangle BAL = PK'$.

Beispiel: $MN = 26^0 50'$, $NO = 50^0$, $MO = 30^0$. Resultat: $CF = 40$, $K'P = 32^0$.

Fällt K aus dem Meteoroskop heraus, so verlängert man das an HJ angelegte Lineal durch ein zweites.

In ähnlicher Weise wird noch eine Modifikation dieser Methode gegeben, jedoch ohne Zahlenbeispiel und ausführlicheren Beweis, sondern zum Beweis auf ein späteres liber problematum verwiesen.

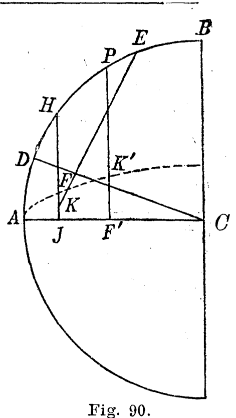


Fig. 90.

et peripheriam ADB locetur in eadem parallelo, et per K signum descendat inclinatus AKL, inter eundem namque et peripheriam ADB iuxta numerum inclinatorum liquebit angulus MNO quaesitus.

Velut sub recto latere MN grad. XXVI min. L, NO grad. L, MO grad. XXX; igitur sectio AC grad. erit XXVI min. L, quos MN latus continet, et DE grad. L, velut latus NO et portio CF normae CFD grad. XL, quantum videlicet est complementum lateris NO, et peripheria AH continebit grad. XXX.

459r Quare portio KP paralleli FKP indi|cat angulum MNO grad. XXXII complecti, quod fuit inveniendum.

Hic tamen cautelis quibusdam utendum est prima, quando intersectio communis K paralleli HJ et regulamenti EFG ceciderit extra meteoroscopium ABC, igitur accomodanda est regula alia ipsi HKJ parallelo, quae sua longitudine coniungatur normae EFG huiusque et normae EFG communis sectio rursus sit K, deinceps erit, ut prius, agendum.

Secunda cautela: quod si DB peripheria tam brevis fuerit, ut in ea DE sectio numerari non possit, igitur meteoroscopii regula super D signo, ut ante, posita norma EFG ad rectos angulos ipsi CD regulae apud F signum applicetur, quod facile fieri poterit, si ex utroque latere eadem regula CD similes habuerit sectiones, et EFG norma in utroque regulae CD latere super paribus applicata particulis, et idem, ut prius, obtinebimus propositum. |

459v Quamvis iam dictus modus satis sit certus, attamen ad declinandas praemissas cautiunculas aut alteram ex eis aliam propositum conficiendi habebimus scientiam, quae talis est.

Sit, ut prius, arcus AP aequalis NO lateri trianguli MNO et ipsius AP parallelus seu sinus rectus sit PQ[a]), subiectione tamen hac praehabita, quod latus[b]) NO longius sit latere MN, auferatur MN ex NO residuoque similis esto peripheria AR et super normali EFG FE sectio sit aequalis PQ parallelo, et puncto E normalis eiusdem super R applicitur F reliquus punctus segmenti EF ipsius normalis EFG contingat ipsius meteoroscopii regulam

a) Hs. hat *PK*. b) Hs. hat *latius*.

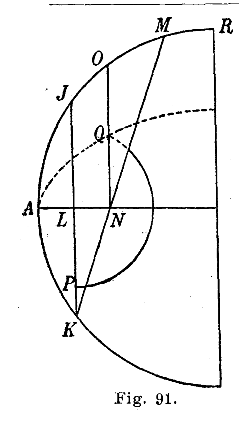


Fig. 91.

2. Theorem.

Bestimmung der dritten Seite eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

1. (Fig. 91.) Das Dreieck sei GFH, die bekannten Seiten FG und FH. Man macht $AJ = AK = FG$, $AM = FH$, zieht KM, ferner $NO \parallel JL$, die dem Winkel GFH entsprechende Ellipse sei AQC, sie schneidet NO in Q. Verbindet man dann LQ, so ist $LP = LQ$ gleich der 3. Dreieckseite GH.

Beispiel: $GF = 41^0$, $FH = 69\frac{1}{2}^0$, $GFH = 58^0$, $LQ = 40$ Tl. $= 54^0$.

CD itaque, ut CF eius particula repraesentet peripheriam similem complemento lateris NO, sicque firmato normali EFG sumatur AH peripheria similis basi MO insuperque eius parallelo | HJ applicata alia regula, si eadem parallelus HJ nondum secuerit EFG normale et communis sectio aut applicatae regulae aut paralleli HJ cum normali EFG sit K, rursusque in normali EFG FK segmento memoriae commendato FKE ipsi PQ parallelo adaptato, ut F signum signoque Q supponatur, et E ipsi P. 460r

His itaque dispositis inclinatus per K signum veniens ostendet quaesitum, velut praemissa docet praeceptio, et sic, si placeat, exemplaris ostensio praecedens repetatur. Veritas huius pendet in eo, quod sinus rectus EB peripheriae ad sinum rectum BH circumferentiae est sicut EFG addita in rectum ex parte G, quod est inter G et communem sectionem dimetientis BC in partem C producti, et KFG normalis in G partem acti, quod posterius in libro problematum latius explicabitur, par est ostensio praecedentis doctrinae. |

Theorema secundum. 460v

Dati sphaerici trigoni duobus lateribus notis anguloque ab eis contento reliquum latus cognoscere.

Sit datus trigonus FGH et, ut ante suppositum fuit, AL similis sumatur ipsi FG, sectio vero AM circumferentiae ABC similis lateri FH, et inclinatus cum diametro ac continens GFH angulo aequalem sit AQC secans parallelum NO in signo Q, atque una regulamenti secundi extremitate super L, reliqua eius portione super Q puncto posita partibus eius inter L et Q puncta comprehensis ex ipsa KL recta linea aequalem sume LP.

Quot enim gradus ipsa LP | exhibet, tot etiam comprehendet latus GH. 461r
Ergo dati sphaerici trigoni duobus etc.; quod oportuit ostendere.

Sit igitur in dato trigono latus GF grad. XLI, FH grad. LXIX et semis, angulus vero GFH grad. LVIII, parallelus itaque NO in organo hoc erit ferme XXIX, et recta LQ in regulamento continet partes fere XL, quibus aequalis LP sumpta indicat inter curvas lineas GH esse grad. LIIII, quod oportuit ostendere.

---

2. (Fig. 92.) Man macht $AJ = FG$, so daß AL die Projektion von AJ wird, $LP = FH$, $JT = \pm(GFH - 90^0)$ je nachdem $GFH \gtrless 90^0$ ist, zieht KT und schneidet KT mit dem um L mit dem Radius LK gezogenen Kreis in S, dann schneidet LS den um L mit dem Radius LP gezogenen Kreis in Q. Durch Q zieht man die Parallele NQO zu KJ, und verbindet K und N, KN schneidet die Peripherie AB in M und es ist $AM = GH$.

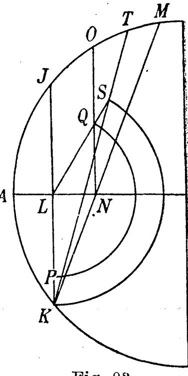


Fig. 92.

1. Beispiel: $FG = 41^0$, $FH = 69\frac{1}{2}^0$, $\sphericalangle GFH = 58^0$.
Resultat: $69\frac{1}{2}^0 = 53$ Tl., $LQ = 78$ Tl., $JT = 32^0$, $AM = 54^0$.

2. Beispiel: $FG = 41^0$, $FH = 69\frac{1}{2}^0$, $GFH = 99^0$.
Resultat: (hierbei ist $GFH > 90^0$). Man konstruiert ebenso

Aliter.

Repetatur figura praecedens.

In dato igitur trigono FGH duobus lateribus GF, FH cognitis, angulo 461v quoque GFH, oportet invenire, quot gradus habeat | GH latus. AL igitur assumatur dicto modo, ut significet arcum similem lateri FG, et LP similem ipsi FH. Ex regulamento deinde secundo super LK rectam applicito sumatur aequalis ipsi LP, quae sit LQ et LS aequalis ipsi LK.

Quod si angulus GFH recto, id est grad. LXXXX, minor fuerit, eo ex gr. LXXXX sublato reliquum a puncto J versus K censeatur in circumferentia limitis $ABCD$ et ad finem huius computationis ponatur T litera, firmataque regula prima super K, T signis, secundum vero regulamentum in L puncto revolvatur, donec S signum primam contingat regulam, et parallelus, cui inhaeret Q punctus, sit NQO. Signum quoque N, ut ante, AC dimetiens teneat. Denique primum regulamentum K, N punctis applicitum secet peripheriam 462r $ABCD$ super M signo, | erit igitur AQ sectio inclinati AQC similis AM sectioni semicirculi ABC.

At quia totus trigonus ALQ similis est iuxta praedictas demonstrationes primi theorematis trigono FGH, et AQ similis ipsi GH lateri, ergo AM sectio similis est ipsi GH lateri. At AM portio peripheriae ABC cognita est. Igitur et GH latus trigoni FGH cognoscitur, quod oportuit invenire.

Ubi vero angulus GFH rectum seu gradus LXXXX superaverit, igitur ex eis quadrante sublato relictis ex peripheria JC similis auferatur sectio JT ac deinceps omnino procedatur, ut iam dictum fuit, et nostram aucupabimur intentionem.

Exempla ostensionis uberioris gratia subtexantur, in triangulo FGH duo 462v la|tera FG, FH notaque sint, angulum GFH notum continentia, sitque latus GF grad. XLI, latus FH grad. LXIX et semis, angulus autem GFH grad. LVIII, et oportet reperire latus GH. Igitur gradibus LXIX et semissi rectam lineam per L, P signatis competunt partes fere LIII ipsius regulamenti secundi, et notentur, LQ ipsi vero LK aequalis sit in eodem regulamento LS, et est partium LXXVIII earundem. At angulo GFH, quia est grad. LVIII et idcirco recto minor, eo ex grad. LXXXX sublato gradus remanent XXXII, quibus in peripheria JAK similis sit JT. Prima ergo regula signis K, T superimposita et secundo regulamento in L punctum defixo, reliqua ipsius parte, donec S signum tangat primam regulam, idest K, T, circumlata notetur parallelus NO, 463r cui videlicet Q | signum regulamenti secundi insistit, et a primo rursus regulamento ad K, N puncta translato secetur ABC peripheria super M puncto, erit igitur AM sectio graduum fere LIIII. Cui quidem sectioni, cum GH latus sit simile, notum ergo erit latus GH, graduum videlicet LIIII, quod oportuit invenire.

Rursus in triangulo quodam sphaerico FGH latus FG grad. XLI et latus FH grad. LXIX et semis contineant angulum GFH grad. LXXXXIX, et sit intentio reperire, quot gradibus constet latus GH. Et quoniam angulus GFH graduum est LXXXXIX, idcirco recto maior, igitur ex eo gradibus LXXXX

---

wie oben. $LP = 53^0$; $LK = 78^0$. Zuletzt zieht man KN, das ABC in M schneidet. $AM = GH = 81^0$.

sublatis relinquuntur grad. IX, quibus similis esto arcus JT in peripheria JBC sumptus, applicita regula prima punctis K, T, eritque, ut ante, in regula|mento secundo LP[a]) fere partium LIII et tota LQS seu sua aequalis LPK[b]) earundem partium LXXVIII. Igitur secundo hoc regulamento super L firmato et reliqua eius parte in S signo ad KT rectam lineam sive ad primam regulam traducta incidit punctum Q in eum parallelum, qui inter tricesimum quartum et tricesimum quintum fere medius est. Sitque ille, sicut ante dictum fuit, NO, atque primum regulamentum ad K signum in parte una et in reliqua in signum N, quod dimetiens AC semper obtinet, positum secat semicirculum ABC super puncto M. Et quia sectio AM similis est lateri GH, reperiturque ferme grad. LXXXI, igitur et latus GH graduum est LXXXI, quod fuit inveniendum. 463ᵛ

Aliter.

Hic autem tertius inquirendi modus vel | tertius praecedentis theorematis praecedentium modorum quasi quaedam est cautela. 464ʳ

In proposito igitur trigono sphaerico latera GF, GH producta in semicirculos inteligantur GFX, GHX; eos autem semicirculos esse liquidum est, eo quod GF et GH latera magnorum orbium eiusdem sphaerae sectiones sunt.

Et quoniam GF latus notum est, ergo reliquum FX ex semicirculo cognoscitur, at angulo GFH cognito notus est etiam reliquus ex duobus rectis angulus HFX.

Iam rursus obtinemus triangulum FHX duorum laterum FH, FX notorum, quae notum comprehendunt angulum HFX. Quare per primam vel secundam inquisitionem arcus HX cognoscitur, quare et HG reliquus ex semicirculo notus est, qui perinde ac latus obtenditur angulo GFH cognito.

Igitur dati sphaerici etc.

Theorema tertium. 464ᵛ

Dati trianguli sphaerici duobus lateribus eorumque uni angulo opposito reliquum latus agnoscere.

Trianguli sphaerici FGH duo latera FG, GH sint nota. Angulus quoque GFH scitus et lateri GH oppositus, oportebit iam latus FH perspicuum efficere.

Sumatur AL similis lateri FG et LP similis GH lateri. Deinde in secundo regulamento LP rectae lineae sumatur aequalis LQ regulamento itaque super L firmato[c]) transferatur Q signum ad eum inclinatum, qui significet angulum GFH, sitque ille AQC. |

Consideramus parallelum etiam per Q punctum euntem, sitque NQO ponentes N signum in AC dimetiente, velut ante; iniciamus deinde K, N signis primum regulamentum peripheriam semicirculi ABC secans in M signo. Erit 465ʳ

a) In der Hs. fehlt P. b) Hs. hat LPQ. c) Hs. hat *formato*.

3. Man macht $GFX = GHX = 180^0$ und berechnet im Dreieck HFX die unbekannte Seite HX; $GH = 180^0 - HX$.



igitur AM sectio eiusdem peripheriae similis sectioni AQ ipsius inclinati AQC. At AQ similis est lateri FH, velut patet ex demonstratione primi theorematis. Similis igitur erit AM sectio FH lateri, sed AM sectio, quanta sit, perspicitur. Latus ergo FH in sua magnitudine notum est.

Dati igitur trianguli sphaerici duobus lateribus notis eorumque uni angulo opposito reliquum agnoscitur latus, quod oportuit ostendere.

Huius tale est exemplum:

In trigono sphaerico FGH FG quidem latus habeat gradus XLI, GH vero latus LIIII gradus, angulus GFH lateri GH oppositus gradus contineat 465v LVIII, et propo|situm sit, magnitudinem lateris FH perspicuam efficere.

Sumpta igitur AL simili gradibus XLI, quos FG latus obtinet, et LP simili ipsi FH lateri sumpta capiamus ex secundo regulamento LQ aequalem ipsi LP, eritque LP grad. LIIII lateris GH, repraesentans fere partibus XL ipsius regulamenti secundi aequalis, quo super L firmato, Q vero ad inclinatum grad. LVIII significantem traducto Q punctus locabitur in parallelo fere vicesimo nono, qui sit NQO.

Denique prima regula KN signis applicita secat circumferentiam ABC in M signo, habet itaque AM sectio grad. LXIX et semissem, quibus quoque FH latus conficitur, quod oportuit invenire. |

466r

Aliter.

In triangulo sphaerico FGH, velut ante, duo latera FG[a]) GH innotescant simul et angulus GFH.

Sit igitur AL latus, ut prius simile lateri FG. Et subinde assumatur parallelus NQO, qui contemplatione signi N secet ex omnibus inclinatis circa A portiones singulas ipsi GH lateri similes, idem autem parallelus invenitur sumpta AM sectione semicirculi ABC simili lateri GH et KM punctis applicito regulamento primo dimetientem AC secante in signo N, parallelus itaque per N signum descriptus est, qui quaeritur, videlicet NQO.

Postea si angulus GFH recto minor fuerit, eo ex gradibus LXXXX sublato[b]) reliquum computetur in peripheria JAK ab J puncto versus K numerando, ad huius itaque numeri exitum T signum ponatur | atque in secundo 466v regulamento LS sit aequalis ipsi LK et prima regula KT signis imposita et

a) Hs. hat FFG. b) Hs. hat *sublatis.*

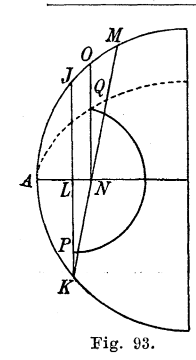


Fig. 93.

3. Theorem.

Berechnung der dritten Seite eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem gegenüberliegenden Winkel.

1. Gegeben FG, GH und $\sphericalangle GFH$ (Fig. 93). Man macht $AL =$ Projektion von $AJ = FG$ und $LP = GH$. AQC sei die dem $\sphericalangle GFH$ entsprechende Ellipse, die von dem um L mit dem Radius LP gezogenen Kreis in Q geschnitten wird. Dann zieht man NO durch Q parallel zu JL, ferner die Linien KN, die die Peripherie ABC in M schneidet; dann ist $AM \sim AQ \sim FH$.

secundo regulamento in L defixo signum S transferatur in primum regulamentum, communisque sectio ipsius LS et paralleli NQO sit Q ac ipsi LQ per subiectionem ex LK aequali LP sumpta inter curvas lineas in puncto P apparebit nobis arcus, cui similis est FH, igitur TH latus notum erit. Ergo dati trianguli sphaerici duobus lateribus nobis . . .

At ubi angulus GFH recto fuerit superior, eidem gradus LXXXX demantur, residuo in peripheria[a]) JC similis sumatur JT. Deinde, ut prius agendum est, et patebit intentum.

Velut in priori exemplo lateri FG graduum XLI similis existat AL, latus autem GH grad. LIIII et parallelus respectu K signi gradus LIIII repraesentans, scilicet NQO fere XXX, | angulus GFH gradus LVIII continens; 467r quia minor est recto, ex LXXXX, igitur gradibus auferantur gradus LVIII; reliquum sit gra. XXXII, qui ab J versus K numerati desinunt in T puncto. Est autem LS aequalis ipsi LK sumpta partium LXXVIII fere; prima igitur regula ipsis KT signis imposita et secunda in L firmata et signo S ad primam regulam traducto parallelus NQO secat secundum regulamentum velut in Q signo. Est itaque LQ partium LIII fere, quibus aequali LP sumpta ipsa repraesentat gradus LXIX et semissem fere, quantum scilicet erit latus FH, quod oportuit ostendere.

Theorema quartum.

Propositi trianguli sphaerici notis duobus lateribus cognitum angulum | comprehendentibus utrumlibet ex reliquis angulis 467v perspicuum fieri.

Sit datus trigonus sphaericus FGH duo possidens latera cognitarum magnitudinum FG, FH continentia GFH angulum quoque notum. Propositum esto angulum FGH notum quoque efficere. Igitur lateri FG similis sumatur AL portio dimetientis AC, et per modum dictum in secunda demonstratione praemissi theorematis inveniatur parallelus NQO contemplatione K signi secans ex omnibus inclinatis circa A signum portiones singulas similes ipsi FH lateri, et inclinatus AQC angulum claudens aequalem ipsi GFH angulo secet parallelum NQO super Q signo, subinde regulamentum secundum

a) Hs. hat *perisphaeria*.

Beispiel: $FG = 41^0$, $GH = 54^0$, $\sphericalangle GFH = 58^0$. Resultat: $LP = 54^0 = 40$ Tl., $AM = 69\frac{1}{2}^0$.

2. Man macht (Fig. 94) AL = Projektion von $AJ = FG$, $AM = GH$, zieht die Linie KM, die die Achse AC in N schneidet, und zieht $NO \| KJ$. Ist $\sphericalangle GFH < 90^0$, so macht man $JT = 90^0 - \sphericalangle GFH$, zieht die Linie KT, die den Kreis JSK in S schneidet. Dann schneidet LS NO in Q und es ist $LQ = LP = FH$. Entsprechend verfährt man, wenn $\sphericalangle GFH > 90^0$ ist, mit $GFH - 90^0$.

Beispiel: $FG = 41^0$, $GH = 54^0$, $\sphericalangle GFH = 58^0$. Resultate: $AN = 30$ Tl., $QL = 53$ Tl. $= 69\frac{1}{2}^0$.

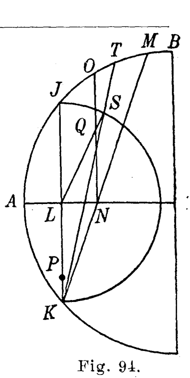


Fig. 94.

468r habens LS aequalem ipsi LK signis L, Q accommodatur | et prima regula K, S signis imposita secet peripheriam semicirculi ABC in T puncto. Quod si ad JA circumferentiam ceciderit, erit angulus FGH acutus et similis peripheriae relictae JT sectione sublata ex grad. LXXXX sectioni.

Sin autem T punctum in JC peripheriam contigerit numerus graduum JT sectione contentorum recto angulo, id est grad. LXXXX coniunctus acervabit graduum summam ipsi FGH angulo similem. Quare angulus idem rursus erit manifestus. Est enim tot graduum, quot[a]) praedicta summa constituitur.

Velut in exemplo triangulus sphaericus FGH duo possideat nota latera FG, FH. Sitque FG latus grad. XLI, FH vero grad. LXIX et semis. Haec autem angulum GFH contineant notum grad. LVIII. Oportet igitur angulum

468v FGH notum quoque effi|cere; parallelus itaque NQO contemplatione ipsius K significans grad. LXIX et semi., quos FH latus habeat, est fere XXIX et inclinatus AQC est LVIII. Nam angulus GFK ex hypothesi gradus LVIII complectitur, et ipsi LK aequalis in secundo regulamento LS partium est LXXVIII fere.

Communis autem sectio paralleli NQO, et inclinati AQC sit Q punctus, eodem itaque secundo regulamento L, Q signis applicato prior regula K, S punctis accommodata secat peripheriam JC super T signo, erit itaque arcus JT graduum fere IX, et quoniam T signum contigerit in peripheria JC, igitur angulus FGH continet gradus LXXXXIX, quod oportuit invenire.

Theorema quintum. |

469r Dati trianguli sphaerici duobus lateribus manifestis perspicuo quoque angulo notorum alteri opposito laterum angulum notis lateribus comprehensum agnoscere.

Sit datus triangulus FGH duo latera FG, FH nota continens et simul

---

a) Hs. hat *quod.*

---

4. Theorem.

Bestimmung eines Winkels eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (Fig. 94).

Gegeben: FG, FH, $\sphericalangle GFH$. Gesucht $\sphericalangle FGH$. Man macht wieder $AL =$ proj. FG, $AM = FH$, zieht die Linie AM, die AC in N schneidet, und macht $NQO \parallel KJ$; AQC entspreche dem $\sphericalangle GFH$. Dann zieht man die Linie LQ, deren Verlängerung den Kreis um L mit dem Radius LK in S schneidet. KS schneidet dann die Peripherie ABC in T und $\sphericalangle FGH = 90^0 \pm JT$.

Beispiel: $FG = 41^0$, $FH = 69\frac{1}{2}^0$, $\sphericalangle GFH = 58^0$. Resultat: $AN = 29^0$, $AQC = 58^0$, $LS = 78$ Tl., $JT = 9^0$, $FGH = 99^0$.

5. Theorem.

Bestimmung eines Winkels eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem einer Seite gegenüberliegenden Winkel (Fig. 93).

angulum FGH notum, quantus ergo[a]) sit angulus GFH, manifestum quoque iam oportebit efficere.

Sit igitur AL similis ipsi FG lateri trianguli FGH dati, parallelusque NQO secet respectu K signi circa punctum A ex ipsis inclinatis portiones singulas similes ipsi FH lateri, et circa L punctum angulus ALS similis esto FGH angulo et communis sectio ipsius secundi regulamenti LS aequalem habentis ipsi LK et paralleli NQO sit Q inclinatus, igitur per Q transiens declarabit magnitudinem anguli GFH, quem oportuit invenire.

Velut in praesenti trigono latus FG sit grad. XLI, FH vero latus | grad. LXIX et semis, et angulus FGH grad. LXXXXIX, et sit intentio nostra invenire, quantus sit angulus GFH. Sumpta itaque AL similiter ipsi FG lateri et angulo ALS aequali angulo FGH, idest gradibus LXXXXIX, et parallelus NQO respectu K repraesentet grad. LXIX et semis, quos FH latus complectitur; erit igitur communis sectio regulamenti secundi et paralleli NQO punctus Q. Inclinatus itaque per eandem sectionem veniens est LVIII, igitur angulus GFH gradus LVIII amplitudine sua complectitur, quod erat inveniendum. 469v

Theorema sextum.

Dati sphaerici trigoni cognitis duobus lateribus et angulo uni eorum opposito reliquum angulum, qui reliquo lateri obicitur, inquirere.

Sit talis triangulus sphaericus FGH, duoque | eius latera FG, FH, et angulus FGH sit notus, invenire quoque oportet, quantus sit angulus FHG. Ergo per quintum theorema pateat angulus GFH[b]) notis lateribus comprehensus, quo subinde per quartum theorema angulus GHF excutietur. 470r

Ut in exemplo superiori trigonus habeat duo latera FG, FH cognita, latus quidem FG grad. XLI, FH vero eorundem LXIX et semis, cognitus

a) Das Wort *ergo* über der Zeile mit erster Hand. b) Hs. korrigiert aus M.

Gegeben: FG, FH, $\sphericalangle FGH$. Gesucht $\sphericalangle GFH$.

Man macht wieder $AL = \text{proj.}\, FG$, $AM = FH$, zieht KNM, $NO \parallel LK$, ferner $ALS = \sphericalangle FGH$ (d. h. man macht $JT = \pm (FGH - 90^0)$, und zieht die Linie KT, die den Kreis JSK in S schneidet), zieht ferner die Linie LS, die NO in Q schneidet. Die Ellipse durch Q gibt dann den gesuchten Winkel GFH.

Beispiel: $FG = 41^0$, $FH = 69\frac{1}{2}^0$, $\sphericalangle FGH = 99^0$. Resultat: $Q = 58^0$.

6. Theorem.

Bestimmung des einer bekannten Seite gegenüberliegenden Winkels aus zwei Seiten und dem der anderen bekannten Seite gegenüberliegenden Winkel.

Gegeben: FG, FH, $\sphericalangle FGH$. Gesucht: $\sphericalangle FHG$.

Aus Theorem 5 bestimmt man den $\sphericalangle GFH$, dann aus Theorem 4 den Winkel FHG.

Beispiel: $FG = 41^0$, $FH = 69\frac{1}{2}^0$, $\sphericalangle FGH = 99^0$. Resultat: $\sphericalangle GFH = 58^0$, $\sphericalangle FHG = 54\frac{1}{2}^0$.

quoque angulus FGH esto graduum LXXXXIX, et sit intentio angulum FHG etiam liquidum reddere; per quintum theorema angulus GFH est grad. LVIII.

Igitur per quartum theorema angulus FHG erit quasi graduum XLIIII et semis, quod est intentio. Ergo dati sphaerici trigoni etc.

Theorema septimum.

470ᵛ Dati trianguli sphaerici duos ha|bentis angulos cum latere interposito notos, utrumlibet reliquorum laterum fiet perspicuum.

Rursus triangulum FGH perspicuos habeat angulos duos GFH, FGH et inter eos latus FG quoque sit manifestum. Duorum laterum igitur FH, GH utrumlibet etiam liquebit. Sumatur ergo AL similis ipsi FG, et angulus LAQ aequalis angulo GFH, angulus vero ALS aequalis angulo FGH et secundum regulamentum habeat KQS rectam lineam et communis sectio regulamenti LQS et inclinati AQC sit punctus Q.

Et quoniam angulus LAQ notus est — ex hypothesi enim aequalis angulo GFH — pari modo innotescit ALQ. Nota igitur erit sectio Q, quare 471ʳ et parallelus NQO, | quot gradibus contemplatione ipsius K puncti inserviat, innotescet. Igitur et quod existat graduum AQ portio inclinati AQC patebit. Subinde liquet latus FH, cui similis est AQ sectio, sitque LP simul ipsi LQ aequalis. Perspicuum itaque erit, quot graduum ipsa LQ habeat significationem. Atqui LQ peripheriam repraesentat similem ipsi GH lateri, ergo et latus GH clarebit. Utrumque igitur laterum FH, GH unica inquisitione manifestatum est. Ergo dati trianguli sphaerici duos etc.

Sit igitur trigonus talis FGH, habens duos angulos notos FGH, GFH, angulum quidem GFH grad. LVIII, angulum vero FGH graduum LXXXXIX, latus autem FG inter eosdem existens angulos grad. XLI. Sit ergo AL similis gradibus XLI, et ALQ angulus aequalis grad. LXXXXIX, id est angulo 471ᵛ FGH aequalis, et LAQ angulus aequalis gradibus LVIII, | quos angulos GFH complectitur, hoc est assumatur AQC inclinatus, qui sit ab AC dimetiente numero LVIII, iam Q sectio communis ipsius regulamenti LQS et inclinati AQC perspicua est et data. At per eam veniens parallelus NQO est in ordine quasi XXIX, qui collatione sui ad punctum K significat gradus fere LXIX et semis, quibus sectio AQ similis perhibetur ipsi FH lateri similis existens. Igitur latus FH erit cognitum in gradibus LXIX et semissae; rectam autem lineam LQ secundum regulamentum ostendit constare quasi partibus XL, quibus LP aequalis sumpta perhibet latus GH esse quasi graduum LIIII. Utrumque igitur latus FH, GH trianguli FGH est liquidum, quod oportebat ostendere.

---

7. Theorem.

Bestimmung der übrigen Stücke eines sphärischen Dreiecks aus einer Seite und den heiden anliegenden Winkeln

Gegeben: FG, $\sphericalangle GFH$ und $\sphericalangle FGH$. Gesucht: FH und GH (Fig. 94).

Man macht $AL = \text{proj.}\, FG$, $ALS = FGH$ (in der oben angegebenen Weise) und schneidet KST mit der dem $\sphericalangle GFH$ entsprechenden Ellipse AQC in Q. Hieraus ergeben sich die übrigen Stücke; $OQN \parallel JK$ und so weiter.

Theorema octavum.|

Trianguli sphaerici duos notos habentis angulos subtensum 472r inter eos latus cognitum reliquus quoque angulus patebit.

Sit datus sphaericus trigonus FGH duos habens notos angulos FGH, GFH, et latus FG inter eosdem protensum quoque liquidum. Dico, quod reliquus angulus FHG quoque perspicietur. Ergo per praecedens septimum theorema reliquorum laterum trigoni FGH alterum innotescat, et sit illud FH, quo cognito constituetur triangulum FGH bina possidens perspicua latera FG, FH angulum GFH liquidum etiam ex hypothesi comprehendentia.

Quare per theorema quartum angulus FHG[a]) clarus quoque prodibit. Igitur trianguli sphaerici duos notos habentis angulos FGH, GFH subtensumque inter eosdem latus FG cognitum | reliquus quoque angulus FHG 472v perspicuus est, quod oportuit ostendere.

In triangulo igitur sphaerico FGH dato angulus GFH sit graduum LVIII, angulus vero FGH grad. LXXXXIX, latus autem FG grad. XLI; iam oportet angulum FHG quoque in iisdem gradibus notificare.

Per praecedens theorema septimum latus FH gradus habet LXIX et semissae. Igitur in triangulo FGH duobus lateribus FG, FH notificatis per theorema quartum angulus FHG eorundem graduum est fere XLIII et dimidii, quod est intentum.

Corrolarium.

His octo theorematibus deinceps aperiantur multa honestissima problemata, cum in negotio ipsius geographiae, tum etiam astronomiae.

Estque in praesenti organo exquirendorum problematum modus facilis | et 473r promptus.

Si quidem cum omnia singulis tantum introitibus aut ad summum duplici discutiuntur, in ceteris vero plurima eorundem problematum triplici aut quadruplici et nonnunquam etiam quintuplici exhibentur introitu, quod studioso investigatori ob hanc inquisitionis prolixitatem stomachum facile poterit gignere atque praedictis meteoroscopiis contemptum afferre.

Verumtamen sunt nonnulla problemata, quae ex praemissis organis commodius, quam in hoc solvuntur, quae hic etiam consulto praetermittere censui.

a) Hs. hat FGH.

---

8. Theorem.

Bestimmung des dritten Winkels eines sphärischen Dreiecks aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Gegeben: $\sphericalangle FGH$, $\sphericalangle GFH$, FG. Gesucht: $\sphericalangle FHG$.

Man bestimmt nach Theorem 7 die Seite FH, dann nach Theorem 4 den $\sphericalangle FHG$.

Beispiel: $\sphericalangle GFH = 58^0$, $\sphericalangle FGH = 99^0$, $FG = 41^0$. Resultat: $FG = 69\frac{1}{2}^0$, $\sphericalangle FHG = 43\frac{1}{2}^0$.

Sed de theorematibus, quantum ad praesentis organi ingressum sufficit satis, iam ipsa problemata sunt treniter explicanda.

Principium geographicis iure tribuetur, quorum causa praesens organum 473v praecipue fuit a me excogitatum. |

Problema primum.

Exhibitis duorum locorum latitudinibus atque spatio itineris cognito longitudinis differentia perspicua prodibit.

Et quoniam duarum latitudinum complementa differentiam longitudinis complectentia, si loca illa pariter vel in septemtrionem vel in austrum vergant, iunguntur in eodem mundi polo, et eadem itineris intervallum in reliquis connectit partibus.

Igitur trigonum sphaericum ex magnorum circulorum portionibus compactum lateribus tribus exhibetur simul liquidis, ut nos angulum a duobus eorum comprehensum, videlicet differentiam longitudinis definiamus, id autem a nobis facile fiet ex primo theoremate. |

474r Sit ergo unus locorum G, alter H, iter GH, sectio magni circuli in superficie terrae polus mundi borealis F, et duarum latitudinum complementa sectiones duae circulorum magnorum FG, FH, quibus et itinere GH perspicuo angulus GFH, idest differentia longitudinum eorundem locorum G, H, per theorema primum prodibit cognita, quia iam constituitur triangulus sphaericus trium notorum laterum, et angulus a binis eorum contentus proponitur investigandus.

Ut si latitudo ipsius G loci contineat grad. XLIX; quare complementum eius, id est latus FG trigoni FGH existit grad. XLI, et locus A habeat latitudinem grad. XXX et semis, igitur eius complementum FH relinquitur graduum LXIX et semis[a]), iter autem GH comprehendat stadia 27000, quibus 474v si Ptolemaeo cre|dimus, LIIII aequantur. Ergo ex primo theoremate angulus GFH, id est quaesita longitudinum differentia, praebetur nobis fere graduum LVIII, quod oportuit investigare.

Ubi autem exhibita loca non in unam ab aequatore plagam secesserint, alterius loci latitudo quadranti, idest LXXXX gradibus, addatur, qua aggregationis summa et alterius latitudinis complemento atque itinere, ut prius, est utendum.

---

a) Hs. hat die Worte *igitur* ... bis *semis* doppelt.

Fig. 95.

1. Problem.

Bestimmung der Längendifferenz zweier Orte aus ihren Breiten und ihrem Abstand (Fig. 95).

Im sphärischen Dreieck FGH ist F der Pol, G und H die beiden Orte, $FG = 90^0 - \beta_1$, $FH = 90^0 - \beta_2$, $GH = i$, $\lambda = \sphericalangle GFH$ (Theorem 1).

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $\beta_2 = 30\frac{1}{2}{}^0$, $i = 27000$ Stadien $= 54^0$, $\lambda = 58^0$.

2. Problem.

Bestimmung des Neigungswinkels eines von zwei Orten aus ihren Breiten und ihrem Abstand.

Quoties autem in geographicis his problematibus mundi polos appello, ea terrenae superficiei puncta intelligantur, ex quibus axis mundi proveniet, ac e regione et diametrum sibi invicem obiciuntur ipsos quoque magnos circulos, in quibus spatia itineraria et latitudinis ac eorum complementa numerantur, in eadem curva telluris superficie describi.

Problema secundum.|

Cognitis duorum latitudinibus locorum atque itinere alter inclinationum angulus revelabitur. 475r

Duorum latitudines locorum F, H sint cognitae, atque eorum iter FH, et propositum esto angulum inclinationis apud F locum notum fieri, rursusque mundi polus in eadem plaga constitutus sit G, et complementum latitudinis loci F sit FG, et GH complementum ipsius loci H; iam constituto trigono sphaerico FGH notorum laterum quaeritur, quantus sit angulus GFH, quo scilicet definitur inclinatio seu diverticulum itineris FH a meridiano FG.

Est enim angulus inclinationis itineris apud alterum locorum, qui loci meridiano atque itinere apud eiusdem loci verticem iungitur.

Sit item exempli gratia F loci latitudo grad. XLIX, igitur FG eiusdem complementum erit grad. XLI et la|titudo loci H grad. XX et semis; ergo eius GH complementum grad. LXIX semis constituetur, iter autem FH stadia 27000 complectatur, quae iuxta Ptolemaei sententiam, qui singulis gradibus magni circuli quinquagena tribuit stadia, implent gradus LIIII. 475v

Ergo per primum theorema angulus itinerarii diverticuli apud F locum ferme gradus LXXXXIX sortietur, quod erat investigandum.

Ita ipsum problema fit, quando locorum latitudines in eandem aequatoris partem abierint; quando autem in diversum constituentur, tunc uni latitudinum grad. LXXXX iungantur, cum hac deinde summa et cum alterius latitudinis complemento perinde ac duarum complementis latitudinum fiat inquisitio, et patebit quaesitum.

Problema tertium.

Duorum latitudinibus locorum atque diffe|rentia longitudinum datis dimetiemur itinerarium interstitium eisdem comprehensum locis. 476r

---

Im $\triangle FGH$ ist G der Pol, F und H die beiden Orte, $GF = 90^0 - \beta_1$, $GH = 90^0 - \beta_2$, $\alpha = GFH$ (Theorem 1).

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $\beta_2 = 20\frac{1}{2}^0$, $i = 54^0$, $\alpha = 99^0$.

3. Problem.

Bestimmung des Abstandes zweier Orte aus ihren Breiten und ihrer Längendifferenz.

Im $\triangle FGH$ sind die einzelnen Stücke wie beim Problem 1. Lösung mit Theorem 2.

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $\beta_2 = 20\frac{1}{2}$, $\lambda = 58^0$, $i = 54^0$.



Sint data loca G, H, quibus latitudinum complementa sint FG, FH, subiecto videlicet F pro mundi polo, ita, ut angulus GFH sit differentia longitudinum, quibus cognitis perspicuum quoque fit GH iter per secundum theorema; constituitur enim trigonus sphaericus FGH duo latera FG, FH nota continens liquidum comprehendentia angulum GFH, idest differentiam longitudinum subiectam, et quaeritur tertium latus, idest iter GH.

Sit igitur exempli causa FG complementum graduum XLI et FH complementum grad. LXIX et semis, differentia longitudinum GFH LVIII invenietur per secundum theorema, GH iter gradus LIIII, idest stadiorum 476v 27000, | quod oportebat invenire; quod si latitudines in diversum abeant, fiat, ut ante, in secundo problemate.

Problema quartum.

Duabus latitudinibus differentiaque longitudinum itineris ab altero locorum diverticulum quantum sit, agnoscere.

Sit locorum unus G, alter H, eorumque latitudinum complementa FG, FH, differentia longitudinum GFH. Sit itaque propositum iter GH, iam intentio erit reperire, quantus sit FGH angulus, idest diverticulum itineris GH a loco G. Et quoniam iam constitutus est sphaericus trigonus FGH duo altera FG, FH possidens perspicua liquidum comprehendentia angulum 477r GFH, | idest subiectam longitudinum differentiam, et ex reliquis angulis unus quaeritur. Ergo ex theoremate quarto patebit propositum.

Sit exempli causa FG complementum latitudinis loci G grad. XLI et FH complementum latitudinis loci H grad. LXIX et semis; angulus vero GFH differentia longitudinis grad. LVIII, igitur per quartum theorema angulus FGH, qui est diverticulum itineris GH, invenitur fere grad. LXXXXIX, quod oportuit reperire; quando autem latitudines diversas aequatoris partes fuerint sortitae, observanda est praeceptio eadem in secundo problemate tradita.

Problema quintum.

Perspicuis duabus latitudinibus atque itinerario diverticulo spatium manifestabitur itineris.|

477v Sint loca duo F, H, et alter mundi polus G complementum latitudinis ipsius F loci sit FG, et GH complementum sit latitudinis ipsius H loci, et

---

4. Problem.

Bestimmung des Neigungswinkels des einen Ortes aus den Breiten und der Längendifferenz zweier Orte.

Lösung mit Theorem 4.

Beispiel: wie oben; $\alpha = 99^0$.

5. Problem.

Bestimmung des Abstandes zweier Orte aus ihren Breiten und dem einen Neigungswinkel.

Lösung mit Theorem 3.

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $\beta_2 = 46^0$, $\alpha = 58^0$, $i = 69\frac{1}{2}^0$.

GFH angulus sit diverticulum itineris FH circa F locum; quaeritur nunc FH iter. Et quia trigonus sphaericus constituitur FGH habens duo latera FG, GH liquida cum angulo GFH alteri locorum abverso, igitur per tertium theorema iter FH prodetur.

Ut si FG complementum latitudinis loci F fuerit graduum XLI, et GF complementum latitudinis H loci extiterit grad. LIIII, et diverticuli angulus GFH circa F locum comprehendat gradus LVIII, erit per idem tertium theorema iter FH ferme grad. LXIX et semis, quod erat declarandum. Hic quoque priorum problematum cautela observanda est.

Problema sextum.

Duae latitudines atque diverticulum | manifestum differentiam longitudinum notificant. 478r

Sint ergo duo loca G, H, et ipsius G complementum latitudinis sit FG, et ipsius H latitudinis complementum FH, et itineris GH diverticulum circa locum G sit FGH angulus cum duarum complementis latitudinum notus. Dico, quod GFH angulus, idest differentia longitudinum eorundem locorum, quoque innotescet.

Iam constitutus est trigonus FGH habens duo latera FG, FH cum angulo FGH alteri eorum obverso cognita.

Igitur per theorema quintum GFH angulus, idest quaesita differentia longitudinum, excutietur.

Exempli causa loci G latitudinis complementum FG sit grad. XLI et loci H complementum latitudinis sit FH graduum LXIX et semissis. Diverticulum autem itineris GH circa G locum sit angulus FGH grad. LXXXXIX; erit igitur per doctrinam theorematis quinti | angulus GFH, idest quaesita longitudinum differentia, grad. LVIII, quod oportuit investigare, neque in praesenti problematum antecedentium cautela traditur oblivioni, quoties scilicet assumptae latitudines in diversum ab aequatore abeant. 479v

Problema septimum.

Duabus locorum latitudinibus atque positionis seu diverticuli itinerarii angulo uno dato angulum positionis circa locum alterum inquirere.

---

6. Problem.

Bestimmung der Längendifferenz aus den Breiten und dem Neigungswinkel.

Lösung mit Theorem 5.

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $\beta_2 = 20\frac{1}{2}^0$, $\alpha = 99^0$, $\lambda = 58^0$.

7. Problem.

Bestimmung des zweiten Neigungswinkels aus den Breiten und dem einen Neigungswinkel.

Lösung mit Theorem 6.

Beispiel: wie das vorhergehende; $\alpha' = 43\frac{1}{2}^0$.

Sint duo loca G, H perspicuas habentia latitudines, quarum complementa sint FG, FH. Angulus autem positionis seu diverticuli itinerariique quoque FGH cognitus. Dico, quod angulus FHG alterius diverticuli itinerarii circa 479r H locum non latebit, quoniam ex hypothesi trigonus iam con|stituitur FGH duo latera FG, FH liquida continens et angulum FGH uni eorum oppositum quoque cognitum; igitur per sextum theorema dati sphaerici trigoni cognitis duobus lateribus et angulorum eorum opposito reliquus angulus, qui relicui lateri obicitur, agnoscetur. Angulus quoque FGH itinerarii diverticuli iuxta K locum innotescet.

Velut sit G loci latitudinis complementum FG grad. LXIX et semis. Angulus autem positionis FGH grad. LXXXXIX; igitur per sextum theorema alterius positionis angulus iuxta H locum erit fere grad. XLIII et semis, quod oportuit investigare.

Problema octavum.

Liquida duorum locorum unius latitudine atque itinere et longitudinum differentia perspicietur quoque positionis angulus circa cognitae latitudinis locum. |

479v Inter duo loca F, H cognitum iter sit FH et cognitae loci F latitudinis complementum sit FG et H loci latitudinis complementum esto GF, differentia vero longitudinum sit angulus FGH notus. Dico, quod diverticulnm itineris FH circa F locum, idest GFH, etiam liquebit. Cum autem G sit mundi polus, erit itaque GH sectio magni super eadem sphaera circuli complementum latitudinis loci H, aut saltem composita ex quadrante et latitudine loci H, sidus loca F, H non ad eandem aequatoris plagam situm habuerint; iam itaque constructum est triangulum sphaericum FGH duo habens latera FG, FH perspicua et FGH anguli, idest subiectam longitudinum differentiam, alteri eorundem laterum obiectam.

Igitur per quintum theorema GFH angulus, idest quaesitum itineris FH circa locum F diverticulum, patebit.

Velut in exemplo sit FG complementum latitudinis loci F grad. XLI, 480r iter FH inter duo loca F, H grad. LIIII. | Differentia autem longitudinum, idest FGH angulus, grad. LVIII. Igitur per praedictum theorema GFH angulus, idest diverticulum itineris FH circa F locum, erit grad. LXXXXIX, quod oportuit investigare.

---

8. Problem.

Bestimmung des Neigungswinkels des einen Ortes aus seiner Breite, der Längendifferenz und dem Abstand der beiden Orte.

Lösung mit Theorem 5.

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $i = 54^0$, $\lambda = 58^0$, $\alpha = 99^0$.

9. Problem.

Bestimmung der Breite eines Ortes aus der Breite des anderen Ortes, der Längendifferenz und dem Abstand der beiden Orte.

Problema nonum.

Latitudine unius loci et differentia longitudinum atque itineris intervallo patebit alterius loci latitudo.

Inter duo loca G, H itinerarium spatium GH patet, et FG complementum latitudinis loci G quoque liquidum, differentia vero longitudinum sit angulus GFH etiam perspicuus, et FH latitudinis loci H complementum, quod quaeritur. Eo namque comparato liquebit et latitudo loci H.

Et quia iam constituitur trigonus FGH, duo cognita habens latera FG, | GH et uni eorum oppositum angulum GFH quoque manifestum; igitur per tertium theorema FG complementum latitudinis loci H cognoscetur, et consequenter latitudo loci H non ignorabitur. 480v

Esto igitur FG complementum latitudinis loci G graduum XLI. Iter vero GH stadiorum 27000[a]), idest grad. LIIII. Differentia vero longitudinum, hoc est angulus GFH, graduum LVIII. Erit igitur complementum latitudinis loci H grad. LXIX min. XXX fere. Ergo et quaesita latitudo loci H est grad. XX et semis, quod oportuit investigare.

Problema decimum.

Latitudine itinere et angulo positionis apud locum cognitae latitudinis alterius loci cognoscitur latitudo. |

Duo loca sint F, H, quibus comprehensum iter sit FH notum, et latitudinis loci F complementum FG. Pateat quoque angulus autem positionis seu itineris FH diverticulum apud F locum, sit GFH etiam manifestum. Dico latitudinem loci H quoque cognosci, et quoniam constituitur iam sphaericum triangulum FGH habens duo latera FG, FH et angulum eisdem contentum GFH cognitum, igitur complementum GH loci H ex secundo theoremate quoque cognoscitur; quare tandem latitudine loci H, quod erit intentum. 481r

Sit GF complementum latitudinis loci F grad. XLI interque F, H loca comprehensum iter FH sit grad. LXIX et semis, eiusdem autem itineris circa F locum cognitae latitudinis diverticulum, videlicet angulus GFH sit grad. LVIII. Igitur per secundum theorema GH complementum latitudinis loci H erit fere grad. LIIII, quare latitudo quaesita constabit grad. XXXVI, quod oportebat quaerere.

a) Hs. hat 2700.

Lösung mit Theorem 3.
Beispiel: wie das vorhergehende.

10. Problem.

Bestimmung der Breite eines Ortes aus der Breite und dem Neigungswinkel eines anderen Ortes und dem Abstand beider Orte.

Lösung mit Theorem 2.
Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $\alpha = 58^0$, $i = 69\frac{1}{2}^0$, $\beta_2 = 36^0$.



Problema XI. |

481v Latitudine, itinere et diverticulo itineris apud locum ignotae latitudinis eadem fiet perspicua.

Sint duo loca F, G, quorum iter FG notum, et G locus cognitae sit latitudinis, cuius complementum GH, diverticulum autem itineris FG iuxta locum F quoque pateat. Dico latitudinem loci F etiam patere.

Et quoniam iam constructum est triangulum FGH duobus constans notis lateribus FG, GH, quorum uni notus opponitur angulus GFH, igitur per tertium theorema latus FH, idest complementum latitudinis loci F, innotescet, qua tandem eiusdem loci F latitudo prodetur, quae fuit exhibenda.

Sid iter FG duobus locis F, G comprehensum grad. XLI, complementum latitudinis loci G grad. LIIII, diverticulum itineris FG iuxta F locum, idest 482r angulus GFH, grad. LVIII. Igitur ex tertio theo|remate FH complementum invenietur fere grad. LXIX et semis. Quare eisdem de quadrante sublatis relinquitur quaesita latitudo grad. XX et dimidii, quod fuit prodendum.

Problema XII.

Latitudine, itinere et diverticulo eiusdem apud locum cognitae latitudinis iuxta locum quoque reliquum ipsius itineris agnoscetur positio.

Sit duobus comprehensum locis iter FG liquidum, et loci F latitudo cognita, cuius complementum FH et iuxta F locum itineris FG positio, idest angulus GFH notus. Dico et reliquum itineris FG iuxta G locum positionem fieri manifestum.

Et quoniam constitutum est sphaericum triangulum FGH duo possidens 482v ex hypothesi perspicua latera FG, FH li|quidum comprehendentia angulum GFH, igitur per quartum theorema angulus quoque FGH manifestus exhibebitur, quod erat quaerendum.

Sit duobus F, G locis determinatum iter FG grad. XLI et FH complementum latitudinis loci F contineat grad. LXIX et semis, FG autem itineris diverticulum, idest angulus GFH, sit grad. LVIII. Igitur per idem quartum theorema reliqua itineris FG positis circa G locum, idest angulus FGH, erit grad. LXXXXIX fere, quod erat inveniendum.

---

11. Problem.

Bestimmung der Breite eines Ortes aus seinem Neigungswinkel, der Breite des anderen Ortes und dem gegenseitigen Abstand.

Lösung mit Theorem 3.

Beispiel: $i = 41^0$, $\beta_1 = 36^0$, $\alpha = 58^0$, $\beta_2 = 20\frac{1}{2}^0$.

12. Problem.

Bestimmung des Neigungswinkels eines Ortes aus der Breite und dem Neigungswinkel des anderen Ortes und der gegenseitigen Entfernung.

Lösung mit Theorem 4.

Beispiel: wie das vorhergehende; $\alpha = 99^0$.

Problema XIII.

Cognito itinere et positionum eius duarum angulis alterius liquebit latitudo loci.

Duobis locis F, G conclusum iter esto FG notum et huius apud eadem loca duae positiones | sint duo anguli GFH, FGH quoque manifesti. Dico utriusque locorum F, G latitudinem perspicuam fieri. 483r

Sit igitur intentio loci F latitudinem inprimis aperire, cuius complementum GH.

Et quoniam iam exhibitum est triangulum duos habens angulos GFH, FGH cum latere inter eos FG perspicuo, igitur per septimum theorema latus FH, idest complementum latitudinis loci F, manifestum erit, quo tandem quaesita[a]) latitudo innotescet. Duobus itaque locis F, G contentum iter FG sit gradus XLI, et eius diverticulum in F quidem loco sit grad. LVIII, apud G vero grad. LXXXXIX; ergo per idem theorema septimum latus FH, idest complementum latitudinis loci F, erit fere grad. LXIX et semis. Quare ipsius loci F latitudo quaesitae erit graduum fere XX et dimidii, quod fuit investigandum.

Problema XIIII.

Duobus diverticulis et itinere perspi|cuo longitudinum differentia manifestabitur. 483v

Pateat ergo iter FG duobus comprehensum locis F, G et eiusdem duo diverticula seu duarum positionum anguli GFH, FGH. Dico, eorundem quoque locorum F, G differentiam longitudinum FHG liquidam fieri. Et quia constructum est triangulum FGH duos habens angulos GFH, FGH et latus FG inter eos notum, igitur per octavum theorema angulus FHG reliquus, id est investigata longitudinum differentia, liquebit.

Sit ergo iter FG grad. XLI, angulus seu diverticulum GFH grad. LVIII, alterum vero diverticulum, idest angulus FGH, grad. LXXXXIX.

Igitur per idem octavum theorema differentia longitudinum FGH erit fere graduum XLIII et dimidii, quod erat reperiendum. |

a) Nach *quaesita* hat Hs. das Wort *erit* gestrichen.

---

13. Problem.

Bestimmung der Breiten zweier Orte aus ihren Neigungswinkeln und dem gegenseitigen Abstand.

Lösung mit Theorem 7.
Beispiel: wie das vorhergehende.

14. Problem.

Bestimmung der Längendifferenz aus den beiden Neigungswinkeln und dem Abstand.

Lösung mit Theorem 8.
Beispiel: wie das vorhergehende; $\lambda = 43\frac{1}{2}^0$.

484r

Problema XV.

Itinere duabusque diverticulis eius utralibet latitudinum patebit.

Duobus ergo locis *F*, *G* intercipiatur iter notum *F*, *G* suaque cognita retinens utraque diverticula *FGH*, *GFH*. Dico latitudinem utriusque locorum *F*, *G* quoque notam fieri.

Sit autem intentio latitudinem loci *F* elucubrare, cuius latitudinis complementum sit *FH*.

Rursusque intelligatur constructum triangulum sphaericum *FGH* tenens duos angulos *FGH*, *GFH* et inter eos *FG* latus notum. Igitur per septimum theorema *FH* complementum innotescet, quo deinde quaesita *F* loci latitudo clarebit, quod oportuit invenire.

Velut itinere *FG* existente grad. XLI, cuius unum diverticulum iuxta *F* locum sit angulus *GFH* grad. LVIII, alterum vero ad locum *G* sit | angulus *FGH* grad. LXXXXIX. Igitur per eiusdem theorema septimum *FH* complementum latitudinis loci *F* comperietur grad. LXIX et semis, qui ex LXXXX sublati relinquunt investigatam latitudinem grad. XX et semis, quam oportuit invenire. (484v)

Problema XVI.

Itinere duobusque diverticulis longitudinum innotescet differentia.

Duoque itaque loca *F*, *G* notum teneant iter *FG* et notos positionis angulos utriusque *GFH*, *FGH*. Dico, quod eorundem locorum *FG* longitudinum diversitas fiet manifesta, sitque illa angulus *FHG*.

Igitur constructo trigono *FGH* sphaerico duos angulos *GFH*, *FGH* et notum inter eos *FG* latus habente per octavum theorema liquebit reliquus angulus *FHG*, idest explorata longitudinum diversitas.

Velut si *FG* itineris lon|gitudo fuerit grad. XLI, cuius apud *F* locum positio, idest angulus *GFH*, grad. LVIII, reliqua positio ad *G* locum angulus, scilicet *FGH*, grad. LXXXXIX. Veniet igitur angulus *FHG*, idest quaesita longitudinum diversitas, per idem octavum theorema grad. XLIII[a]) et semis, quod oportuit invenire. (485r)

---

a) Hs. hat *XLIIII*.

---

15. Problem.

Bestimmung der Breiten aus den beiden Neigungswinkeln und dem Abstand.

Lösung mit Theorem 7.

Beispiel: wie das vorhergehende; $\beta_2 = 20\frac{1}{2}^0$.

16. Problem.

Die Aufgabe ist identisch mit Problem 14.

Problema XVII et geographicum.

Perspicua longitudinum differentia anguloque positionis eius loci, cuius latitudo cognoscitur, alterius quoque patescet loci latitudo.

Sint duo loca G, H, quibus intersit GH, habens ad G locum notae positionis, angulum FGH, ipsiusque loci G latitudo sit cognita, cuius complementum FG et angulus GFH esto pro|posita longitudinum diversitas, et FH 485ᵛ complementum latitudinis loci H. Dico, quod eiusdem loci H latitudo nota etiam fiet.

Et quoniam iam constitutum est triangulum sphaericum duos notos ex hypothesi habens angulos GFH, FGH et inter eos latus FG, igitur per septimum theorema cognoscetur latus FH, hoc est complementum latitudinis loci H, quo deinde quaesita loci H latitudo non ignorabitur.

Velut si FG complementum latitudinis loci G sit grad. XLI, et diverticulum FGH grad. LXXXXIX; longitudinumque differentia GFH grad. LVIII. Igitur per septimum idem theorema FH complementum latitudinis loci H erit grad. LXIX et dimidii, qui de LXXXX sublati relinquunt investigatam latitudinem loci H graduum XX et semis, quod oportuit explorare.

Quod si arcus FH quadrante maior inveniatur, ipsi gradibus LXXXX detractis reliquum erit quaesita latitudo ad alteram aequatoris partem numerata. |

Etsi plura geographica supersint disciplinae problemata, consulto tamen 486ʳ ea praeterivi, quoniam ex antecedentibus meteoroscopiis longe congruentius, quam ex praesenti, possint explanari.

Igitur quicumque eorum habuerit opus, illic eadem agnoscet.

Problema XVIII.

Elevatione poli, solis declinatione et altitudine data, horam diei cognoscere.

His itaque tribus manifestis perspicientur quoque complementa tria, elevationis polaris scilicet, altitudinis solis et eius declinationis. Haec autem complementa tria sphaericum constituunt triangulum trium notorum laterum. Igitur per primum theorema complementis duobus regionariae, videlicet latitudinis et declinationis solis | complexus angulus, idest solaris recessus a 486ᵛ

---

17. (Geographisches) Problem.

Bestimmung der Breite eines Ortes aus der Längendifferenz, dem Neigungswinkel und der Breite des anderen Ortes.

Lösung mit Theorem 7.

Beispiel: $\beta_1 = 49^0$, $\alpha = 99^0$, $\lambda = 58^0$, $\beta_2 = 20\frac{1}{2}^0$.

18. Problem (1. astronomisches).

Bestimmung der Tageszeit aus Polhöhe, Deklination und Höhe der Sonne.

meridiano iuxta aequatoris tempora, hoc est gradus innotescet, quo quidem recessu diei hora non ignorabitur, undecumque horarum computus inchoetur.

Velut si fuerit intentio horam diei reperire in regione, cui poli elevatio sive ipsius latitudo sit graduum XLIX, sitque solis altitudo supra eiusdem regionis horizontem graduum XXXVI et solis declinatio grad. XX min. XX.

His itaque datis seu cognitis eorum quoque complementa sunt perspicua. Ergo polaris elevationis complementum sit arcus FG, et est grad. XLI, solaris altitudinis complementum esto portio GH grad. LIIII, et complementum declinationis, idest grad. LXIX min. XL, sit FH.

Triangulo igitur sphaerico ex tribus notis lateribus iam constructo per primum theorema patebit angulus GFH in gradibus LVIII fere, quantus scilicet est quaesitus solis a meridiano datae regionis recessus iuxta aequatoris tempora, quod oportuit invenire. |

487r

Problema XIX et astronomicum secundum.

Latitudine regionis et solari declinatione altitudineque solis a meridiano recessum iuxta gradus finitoris invenire.

Hunc solis a meridiano recessum astronomorum vulgo iuxta Chaldaeorum Arabumve sermonis idioma nunc inolevit azimut appellari. Ergo posterius eiusdem solis recessus verticalem solis angulum aut distantiam a meridiano horizontalem nuncupare decrevi, quod is circa verticem constituatur.

Sit igitur F mundi vertex seu polus aquilonius, FG sectio meridiani similis complemento regionariae latitudinis, et portio FH similis complemento solaris declinationis, et his FG, FH sectionibus | notis ex hypothesi angulus quoque liquidus continetur GFH; ipse namque ex hypothesi iuxta horam datam solis distantia est a meridiano, et quaeritur angulus FGH, angulus solis videlicet verticalis. Igitur iam construitur triangulum sphaericum FGH dua possidens cognita latera FG, FH, perspicuum quae complectantur angulum GFH.

487v

Ergo per quartum theorema angulus FGH, idest quaesitus circa finitoris verticem solis angulus, innotescet.

Velut in regione latitudinis grad. XLIX sole declinationem habente grad. XX min. XXX et a meridiano distantiam horarum III min. LII, idest grad. LVIII. Si praemissus solis circa verticem angulus investigetur, erit ergo FG complementum regionariae latitudinis grad. XLI, et FH complementum solaris declinationis grad. LXIX min. XXX, et angulus GFH solis a meridiano iuxta

---

Lösung mit Theorem 1.

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $h = 36^0$, $\delta = 20^0 20'$, $t = 58'$.

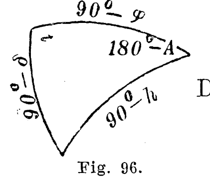


Fig. 96.

19. Problem (2. astronomisches).

Bestimmung des Azimuts der Sonne auf Polhöhe, Deklination und Höhe (Azimut = 180° — Vertikaldistanz).

Lösung mit Theorem 4.

Beispiel: wie das vorhergehende; $v = 99^0$.

subiecta horarum momenta | grad. LVIII. Igitur angulus FGH, solis videlicet verticalis, per quartum theorema invenietur fere grad. LXXXXIX, quod oportuit investigare. 488r

Problema XX et astronomicum tertium.

Altitudine solis et declinatione horaque diei verticalis angulus ipsius solis elucescet.

Id per antecedentia meteoroscopia solvetur apertius. Poterit idem nihilominus et per praesens explicari.

Sit mundi vertex septemtrionalis G, finitoris autem vertex H, solaris altitudinis complementum sectio FH. Eiusdem denique complementum declinationis sit sectio FG, et GH meridiani portio complementum regionariae latitudinis.

Et quia iam | extat sphaericus triangulus FGH duo ex hypothesi continens nota latera FH, FG atque angulum FGH oppositum lateri FH, igitur per sextum theorema FHG angulus solis verticalis prodetur. 488v

Velut altitudine solis grad. quidem XXXVI, declinatione vero grad. XX min. XXX, et distantia solis a meridiano, idest angulo FGH, iuxta subiectum tempus grad. LVIII, idest horas III min. LII; erit igitur FG solaris altitudinis complementum graduum LIIII, et complementum declinationis FG grad. LXIX min. XXX.

Igitur per sextum theorema angulus FHG circa finitoris verticem reperitur grad. LXXXXIX, quod oportebat exhibere.

Problema XXI et astronomicum quartum.

Solis et altitudine et declinatione horaque diei regionis latitudinem cognoscemus.

Sit G mundi polus, H finitoris vertex et F solis centrum; igitur ex definitione et praesenti hypo|thesi sectio FG erit complementum solaris declinationis et HF eiusdem complementum altitudinis, denique FGH angulus tempus exprimit, quo sol a meridiano recedit, et quaeritur GH meridiani portio, idest complementum latitudinis regionariae. 489r

Et quia construitur triangulum sphaericum FGH duo possidens latera FG, FH et angulum FGH notum FH lateri patenti oppositum. Igitur ex theoremate tertio latus HG liquidum prodibit complementum subter elevationis polaris.

---

20. Problem (3. astronomisches).

Bestimmung des Azimuts der Sonne aus Höhe, Deklination und Tageszeit (Stundenwinkel).

Lösung mit Theorem 6. Beispiel: wie das vorhergehende.

21. Problem (4. astronomisches).

Bestimmung der Polhöhe aus Höhe, Deklination und Stundenwinkel der Sonne.

Lösung mit Theorem 3.

Velut si latus FG complementum declinationis existat grad. LXIX min. XXX et solaris altitudinis complementum FH grad. LIIII, distantiaque solis a meridiano iuxta datum tempus, idest angulus FGH, grad. LVIII seu horarum III min. LII.

Igitur per idem theorema tertium HG latus, idest complementum quaesitae latitudinis regionariae, manifestum erit in grad. XLI fere, quo ex grad. LXXXX sublato ipsius regionis latitudo relinquitur grad. XLIX, quod oportuit invenire.

490r Idem quoque de | quibuscumque stellis datis earum supra horizontem altitudine et declinatione atque horis, quibus a meridiano disteterit, pari ratione comparabimus.

Problema XXII et astronomicum quintum.[a])

Regionis latitudine et declinatione horaque diei, solis supra finitorem qualiter altitudo prodeat.

Esto polus mundi sublimis F, et complementum regionariae latitudinis FG, solaris autem declinationis complementum esto FH, et GH com|plementum solaris elevationis supra finitorem subiectum, et GFH angulus indicat horarium solis a meridiano recessum.

Et quia iam constituitur trigonus sphaericus FGH habens duo latera FG, FH cognita, et angulum GFH ab eis comprehensum, igitur per secundum theorema latus GH angulus GFH subiectum innotescet, ipsum autem est complementum quaesitae solaris altitudinis.

Igitur regionis latitudine et declinatione solis horaque diei solis altitudo supra finitorem prodita est, quod oportuit ostendere.

Velut in hoc exemplo sit FG regionariae latitudinis complementum grad. XLI, et FH complementum solaris declinationis grad. LXIX et semis, et horarius solis a meridiano recessus grad. LVIII, qui scilicet determinat angulum GFH, erit itaque GH complementum quaesitae elevationis grad. prope LIIII, quibus ex grad. LXXXX detractis desiderata solis altitudo supra datum finitorem relinquitur grad. XXXVI, quae fuit investiganda. |

490v

Problema XXIII et astronomicum sextum.

Regionis latitudine et declinatione solis atque hora diurna angulum solis verticalem invenire quo pacto deceat.

a) Vor dem Wort *quintum* hat Hs. das Wort *quartum* gestrichen, und nach *quintum* die folgenden Worte (vgl. Probl. XXI): *Solis et altitudine et declinatione horaque diei regionis, latitudinem cognoscemus. Sit G mundi polus H finitoris vertex.*

---

22. Problem (5. astronomisches).

Bestimmung der Sonnenhöhe aus Polhöhe, Deklination und Stundenwinkel.

Lösung mit Theorem 2. Beispiel: wie das vorhergehende.

23. Problem (6. astronomisches).

Bestimmung des Azimuts aus Polhöhe, Deklination und Stundenwinkel.

Esto rursus mundi polus sublimis F, complementum solaris declinationis FH et reliqua, ut in praecedenti problemate subiciantur.

Ergo per quartum theorema in trigono sphaerico FGH continente duo latera FG, FH cognita et angulum GFH ab eis comprehensum, angulus HGF perspicuus erit, quo ex semicirculo sublato reliquum solis alter est a meridiano verticalis recessus. Ergo in regionis latitudine et declinatione solis, ut supra.

Velut si FH solaris declinationis | complementum fuerit grad. LXIX et semis et complementum regionariae latitudinis FG grad. XLI et horarius solis a meridiano recessus, angulus scilicet GFH, grad. LVIII. Igitur per quartum theorema angulus HGF, idest horizontalis solis a meridiano remotio, prope constabit grad. LXXXXIX. 491ʳ

Quod si reliquum eius verticalem desideras, subtractes grad. LXXXXIX ex semicirculo; remanebit residuus angulus verticalis grad. LXXXI, quod oportuit invenire.

Problema XXIIII et astronomicum septimum.

Altitudine polari et declinatione solis eiusque horizontali a meridiano distantia solaris super datum finitorem elevatio manifestabitur. |

Esto mundi polus arcticus F, complementum datae regionariae latitudinis FH, et GH complementum solaris elevationis supra horizontem subiectae regionis. 491ᵛ

Et quia ex hypothesi constitutus est trigonus FGH habens duo latera GFH nota et angulum FHG, igitur per tertium theorema HG latus liquebit. Id autem est complementum solaris ad definitorem elevationis, quae quaerebatur. Ergo altitudine polari et declinatione solis eiusque horizontali a meridiano distantia etc.

Velut si FG complementum declinationis solaris fuerit grad. LXIX et semis, et complementum regionariae latitudinis FH grad. XLI, et horizontalis a meridiano distantia, idest angulus FHG, grad. LXXXXIX, erit igitur per dictum theorema tertium latus HG, idest complementum elevationis quaesitae, graduum prope LIIII.

Quare et ipsa solaris ad horizontem suppositum elevatio graduum XXXVI, quod oportuit reperire. |

Problema XXV et astronomicum octavum. 492ʳ

Elevatione polari et declinatione solis ipsiusque a meridiano distantia horizontali hora diei declarabit.

Lösung mit Theorem 4.
Beispiel: wie das vorhergehende; $A = 81^0$.

24. Problem (7. astronomisches).

Bestimmung der Sonnenhöhe aus Polhöhe, Deklination und Azimut.

Lösung mit Theorem 3.
Beispiel: wie das vorhergehende.



Sit rursus mundi vertex supernus F, complementum[a]) FH, angulus solis verticalis FGH.

Et quoniam nunc exstat triangulus habens duo latera GF, FH[b]) nota et FGH angulum ex hypothesi, igitur per quintum theorema notis comprehensus lateribus angulus GFH, idest horarius solis a meridiano recessus, patebit. Ergo elevatione polari et declinatione solis ipsiusque a meridiano distantia horizontali hora diei declarabitur.

Ut si FG complementum regionariae latitudinis fuerit grad. XLI, et FH complementum solaris declinationis grad. LXIX et semis, angulus autem FGH 492v verticalis grad. LXXXXIX, | erit per quintum theorema angulus GFH, idest horarius solis a meridiano recessus, grad. fere LVIII, quod oportuit invenire.

Problema XXVI et astronomicum IX.[c])

Latitudine regionis et solis altitudine horaque diei angulus solis verticalis patebit.

493r Polus mundi superior esto G, polaris elevatio|nis complementum FG et complementum altitudinis solis ad subiectum finitorem sit FH, horarius solis a meridiano recessus FGH angulus.

Et quoniam completum est triangulum sphaerale duo perspicua possidens latera ex hypothesi FG, FH et alteri eorum angulum obversum FGH, igitur per quintum theorema angulus GFH liquebit, idest quaesita solis a meridiano distantia horizontalis; ergo latitudine regionis et solis altitudine horaque diei angulus solis verticalis patebit.

Ut si FG complementum polaris elevationis sit grad. XLI, FH complementum solaris elevationis grad. LIIII et horarius solis a meridiano recessus FGH grad. LVIII, erit per quintum theorema angulus GFH grad. LXXXXIX, idest quaesita solis a meridiano distantia, quam oportuit invenire. |

---

a) Hier fehlt *declinationis*. b) Hs. hat GFH.
c) In der Hs. steht Problema XXVI nach XXVII, wie es aus den Folienangaben am Rande ersichtlich ist; durch die Buchstaben a und b wird aber die richtige Reihenfolge angegeben.

---

25. Problem (8. astronomisches).

Bestimmung des Stundenwinkels aus Polhöhe, Deklination und Azimut.

Lösung mit Theorem 5.
Beispiel: wie das vorhergehende.

26. Problem (9. astronomisches).

Bestimmung des Azimuts aus Polhöhe, Sonnenhöhe und Stundenwinkel.

Lösung mit Theorem 5.
Beispiel: wie das vorhergehende.

Problema XXVII et astronomicum X.

493v

Elevatione polari solisque verticali angulo et horaria ipsius a meridiano distantia supra finitorem subiectum eius altitudo reperitur.

Esto borealis mundi vertex G, complementum polaris elevationis FG, horaria solis a meridiano remotio angulus FGH, at horizontalis eius ab eodem meridiano distantia angulus GFH.

Completo itaque trigono FGH duos habens angulos notos FGH, HFG, et inter eosdem collocatum latus FG; igitur per septimum theorema latus FH liquebit, complementum scilicet quaesitae solis altitu|dinis. Ergo elevatione 494r polari solisque verticali angulo et horaria ipsius a meridiano distantia ad horizontem subiectam ipsius quoque altitudo reperitur, quod oportuit ostendere.

Ut si regionariae latitudinis complementum FG fuerit graduum XLI et horarius solis a meridiano recessus FGH angulus grad. LVIII, horizontalis vero GFH angulus grad. LXXXXIX, igitur per septimum theorema latus FH, idest complementum solis supra finitorem altitudinis, grad. LIIII fere prodibit, quod oportuit investigare.

Problema XXVIII et astronomicum undecimum.

Latitudine regionis et solis altitudine ipsiusque a meridiano distantia verticali horam perspiciemus diurnam.

Manentibus praecedentis problematis subiectionibus et hypothesibus completoque trigono sphaerico possidente latera duo FG, FH cognita et angulum eis comprehensum GFH, per quartum igitur theorema reliquus angulus FGH, idest horarius solis a meridiano recessus, prodetur; ergo latitudine regionis et solis altitudine etc., quod oportuit indicare.

Velut si complementum | polaris elevationis fuerit grad. XLI et altitu- 494v dinis solaris complementum grad. LIIII, angulus autem verticalis solis FGH grad. LXXXXIX, igitur per[a]) quartum theorema horarius solis a meridiano abscessus invenietur prope grad. LVIII, quod fuit perscrutandum.

a) Hs. hat *pre* statt *per*.

---

27. Problem (10. astronomisches).

Bestimmung der Sonnenhöhe aus Polhöhe, Azimut und Stundenwinkel.

Lösung mit Theorem 7.
Beispiel: wie das vorhergehende.

28. Problem (11. astronomisches).

Bestimmung des Stundenwinkels aus Polhöhe, Sonnenhöhe und Azimut.

Lösung mit Theorem 4.
Beispiel: wie das vorhergehende.



Problema XXIX et astronomicum XII.

Solari declinatione atque polari elevatione ortus ipsius amplitudo reperitur.

Esto polus mundi superius G, complementum solaris declinationis GH, ita, ut H indicet finitoris signum, in quo sol oritur, GF sit subiectae latitudo 495r regionis et HF complementum ortivae am|plitudinis.

Et quia constitutum est triangulum duo habens nota latera GF, GH et angulum GFH uni eorum oppositum — etenim rectus est — igitur per tertium theorema reliquum latus FH patet, quo sublato ex grad. LXXXX relinquitur ipsa solaris ortus amplitudo. Igitur solari declinatione atque polari elevatione ortus ipsius amplitudo reperta est, quod oportuit ostendere.

Velut si elevatio poli arctici fuerit grad. XLIX, idest latus GF, et complementum declinationis solaris grad. LXVI et semis, invenietur per tertium theorema latus HF grad. LII min. XX, quibus ex circuli quadrante detractis remanent gradus XXXVII min. XL, quaesita videlicet solaris ortus amplitudo, quae desiderabatur ab initio.

Problema XXX et astronomicum XIII. |

495v Solari declinatione ipsiusque ortus amplitudine regionis aperietur latitudo.

Esto nunc mundi polus H sublimis, latitudo regionis HF et complementum solaris declinationis HG atque ortivae amplitudinis complementum GF.

Et quia ex hypothesi constituitur trigonus FGH bina possidens latera FG, FH[a]) cognita, et angulum GFH — rectus enim est —, ergo per theorema tertium latus HF, idest regionis latitudo, prodibit cognita, igitur solari declinatione ipsiusque ortus amplitudine etc. quod decebat palam facere.

Velut si complementum HG subiectae declinationis fuerit grad. LXVI min. XXXI et ortivae amplitudinis GF complementum grad. LII min. XX, liquebit per theorema tertium regionis latitudo HG prope grad. XLIX, quod erat manifestandum.

a) Hs. hat FGH.

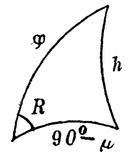


Fig. 97.

29. Problem (12. astronomisches).

Bestimmung der Morgenweite aus Deklination und Polhöhe (Fig. 97).

Lösung mit Theorem 3.

Beispiel: $\varphi = 49^0$, $\delta = 33\frac{1}{2}^0$, $\mu = 37^0\,40'$.

30. Problem (13. astronomisches).

Bestimmung der Polhöhe aus Deklination und Morgenweite der Sonne.

Lösung mit Theorem 3.

Beispiel: wie das vorhergehende.

Wörterbuch.

abunde	im Überfluß
acceleratio	Beschleunigung
accervare	aufhäufen, anhäufen
accervatio	Anhäufung
acrimonia	Schärfe, übertr. Lebhaftigkeit, Energie
adaptare	anpassen
adminiculum	Stütze, Hilfsmittel
aequiparare	gleichstellen
apparitio	Erscheinung
applicare	heranbringen
aquarius	Wassermann (St.)
area	Fläche, Ebene
assertio	Behauptung
asser	Stange, Latte
astare	dabeistehen
atramentum	Schwärze, Tinte
aucupari	vogelstellen, übertr. Jagd machen, haschen
autumare	meinen, glauben
biduum	zwei Tage lang
bifariam	zweifach, doppelt
brumalis	zum Winter (-solstitium) gehörig
calamus	Rohr, Fruchthalm, Stengel
capricornus	Steinbock
cautiuncula	Demin. v. cautio Vorsicht
celare	verhehlen
circinus	Zirkel
circumgerere	herumtragen
claviculus	Demin. v. clavus
clavus	Nagel
coacervare	aufhäufen
coartare	zusammendrängen
cognomentum	Beiname, Name
commentum	Lüge, Erfindung
computus	Rechnung
conflare	zusammenblasen, zusammenbringen
conicus	kegelförmig
connectere	zusammenknüpfen
consulto	nach Überlegung
contegere	bedecken, verwahren
conterminus	angrenzend, benachbart
conterraneus	Landsmann
correlarium	= corollarium Zusatz
crepusculum	Dämmerung
culmus	Halm
cunabula	Lagerstätte, Wiege
cuspis	Stachel, Spitze
delitescere	sich verbergen
denominatio	uneigentliche Benennung
deprehendere	wahrnehmen
dimetiri	ausmessen
discolor	verschiedenfarbig, unähnlich
distendere	ausdehnen
diversificare	unterscheiden
dumtaxat	nur insofern, höchstens
duplare	verdoppeln
eclipsis	Ausbleiben, e. solis Sonnenfinsternis
efflagitare	dringend verlangen
elicere	herauslocken, ermitteln
elucubratio	Ausarbeitung
emergere	auftauchen, z. Vorschein kommen
enodare	entknoten, deutlich erklären
erraticus	umherirrend
examussim	genau, vollkommen
exarare	ausackern, übertr. aufzeichnen
fallacia	Betrügerei, Täuschung
finitor	Horizont
flagitare	fordern
foramen	Öffnung, Loch
foris	Tür, Eingang
fulcire	stützen, befestigen
genitura	Geburt, Geburtsurkunde
gignere	zeugen, hervorbringen
gyrare	herumdrehen
hallucinari	träumen
hebes	stumpf
hucusque	bis hierher
illico	daselbst, sogleich
incassum	zwecklos
indagare	aufsuchen
indulgere	nachgiebig sein, nachgeben
infigere	anheften
infitiari	leugnen
innotescere	bekannt werden

inolescere anwachsen
inscitia Unverstand, Unwissenheit
intercalare einschalten
intercapedo Unterbrechung
interstitium Zwischenraum
introitus Eingang, Vorspiel
investigator Erforscher
itentidem wiederholt, immer wieder

lambere lecken, streifen
leuca = leuga gallische Meile (lieue)
longiusculus ziemlich
luculentus recht hell, ansehnlich

mediare halbieren
mediatio Mitte
minium Bergzinnober
mutilus verstümmelt

novenarius aus neun bestehend
nuncupare nennen, benennen

oberrare hin und her irren
oblivio Vergessen
obserare verriegeln
obtundere abstumpfen
obvertere sich hinwenden
occiduus untergehend
occultatio Verbergen
orbita Wagengeleis, Bahn
organum Instrument, Werkzeug

palam offen, bekannt
palpatio Betastung
pariformis gleichförmig
parilis gleich, gleichförmig
partiliter teilweise
peculiaris eigentümlich
peritia Erfahrung
permutatim umgekehrt
perstringere streifen
plaga Gegend, Distrikt
platice im allgemeinen
prolixus reichlich

ratiocinari rechnen, überlegen
regula, regulamentum } Lineal
relicuus = reliquus
rimari zerspalten, durchforschen

saphea Grenzkreis
schema Figur
sciothericon σκιοθηρικόν, Sonnenuhr
scriptoreus Schreibrohr
scrutari durchforschen
scrutinium Durchsuchung
serotinus spät
signifer Tierkreis
significator Bezeichner
stomachus Schlund, übertr. Ärger
strictitudo Knappheit
subtendere darunter sich ausdehnen
subter unterhalb
subtexere anweben, anschließen
subtus unten
succingere ausstatten
succinctim kurz
succinctus fertig, bereit
suffultus v. suffulcire unterstützen
summatim den Hauptsachen nach
supervacaneus überflüssig
supputatio Ausrechnung

taciturnitas Schweigen
tarditas Langsamkeit
taxare ermitteln
tenuere vermindern
teres gedreht, gerundet
tingere bestreichen
transilire überspringen, überschreiten
transversus querliegend
trepidatio Unruhe
trifariam dreifach

umbilicus Nabel, Mittelpunkt
ad unguem bis aufs Haar
usurpare handhaben

verbositas Weitläufigkeit, Geschwätzigkeit
vicinia Nachbarschaft
vicissim wiederum; dagegen
vindicare in Anspruch nehmen
virgula Rute, Stab
volubilis drehbar

Berichtigung.

Infolge eines Versehens sind einige Fehler in der Numerierung der Seiten der Handschrift stehen geblieben:

Von S. 49 bis 54 müssen stets *r* und *v* vertauscht werden; S. 55 Z. 15 gehört 248ᵛ an den Rand; von S. 55 bis 60 ist ebenfalls *r* und *v* zu vertauschen; von S. 60 bis 64 muß es heißen: 254ᵛ, 255ᵛ, ... 258ᵛ statt 255ᵛ, 256ᵛ, ... 259ᵛ.



LEONHARD EULER

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR · XXV. HEFT

FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DES 200. GEBURTSTAGES
LEONHARD EULERS

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER

BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

MIT 2 BILDNISSEN EULERS

BTG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907



Vorrede.

Um den zweihundertsten Geburtstag LEONHARD EULERS zu feiern, hat die Berliner Mathematische Gesellschaft am 15. April 1907 in dem großen Auditorium des Physikalischen Instituts der hiesigen Universität eine Festsitzung veranstaltet. Drei Mitglieder der Gesellschaft waren eingeladen worden, die Festreden zu übernehmen. Herr VALENTIN sprach über EULERS Aufenthalt in Berlin, Herr KNESER über EULERS Bedeutung für die Variationsrechnung und Herr FRITZ KÖTTER über EULERS Forschungen auf dem Gebiete des Kreiselproblems. Die beiden erstgenannten Vorträge gelangen hier zum Abdruck. Hinzugekommen sind noch zwei Abhandlungen aus der Feder der Herren FELIX MÜLLER und E. LAMPE.

Außerdem sind zwei Bildnisse des Baseler Mathematikers beigegeben. Das Titelbild ist eine Reproduktion des von A. LORGNA (1787) verfertigten Portraits, während das andere von DARBES (1782) herrühren soll. Jenes ist wohl am wenigsten bekannt geworden, dieses soll nach dem Ausspruch des älteren FUSS am ähnlichsten sein.

Es ist uns eine angenehme Pflicht, der Verlagsbuchhandlung für ihr Entgegenkommen auf unsere mannigfachen Wünsche wie die der Autoren den besten Dank auszusprechen.

Der Vorstand der Berliner Mathematischen Gesellschaft:

P. SCHAFHEITLIN.

E. JAHNKE. C. FÄRBER.

Inhalt.

LEONHARD EULER IN BERLIN

VON

G. VALENTIN

IN BERLIN

Es ist mir die ehrenvolle Aufforderung geworden, bei der heutigen Gedächtnisfeier Ihnen aus EULERS Leben einiges mitzuteilen. Ich werde mich im wesentlichen auf die Zeit von EULERS Aufenthalt in Berlin beschränken, in der Hoffnung, daß bei einer Feier, welche die Berliner Mathematische Gesellschaft hier in Berlin veranstaltet, dies das meiste Interesse bei Ihnen erregen wird. Ich werde ferner nur auf die äußeren Lebensumstände eingehen, denn eine Würdigung der wissenschaftlichen Tätigkeit eines der größten Mathematiker aller Zeiten, der nicht nur auf allen Gebieten der reinen Mathematik, sondern auch in der Physik, Mechanik, Astronomie, Ballistik, Schiffahrtskunde so hervorragende Leistungen aufzuweisen hat, würde meiner Meinung nach die Kräfte eines einzelnen übersteigen und so viel Stunden in Anspruch nehmen, wie mir Minuten für diesen Vortrag eingeräumt sind.

EULER, zu Basel geboren, verlebte seine Jugend in Riehen in der Schweiz, wohin der Vater bald nach des Sohnes Geburt als Pfarrer übersiedelte. Erst 14jährig bezog er die Universität Basel, um auf Wunsch des Vaters Theologie zu studieren, während seine Neigung ihn zur Mathematik und Philosophie zog. Schon 1723 erhielt er die Magisterwürde und bald darauf die Erlaubnis des Vaters, sich ganz der Mathematik zu widmen. So setzte er die bereits unter JOHANN BERNOULLI begonnenen Studien mit solchem Eifer fort, daß ihm schon 1727 die Stelle eines Adjunkts für das mathematische Fach an der von KATHARINA I. 1725 begründeten Akademie der Wissenschaften zu Petersburg übertragen wurde. Unter ungünstigen Umständen überschritt EULER am 17. Mai 1727 die Grenzen Rußlands, denn an diesem Tage starb KATHARINA I. und ihr Nachfolger PETER II. war den rein wissenschaftlichen Bestrebungen einer Akademie so abhold, daß man eine Aufhebung derselben befürchtete. EULER sah sich deshalb genötigt, als Schiffsleutnant in den russischen Flottendienst zu treten, bis mit

ANNAS I. Regierungsantritt im Februar 1730 wieder günstigere Zeiten für die Wissenschaften in Rußland kamen. EULER verließ die Flotte, als ihm nach JACOB HERMANNS Abreise von Petersburg 1730 die dadurch freigewordene Professur der Physik übertragen wurde und nach DANIEL BERNOULLIS Rückkehr in die Schweiz (1733) erhielt er die Stelle eines Mitgliedes der Akademie der Wissenschaften. ANNA I. starb am 28. Oktober 1740 und damit begannen von neuem unruhige Zeiten in Rußland, die erst mit der Thronbesteigung der Kaiserin ELISABETH am 16. Dezember 1741 ihr Ende erreichten. Die Zustände müssen wenig erfreulich gewesen sein, so daß die Unterhandlungen, die FRIEDRICH DER GROSSE wegen EULERS Berufung nach Berlin einleiten ließ, auf günstigen Boden bei EULER fielen.

Am 31. Mai 1740 starb König FRIEDRICH WILHELM I. von Preußen und FRIEDRICH II. bestieg den Thron. Bereits am 14. Juni 1740 forderte FRIEDRICH II. den außerordentlichen Gesandten des sächsischen Hofes in Petersburg, ULRICH FRIEDRICH VON SUHM, mit dem er in regstem Briefwechsel stand, auf, sein Möglichstes zu tun, um EULER, „grand algèbriste“ für Berlin zu gewinnen und wenn möglich gleich mitzubringen. Er stellt ihm ein Gehalt von 1000—1200 Talern in Aussicht und wiederholt seinen Wunsch in einem Briefe vom 15. Juli 1740.[1]) Es spricht für den Weltruf, den EULER damals schon genoß, daß FRIEDRICH II., der im allgemeinen für die Mathematik nicht viel übrig hatte, schon wenige Tage nach seinem Regierungsantritt einen wissenschaftlich so hochstehenden Mann für seine Hauptstadt zu gewinnen suchte. Ob SUHM mit EULER über FRIEDRICHS Anerbieten überhaupt verhandelt hat, wissen wir nicht, der veröffentlichte Briefwechsel des preußischen Königs mit dem sächsischen Gesandten, welcher mit SUHMS Tode im November 1740 schließt, erhält keine Antwort SUHMS auf des Königs Wünsche. Aber FRIEDRICH II. ließ den Gedanken nicht fallen, sondern eröffnete durch seinen eigenen Gesandten VON MARDEFELD[2]) direkte Unterhandlungen mit EULER, die schließlich zu dem von dem König erhofften Resultat führten. In einem Briefe vom 4. September 1741 aus dem Lager von Reichenbach (erster schlesischer Krieg) drückte FRIEDRICH DER GROSSE EULER seine Befriedigung darüber aus und forderte ihn auf, falls er noch irgend etwas wünsche, des Königs Rückkehr nach Berlin abzuwarten.[3]) EULERS Gehalt betrug 1600 Taler,

1) *Oeuvres de* FRÉDÉRIC LE GRAND. T. 16. (1858) p. 391, 394.
2) *Lobrede auf L.* EULER von NICOLAUS FUSS. Basel 1786. p. 38.
3) *Oeuvres.* T. 20. (1852) p. 199.

eine Summe, der in Rücksicht auf den damaligen Kaufwert des Geldes mindestens 15000 Mark der Jetztzeit entsprechen würde.

Euler traf am 25. Juli 1741 in Berlin ein. Nach dem Adreß-Calender der Kgl. Haupt-Stadt Berlin für 1742 und 1743 wohnte er in diesen Jahren „auf der Neustadt bey der Potsdamschen Brücke in dem Barbonessischen Hause". Die jetzige Dorotheenstadt hieß damals Neustadt. Sie wurde von der Friedrichstadt durch eine Mauer und einen Graben getrennt, die längs den Hinterhäusern der Südseite der Straße „Unter den Linden" liefen. Im Zuge der Friedrichstraße führte eine Brücke über den Graben, die Potsdamsche Brücke. In dieser Gegend also hat Eulers erste Berliner Wohnung gelegen, genaueres aber habe ich auf dem Grundbuchamt darüber nicht auffinden können. Dagegen ist es mir gelungen, die Lage seiner zweiten Berliner Wohnung, über die die Adreß-Calender von 1743—1766 sagen: „L. Euler wohnt in der Bärenstraße in seinem eigenen Hause", genau zu identifizieren. Es ist das jetzige Haus Nr. 21 der Behrenstraße, an welchem durch die Bemühungen des früheren Vorsitzenden der Berliner mathematischen Gesellschaft voraussichtlich im nächsten Jahre eine Gedenktafel von den städtischen Behörden angebracht werden wird. Es war ein großes Terrain, das Euler gehörte, denn der dazu gehörige Garten umfaßte noch das Grundstück der jetzigen Nr. 20 und dehnte sich bis zur Französischen Straße aus. Er hat es von einer Mlle. Mirabel für 2000 Reichstaler gekauft und dazu vom König das Privilegium eines Freihauses erhalten (Brief an Goldbach vom 27. Oktober 1742). Außerdem besaß Euler später auch noch ein Landgut in Charlottenburg, das 1760, als die vereinigten Österreicher und Russen mehrere Tage lang Berlin besetzt hatten, „rein ausgeplündert wurde", wahrscheinlich von sächsischen Soldaten, die in Charlottenburg damals arg hausten.

Eine amtliche Tätigkeit vermochte Euler nach seiner Ankunft in Berlin zunächst nicht auszufüllen. Bekanntlich fand die unter dem Kurfürsten Friedrich III., dem späteren König Friedrich I. 1700 gegründete Societät der Wissenschaften bei seinem Nachfolger, dem Soldatenkönig Friedrich Wilhelm I. keine Unterstützung. Zwar achtete dieser die Wissenschaften, sofern sie praktisch nützten, wie Medizin und Chemie vollauf, für die abstrakten Zweige aber, wie Philologie, Mathematik usw. fehlte ihm das Verständnis, und er stand nicht an, die Vertreter dieser lächerlich zu machen und schonungslos zu behandeln, ja gebrauchte in einer Verfügung vom 31. Oktober 1731 an die Akademie den Ausdruck „vor die sämtliche Königl. Narren". Es ist kein Wunder, daß das wissenschaftliche Niveau der Akademie-

Mitglieder so immer tiefer sank, da der König kein Interesse hatte, wissenschaftliche Kapazitäten zu berufen und durch Ernennung z. B. von Fassmann und Gundling, den rohen Spaßmachern des Tabakskollegiums, zu Societätsmitgliedern nur seiner Verhöhnung der Societät neuen Ausdruck gab.

Friedrich der Grosse trug sich bei seinem Regierungsantritt mit dem Gedanken einer Reorganisation der Akademie und bereits am 4. Juni 1740 forderte er einen Bericht über die Fonds und die Einrichtung der Societät ein. Allein seine darauf bezüglichen Pläne mußte er bei dem Ausbruch des ersten schlesischen Krieges zurückstellen. So blieb Euler zunächst ohne amtliche Tätigkeit, denn ihm war bei seiner Berufung die Reorganisation der Akademie zugesagt und an diese neu zu reorganisierende war er eigentlich berufen und nicht an die alte Societät. Trotzdem enthält der letzte Band der Miscellanea der alten Societät, welchen sie Friedrich II. bei seiner Rückkehr aus dem ersten schlesischen Kriege überreichen konnte, fünf Abhandlungen von Euler. Er unterrichtete ferner 1742 die Söhne der Herzogin von Württemberg, einer Beschützerin und Freundin des Marquis d'Argens, mit dem sie im Winter 1741/42 nach Berlin kam, in Mathematik und Physik, wozu ihm Friedrich der Grosse unter dem 1. März 1742 aus Znaym die Erlaubnis erteilte,[1]) „weilen ich hier noch keine Vorgesetzte habe, und diese Occupation ohne Erlaubnis nicht wohl über mich nehmen konnte, so habe deswegen directe an Ihro Königl. Majestät nach der Armée geschrieben", wie Euler in einem Brief an Goldbach[2]) schreibt. Daneben gingen andere Arbeiten für die Petersburger Akademie, auch beschäftigte ihn die von der Pariser Akademie gestellte Preisfrage „Sur la meilleure manière d'observer l'inclinaison de l'aiguille aimantée". Auch für Einsendung der Beantwortung dieser nach Paris erbat und erhielt er im Januar 1743 Friedrichs des Grossen Erlaubnis.[3]) Die in Paris erhaltenen Preise müssen eine nicht unbedeutende Einnahme für Euler gewesen sein; auf eine Anfrage Goldbachs antwortet Euler unter dem 3. April 1753, daß er in Paris 7 mal den Preis davon getragen habe[4]), und bewarb er sich mal nicht um einen Preis, so war ihm das Glück in anderer Weise hold, wie aus einem anderen Brief an Goldbach vom 12. April 1749 her-

1) *Oeuvres.* T. 20. p. 199.

2) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle* publ. par P. H. Fuss. St. Petersbourg. T. 1 (1843) p. 118.

3) *Oeuvres.* T. 20. p. 202.

4) *Correspondance* p. 608.

vorgeht: „In meinen Umständen ist seit der Zeit nichts veränderliches vorgefallen, als daß ich dieser Tage in einer Lotterie 600 Rthlr. gewonnen, welches also ebensogut ist, als wenn ich dieses Jahr einen Pariser Preis gewonnen hätte.“[1])

Doch kehren wir zum Jahre 1743 zurück. Offenbar fühlte sich EULER in seiner immer noch unsicheren Stellung nicht wohl, daher drängte es ihn, den König an die Reorganisation der Akademie zu erinnern. Die Haupteinnahmen der Akademie bestanden in dem Ertrag, welchen der der Akademie vorbehaltene Kalenderverkauf in den königlich preußischen Staaten brachte. EULER schrieb daher unter dem 19. Januar 1743 an den König, daß nach der Einverleibung Schlesiens die Einkünfte von dem Kalendervertrieb so groß geworden seien, daß sie fast ausreichen würden, um eine Akademie der Wissenschaften, ähnlich wie die Pariser und die Petersburger, zu unterhalten.[2]) Darauf bestätigt ihm der König schon nach zwei Tagen den Empfang seines Schreibens und fährt dann fort: „Mais je crois que, étant accoutumé aux abstractions des grandeurs de l'algèbre, vous avez péché contre les règles ordinaires du calcul. Sans cela vous n'auriez pas pu vous imaginer un si grand revenue du débit des almanachs en Silésie.“[3]) Umgehend antwortet EULER, daß ihn nur der lebhafte Wunsch, sich endlich der Gnade, mit der der König ihn überhäuft habe, würdig zeigen zu können, zu seinem Vorschlage bewogen habe.[4]) FRIEDRICH DER GROSSE aber kam nicht mehr darauf zurück, für ihn war der Plan der Reorganisation noch nicht genügend ausgereift oder besser, es fehlte ihm noch die nach seiner Meinung dazu nötige Persönlichkeit eines Präsidenten. Dieser Stillstand in der Reorganisation der Akademie veranlaßte nun den Feldmarschall VON SCHMETTAU und den Staatsminister VON BORCKE, einen Kreis von gebildeten und für die Wissenschaften begeisterten, hochgestellten Personen, Diplomaten, Militärs und Gelehrte, zu denen auch EULER gehörte, zu einer zwanglosen, wissenschaftlich-literarischen Gesellschaft zu vereinigen. Sie hielt vom 1. August 1743 bis zum 16. Januar 1744 im ganzen 21 Sitzungen am Donnerstag nachmittag ab, in denen unter anderen EULER über mechanische Probleme vortrug und astronomische Mitteilungen machte.[5]) Die Mitglieder glaubten in dieser Vereinigung schon die neue Akademie zu sehen und deshalb bat EULER in einem

1) *Correspondance* p. 497. 2) *Oeuvres* p. 199. 3) ib. p. 200.
4) ib. p. 201.
5) *Geschichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, bearbeitet von ADOLF HARNACK. Berlin. Bd. 1, 1. (1900) p. 264 ff.

Schreiben vom 19. Oktober 1743 den König, ihm die versprochenen 300 Taler für Umzugskosten von Petersburg nach Berlin auszahlen zu lassen, da er der Société littéraire sein „peu de savoir“ zur Verfügung gestellt habe und sich bemühen würde, auch fernerhin seine ganze Kraft der neuen Gesellschaft zu widmen. Das Geld habe er nötig, um sein neues Haus zu bezahlen.[1])

Die Gründung dieser Société littéraire brachte nun wirklich auch die Reorganisation der Akademie von neuem in Fluß. Der Minister von Viereck und der Graf Schmettau berichteten an den König, ersterer, daß Euler von der mathematischen Klasse der alten Societät zum Direktor dieser Klasse vorgeschlagen sei, letzterer, daß Euler erklärt habe, diese Stelle nur annehmen zu wollen, wenn die alte Societät mit der neuen Société vereinigt werde, und Schmettau macht weiter den Vorschlag, eine Kommission zur Regelung der Angelegenheiten einzusetzen. Diesen Vorschlag genehmigt der König und nach eingehenden Verhandlungen einigt sich endlich die Kommission über die Verschmelzung der beiden Societäten, so daß die neue Akademie bereits am Geburtstag des Königs am 24. Januar 1744 ihre erste Sitzung halten konnte.[2]) Euler wurde Direktor der mathematischen Klasse derselben und bekleidete diese Stelle bis zu seiner zweiten Übersiedlung nach Petersburg im Frühjahr 1766; sein Nachfolger als Mitglied wie auch als Direktor der mathematischen Klasse wurde Lagrange.

Die Stätten der amtlichen Tätigkeit Eulers waren folgende: Die alte Societät tagte bis zu ihrer Verschmelzung mit der neuen in dem Observatorium in der Dorotheenstraße, dessen Turm gegenüber der heutigen Universitätsbibliothek wohl noch viele von Ihnen dort gesehen haben werden; die neue Société in einem Saal des Königlichen Schlosses, in dem die neue Akademie bis zum Mai 1752 ebenfalls ihre Sitzungen abhielt. Im Juni dieses Jahres bezog die Akademie das uns allen bekannte Gebäude unter den Linden, in dem sie über 150 Jahre getagt hat. Dieser Teil des sogenannten Königlichen Stalles war 1742 niedergebrannt, wurde von 1745 an auf Befehl des Königs vom Baumeister Bouman neu aufgeführt und nach seiner Vollendung der Akademie der Wissenschaften und der der Künste überwiesen.[3])

Eulers Aufenthalt in Berlin zeichnete sich nicht durch bedeutende persönliche Ereignisse aus. Zwar erlebte er während des 7jährigen

1) *Oeuvres* p. 202. 2) Harnack p. 269 ff.

3) Fr. Nicolai, *Beschreibung der Königlichen Residenzstädte Berlin und Potsdam* 3. Aufl. Berlin. Bd. 1. (1786) p. 172.

Krieges eine zweimalige Besetzung der Stadt durch den Feind. Am 16. Oktober 1757 erschien der österreichische General HADDICK mit einem Streifkorps vor den Toren Berlins, das er am 17. besetzte, aber schon am gleichen Tage vor dem anrückenden Fürsten von Anhalt räumte, die preußische Hauptstadt nur durch eine nicht sehr hohe Kontribution schädigend. Ob EULER irgend wie durch diese kurze Besetzung der Stadt persönlich belästigt oder geschädigt wurde, wissen wir nicht; in seinen Briefen an GOLDBACH und MAUPERTUIS erwähnt er ihrer nicht. Ernster war dagegen die Besetzung der Hauptstadt durch die Russen unter TOTLEBEN und TSCHERNITSCHEFF vom 7.—12. Oktober 1760. Es fanden Plünderungen statt, trotzdem der General TOTLEBEN strengste Disziplin übte. Auf GOTZKOWSKYS Rat stellte er den reichen und wohlhabenden Bürgern Wachen, damit die zahlungsfähigen Bürger geschützt würden für die Aufbringung der der Stadt auferlegten Kontribution. Ob EULER aus diesem Grunde ebenfalls eine Schutzwache vor seinem Hause erhielt, oder ob es sich um eine Maßregel handelte, die der russische General ergriff, um den berühmten Pensionär der Petersburger Akademie zu ehren und persönlich vor Verlusten zu schützen, bleibe dahingestellt. Jedenfalls bewilligte ihm TSCHERNITSCHEFF aus letzterem Grunde für sein Charlottenburger Landgut eine solche Wache, leider aber zu spät, denn die sächsischen Soldaten hatten es bereits, wie schon vorhin gesagt, „rein ausgeplündert".

Abgesehen aber von diesen beiden Ereignissen verlief EULERS Leben in Berlin ruhig, so daß er sich mit gewohntem Fleiß und Eifer seinen wissenschaftlichen Arbeiten hingeben konnte. Zwar durchlebte er die drei schlesischen Kriege in der Hauptstadt, doch wurde diese nur durch die eben erwähnten zwei kurzen Besetzungen direkt berührt und der gesellige und wissenschaftliche Verkehr fand kaum Unterbrechung; ja in den 11 Friedensjahren zwischen dem zweiten schlesischen und dem 7jährigen Kriege entwickelte sich in wissenschaftlicher Beziehung eine Blütezeit, wie sie Berlin noch nicht gekannt hatte. Der König selbst, VOLTAIRE, MAUPERTUIS, FORMEY, D'ARGENS, SULZER, MARGGRAF, ACHARD, POTT, GLEDITSCH und wie sie alle heißen, jeder trug seinen Teil dazu bei, die Aufklärung dem Norden Deutschlands zu bringen und die Wissenschaften, die sich bisher nur an die Gelehrten gewandt hatten, zu einem Gemeingute zu machen, das sich allen Gebildeten erschloß, weil es in allgemein verständlicher Form vorgetragen wurde.

EULERS und MAUPERTUIS' Bemühungen in dieser Richtung liegen besonders darin, daß sie der Philosophie NEWTONS gegenüber der LEIBNIZschen Monadenlehre und dem Dogmatismus CHRISTIAN VON

Wolffs zum Siege verhelfen wollten. Seit 1744 stellte die Berliner Akademie, gleichwie die Pariser und die Petersburger, Preisaufgaben, die sogleich das allgemeinste Interesse in der ganzen wissenschaftlichen Welt, auch dem Auslande, fanden. Die 1745 für das Jahr 1747 gestellte Aufgabe lautete: Darstellung und Kritik der Monadenlehre. Dies Thema erregte die wissenschaftlichen Kreise in hohem Maße. In mehreren Broschüren wurde für oder gegen die Monadenlehre Stellung genommen. Euler selbst trat in seinen anonym erschienenen Considérations sur les élémens des corps gegen die Leibnizsche Philosophie auf[1]) und Christian von Wolff suchte gegen diese Schrift für sich und Leibniz auf Maupertuis selbst in mehreren Briefen einzuwirken, in denen es nicht an Ausfällen gegen Euler fehlte.[2]) Er selbst halte Euler für den Verfasser, andere freilich könnten sich nicht „un pareil manque de réflexion chez Euler“ vorstellen. Er erkenne aber darin Eulers Gier nach Herrschaft und er ziehe den Blick (*βλεψιν*) eines Leibniz in die Metaphysik und Philosophie der Tiefe eines Euler vor.[3]) Es war gewiß nicht klug und geschickt, daß Euler einer Preisfrage der Akademie gegenüber, noch ehe diese den Preis erteilt hatte, so prononziert Stellung nahm. Freilich konnte er bei der Veröffentlichung seiner Schrift nicht wissen, daß die Akademie die Frage so ernst nehmen würde, daß sie die Entscheidung über die eingegangenen Arbeiten nicht der philosophischen Klasse allein überlassen wollte, sondern eine eigene Kommission aus allen vier Klassen dafür einsetzte. Zu ihr gehörte auch Euler. Die Entscheidung fiel gegen die Monadenlehre aus, indem der Advokat Justi in Sangerhausen unter 30 Mitbewerbern den Preis erhielt. Unparteiisch war diese Entscheidung nicht, wie Euler selbst später anerkannt hat, aber die Gegensätze waren damals zu stark, als daß eine vermittelnde Entscheidung möglich gewesen wäre. Seinen ganzen Ärger über diese Entscheidung und gegen Euler und Maupertuis läßt Wolff in einem Schreiben an Schumacher in Petersburg vom 6. Mai 1748 los: „Herr Euler, der seinen wohlverdienten Ruhm in der höheren Mathematik genießen könnte, will nun mit Macht in allen Wissenschaften dominieren, darauf er sich doch niemalen gelegt, und da es ihm sowohl an den ersten Gründen, als an Belesenheit fehlet, die zu einer historischen Erkenntnis erfordert wird: wodurch er sowohl seinem eigenen Ruhme sehr schadet, indem wenige sind, die von dem ihm gebührenden Ruhm einen Begriff

1) Harnack p. 402 ff.

2) Vergl. auch *Correspondance* p. 423.

3) *Maupertuis et ses correspondants.* Par A. Le Sueur. Paris 1897 p. 426 ff.

haben, als auch die Akademie die Wissenschaften zu Berlin in viele Schande bringet, wovon der durch ihn erregte Monadenstreit eine klare Probe ableget, zumal da er einen hochmüthigen und verwegenen, dabei unverschämten Rabulisten, Namens JUSTI, zu seinem Werkzeug erkieset und das Interesse der Akademie aus Mangel der Klugheit seinen Affecten aufopfert. Es ist aber ein Unglück, daß der Herr Präsident MAUPERTUIS ein Franzose ist, der weder Deutsch kann, noch den Zustand der Gelehrten in Deutschland kennt, hingegen in andere als mathematische Sachen nicht mehr als Herr EULER besitzet, wiewohl er von mehrerer Klugheit und Politesse als Herr EULER ist und diesen besser würde im Zaume halten, wenn er nur die deutschen Schriften lesen könnte und von dem Zustande der Gelehrten in Deutschland genugsame Kenntnisse hätte."[1])

Noch in einem zweiten wissenschaftlichen Streit spielte EULER eine ausschlaggebende Rolle, in dem bekannten Streit zwischen MAUPERTUIS und SAMUEL KÖNIG.[2]) Ich kann hier nicht den ganzen Streit wiedererzählen, es genüge zu sagen, daß MAUPERTUIS am 13. April 1752 den förmlichen Antrag stellte, die Akademie solle ein Urteil abgeben über die Echtheit des LEIBNIZschen Briefes an JAC. HERMANN, vom Jahre 1707, in welchem nach KÖNIGS Meinung schon das Principe de la moindre action enthalten sei, dessen Entdeckung MAUPERTUIS sich selbst zuschrieb. MAUPERTUIS' Einfluß auf die Akademie war ein so gewaltiger, daß sie sich seinem Verlangen fügte. EULER war von der Unechtheit des LEIBNIZschen Briefes, der nur abschriftlich in KÖNIGS Händen war, und dessen Original er trotz eifrigster Nachforschung nicht hatte beibringen können, überzeugt.[3]) Auf diese Autorität hin erklärte die Akademie einstimmig, der von KÖNIG mitgeteilte Brief LEIBNIZ' sei gefälscht „ou pour faire tort à M. DE MAUPERTUIS, ou pour exagérer les louanges de LEIBNIZ". SULZER schrieb über diese Stellungnahme EULERS am 10. November 1752 an KÜNZLI: „Ich glaube zwar wohl, daß MAUPERTUIS sich für den Erfinder der Sache hält, aber daß EULER die Sache so embrouilliert und die vollkommene Identität der beiden Sachen nicht einsehen will, wundert mich. Denn er gibt sich alle Mühe von der Welt, eben das, was LEIBNIZ entdeckt hat, unter anderen Begriffen als neu vorzutragen. Überhaupt, so groß er in der Mathesi ist, so ein schlechter Philosoph ist er."[4])

1) *Briefe von* CHRISTIAN WOLFF, hrsg. von der Petersburger Akademie. St. Petersburg 1860 p. 142.

2) HARNACK p. 331 ff. 3) LE SUEUR p. 144 f. 4) HARNACK p. 338.

Zu EULERS Auffassung in diesem Streit trug unzweifelhaft seine ganze Stellungnahme gegen LEIBNIZ und dessen Philosophie viel bei, und es ist bedauerlich, bei einem so bedeutenden Gelehrten die Objektivität des Urteils durch vorgefaßte Meinungen beeinflußt zu sehen. Zweitens aber wurde sein Urteil wohl auch durch seine außerordentliche Verehrung und Wertschätzung für MAUPERTUIS mitbestimmt. Die Verehrung, welche EULER für MAUPERTUIS hegte, geht deutlich aus den Briefen hervor, die er vom 3. September 1757 bis 9. Juni 1759 an MAUPERTUIS richtete.[1]) Dieser hatte 1756 Berlin seiner Gesundheit wegen verlassen und EULER war mit der Vertretung MAUPERTUIS' als Präsidenten der Akademie betraut worden. Es berührt höchst angenehm, mit welcher Teilnahme sich EULER in jedem Brief nach MAUPERTUIS' Befinden erkundigt, wie erfreut er sich über jede bessere Nachricht über dessen Gesundheitszustand zeigt und wie eingehend er MAUPERTUIS über alles, was die Akademie und die Berliner Zustände betrifft, unterrichtet. Aus diesen Briefen geht außerdem hervor, mit wie regem Interesse EULER die wechselvollen Ereignisse des 7jährigen Krieges verfolgte, mit welcher Sorge ihn die Niederlagen seines Königs erfüllten und mit welcher Freude er über günstige Nachrichten vom Kriegsschauplatz berichtet.

EULER war unzweifelhaft unter seinen Kollegen das hervorragendste Mitglied der Akademie; seinen berechtigten Ruhm in der Mathematik erkennen alle an, auch die ihm nicht sehr wohlgesinnten, wie z. B. WOLFF und SULZER, sie wenden sich nur gegen ihn, wenn er das Gebiet seiner Wissenschaft verläßt und sich mit Philosophie beschäftigt. Der einzige, der EULERS Bedeutsamkeit nicht erkannte, oder nicht erkennen konnte oder wollte, war FRIEDRICH II. Dies beruht wohl im wesentlichen auf dreierlei; zunächst auf dem Mangel an Verständnis für Mathematik und dem Vorurteil, das der König diesem Zweige der Wissenschaft entgegenbrachte und auf deren Vertreter übertrug; dann darauf, daß EULER die Gabe der leichten, witzigen, geistreichen französischen Art der Unterhaltung, die FRIEDRICH an einem VOLTAIRE, MAUPERTUIS, D'ARGENS und vielen anderen so hoch schätzte und selbst so meisterhaft ausübte, nicht besaß, und endlich darauf, daß EULER, wie es scheint, für die Poesie, das Lieblingsgebiet des Königs, nur geringes Interesse hegte.

Diese drei Punkte möchte ich durch einige Beispiele belegen. Als EULER aus Petersburg nach Berlin kam, war er in der Unterhaltung

---

1) LE SUEUR p. 146 ff.

ein stiller, vorsichtiger Mann, das hatten ihn die russischen Zustände gelehrt. Denn als er bald nach seiner Übersiedelung, im August 1741, der Königin Mutter vorgestellt war und wenige Tage darauf zur Tafel zu ihr befohlen wurde, blieb EULER, trotzdem sie ihm sehr gnädig und liebenswürdig entgegenkam, äußerst einsilbig. Darüber von der Königin Mutter zur Rede gestellt, antwortete er: „Majestät, ich komme aus einem Lande, wo man gehängt wird, wenn man spricht."[1]) Anders beurteilt EULERS Unterhaltung BÜSCHING, als er ihn auf seiner Reise nach Berlin 1749 persönlich kennen lernte: „LEONHARD EULER ist nicht, wie die großen Algebraisten zu sein pflegen, ein finsterer Kopf und im Umgang beschwerlicher Mann, sondern munter und lebhaft (insonders unter Bekannten) und obgleich sein verlorenes rechtes Auge etwas ekelhaft aussiehet, so gewöhnt man sich doch bald daran und findet sein Gesicht angenehm."[2]) Aber dies war das Urteil eines deutschen Gelehrten über die Unterhaltungsgabe des Gelehrten EULER. Wieder anders urteilt ein Franzose. Der Marquis D'ARGENS berichtet unter dem 15. August 1747 an FRIEDRICH DEN GROSSEN über seinen Besuch bei Monsieur DE MAIRAN in Paris, dessen Unterhaltungsgabe er mit der EULERS vergleicht: „ Il y'a autant de différence de sa conversation à celle de Monsieur EULER, qu'il y en a entre les écrits d'Horace et ceux du savantissime et pédantissime WOLFFIUS."[3]) Und dies entsprach gewiß des Königs Ansicht über EULERS Unterhaltung: sie war zwar savantissime, allein Mathematik verstand er nicht, aber auch zugleich nach Meinung des Königs des Gegenstandes wegen pédantissime, und das war ihm ein Greuel.

EULERS Interesselosigkeit für die Poesie verspottet der König zweimal. In seinen Réflexions sur les réflexions des géomètres sur la poésie (gegen D'ALEMBERT) kommt die Stelle vor: „Un certain géomètre qui a perdu un oeil en calculant, s'avisa de composer un menuet par a plus b.[4]) Si on l'avait joué devant le spectacle D'APOLLON, le pauvre géomètre courait risque d'être écorché vif comme MARSYAS."[5]) und aus seinem Épitre an den Theaterintendanten E. M. SWEERTS stammen die Verse:

---

1) HARNACK p. 257.

2) *Beiträge zu der Lebensgeschichte denkwürdiger Personen.* Th. 6 (1789) p. 138 ff.

3) *Oeuvres* T. 19 (1852). p. 19.

4) In einem Wettstreit mit dem Kapellmeister GRAUN.

5) ib. T. 9 (1848) p. 64. — Neue Berlinische Monatsschrift, hrsg. von BIESTER. Bd. 1 (1799) p. 211 ff.

„Vous savez qu'au spectacle un certain fils d'Euklide
S'avisa d'égayer son cerveau trop avide;
Sans entendre, sans voir et même sans parler,
Il se mit, en révant, d'abord à calculer
Les effets de la voix, l'espèce de la salle,
Le théâtre, l'optique et le grand cintre ovale;
Cela fait, ne trouvant rien de touchant par lui,
Et se sentant glacé de dégoût et d'ennui,
Sans qu'il eût vu finir un acte (est-il croyable?)
Il sortit brusquement, donnant le tout au diable."[1])

Diesen Versen liegt gewiß etwas Tatsächliches zugrunde; uns beweist es nur, daß auch im Theater Euler seinen mathematischen Problemen nachging, und Theater Theater sein ließ, um einen neuen Gedanken rechnerisch zu Hause festzulegen; Friedrich dem Grossen aber fehlte dafür das Verständnis und erhöhte nur sein Vorurteil gegen die Geometer und Algebraisten im allgemeinen und Euler im speziellen, den er auch gelegentlich in einem Brief an Voltaire spottend „un gros cyclope de géomètre" nennt.[2])

So wenig richtiges Verständnis Friedrich der Grosse für die wissenschaftliche Bedeutung eines Euler hatte, ebensowenig besaß er es für Lambert, der noch zu Eulers Zeiten nach Berlin berufen wurde, und für Lagrange, der Eulers Nachfolger wurde. Beide zog er nach Berlin, weil D'Alembert ihm dazu geraten hatte, über Lambert aber gibt er in einem Brief an D'Alembert seinen Gefühlen ungeniert Ausdruck. Er schreibt über Lambert, der sich allerdings bei seiner ersten Audienz recht wunderbar benommen zu haben scheint, er sei „un Caraibe, ou quelque sauvage des côtes de la Cafrèrie. Cependant, jusqu'à Monsieur Euler, toute l'Académie est à genoux devant lui." D'Alembert antwortet darauf dem König, wenn Euler vor Lambert auf den Knieen läge, so sei das töricht, denn Euler sei viel bedeutender; Lambert stehe, um sich mathematisch auszudrücken, zu Euler in einem Verhältnis wie Descartes und Newton zu Bayle, „nach Ansicht Eurer Majestät", oder wie Bayle zu Descartes und Newton, „nach Ansicht eines Geometers Eurer Bekanntschaft", aber jedenfalls gebühre ihm ein ehrenvoller Platz.

Und über Lagrange berichtet der Marchese Lucchesini in seinem Tagebuch vom 19. Juli 1782: „Da er (der König) nichts von Mathematik versteht, fällt es ihm schwer, den Vertretern dieser Wissenschaft

1) *Oeuvres* T. 10 (1849) p. 169. 2) ib. T. 19 (1849) p. 128.

großen Ruf zuzusprechen. Es macht ihm wenig Kummer, EULER abgehen zu sehen“ (daß dies nicht richtig ist, werden wir noch später hören); „und das Verdienst von LAGRANGE schlägt er nicht eben hoch an.“[1])

Andererseits nennt aber FRIEDRICH DER GROSSE auch an einer Stelle seiner Histoire de mon temps EULER eine Zierde der Akademie[2]) und erteilte ihm häufiger unmittelbare Aufträge.

So forderte der König 1744 EULERS Ansicht über die beste Schrift über Artillerie ein, infolgedessen EULER das Werk des Engländers ROBINS ins Französische übersetzte. 1749 beauftragte der König EULER mit der Revision des Nivellements des Finowkanals, der die Oder mit der Havel verband. Ferner mußte sich EULER auf Veranlassung des Königs über die Salzwerke von Schönebeck, den Lotterieplan des Italieners CALZAPIGHI und andere Finanzprojekte z. B. Witwenpensionskassen und über die Wasserwerke von Sanssouci äußern und Gutachten abfassen.[3]) Mit diesem letzten Gutachten scheint FRIEDRICH DER GROSSE allerdings nicht zufrieden gewesen zu sein, wenigstens berichtet LUCCHESINI von einer Tafelunterhaltung am 7. Juli 1783: „Bei einem Streite über die Geometrie sagte er, EULER habe zwei Irrtümer begangen, erstens, daß er Berlin für eine Stadt hielt, in der sich etwas machen ließe, und zweitens, daß er die Arbeiten für den Kanal zur Herstellung der Wasserkünste in dem Garten von Sanssouci schlecht leitete.“[4])

Ferner holte der König EULERS Rat in Angelegenheiten der Universität Halle ein. EULER unterhandelte mit DANIEL BERNOULLI, um ihn als Nachfolger für CHRISTIAN VON WOLFF für Halle zu gewinnen, und als sich diese Unterhandlungen zerschlugen, machte er den König auf SEGNER aufmerksam, der dann auch berufen wurde. EULER bewog auch den König, den physikalischen Apparat WOLFFS für die Universität Halle anzukaufen. Auf seine Empfehlung hin wurde der Astronom JOHANN KIES 1742 nach Berlin gerufen und als 1745 die Akademie dem König in einer Eingabe Vorschläge betreffs Ersetzung des verstorbenen Astronomen NAUDÉ machte, schrieb der König an den Rand dieser Eingabe „Nein der EILERS [= EULER] wirdt einen aus Rußland verschreiben der Habil ist und Profeser in NODÉ Seiner Stelle werden kan.“[5]) Im 7jährigen Kriege endlich wurde EULERS

1) *Oeuvres* T. 24 (1854) p. 392, 394. 2) ib. T. 3 (1846) p. 25.

3) *Gespräche* FRIEDRICHS DES GROSSEN *mit H.* DE CATT *und dem Marchese* LUCCHESINI hrsg. von F. BISCHOFF. Leipzig 1885 p. 230.

4) ib. p. 258. 5) HARNACK Bd. 1, 1 p. 293.

Kenntnis der russischen Sprache mehrfach benutzt, um aufgefangene russische Depeschen und Briefe durchzusehen und zu übersetzen.[1])

So sehen wir Euler in seiner Berliner Zeit auf den verschiedensten Gebieten neben seinen Fachwissenschaften tätig; was sein Fleiß in diesen geschaffen hat, geht daraus hervor, daß er in den 25 Jahren seines Berliner Aufenthalts rund 250 Arbeiten, zum Teil höchst umfangreiche, publiziert hat. Seine Arbeitskraft ist erstaunlich, denn neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit stellte auch sein Amt als Mitglied der Akademie und Direktor der mathematischen Klasse manche Anforderungen an seine Zeit, besonders auch, als er nach Maupertuis' Weggang dessen Vertretung in der Leitung der Akademie übernommen hatte. Diese Leitung behielt Euler auch nach dem 1759 erfolgten Tode Maupertuis' bei. „Er war gewissenhaft und sparsam, aber kaum weniger heftig und eigensinnig als der alte Präsident, zwar gerecht, aber nicht ohne Vorurteile", so charakterisiert Harnack in seiner Geschichte der Akademie die Geschäftsführung Eulers. Dem König fehlte die Muße, sich um seine Akademie aus dem Lagerleben heraus viel zu kümmern, aber gleich nach dem Friedensschluß wandte er ihr seine Sorge wieder zu und war bemüht, ihr einen Präsidenten zu geben, denn Eulers Leitung befriedigte ihn nicht. Er hoffte D'Alembert zu gewinnen, aber trotz aller Versuche, D'Alembert zur Übersiedelung nach Berlin zu bestimmen, trotz der glänzendsten Anerbietungen (ein Gehalt von 12000 frcs.) refüsierte der Franzose, und der König machte sich selbst zum stellvertretenden Präsidenten. Der König war mit Eulers Verwaltung, wie gesagt, nicht zufrieden gewesen, seiner Meinung nach hatten die Kalender zu wenig eingebracht und der Bureaubeamte Köhler dabei zu viel in seine eigene Tasche hineingewirtschaftet, was auch ein Teil der Akademiker behauptete. Aber Euler hielt große Stücke auf Köhler und konnte sich nicht zu einer Neuordnung entschließen. Da erließ der König einen Befehl an die Akademie, eine Kommission wegen des Kalenderwesens einzusetzen. Euler, der dieser Kommission ebenfalls angehörte, ließ sich nun zu dem falschen Schritt hinreißen, hinter dem Rücken der Kommission direkt Vorschläge an den König zu machen (16. Juni 1765), was ihm ein ziemlich ungnädiges Schreiben eintrug: „ich weiß zwar keine Curven zu berechnen, dagegen weiß ich sehr wohl, daß 16000 Thaler mehr als 13000 Thaler sind."[2]) Die Kommission war außer sich über Eulers Schritt und zwang ihn, die Antwort des Königs in einer Sitzung zu verlesen.

---

1) Le Sueur p. 258. 2) *Oeuvres* T. 20 p. 209.

Dennoch richtete er ein zweites Schreiben an den König, „welches ihm eine sehr ernsthafte Antwort eintrug, die er niemandem gezeigt hat“. „In dergleichen Fällen“, schreibt der ihm befreundete MERIAN „verrechnete sich unser großer Geometer erstaunlich“ und der ihm abgeneigte SULZER schrieb: „Es ist ganz unglaublich, von was für kindischen Besorgnissen und Vorurteilen dieser in seinem Fach so große Mann eingenommen war.“[1]) Diese Vorgänge befestigten in EULER den Entschluß, Berlin den Rücken zu kehren. Zum erstenmal war ihm dieser Gedanke gekommen, als der König D'ALEMBERT als Präsidenten nach Berlin zu ziehen versuchte. Am 1. Oktober 1763 schrieb er nämlich an GOLDBACH: „Noch hat sich hier der Anschein nicht verloren, daß die hiesige Akademie in eine Académie française verwandelt werden soll. So sehr ich mich vor einer nochmaligen Ortsveränderung entsetze, so würde ich mich doch in diesem Falle dazu entschließen müssen.“[2]) Wenn nun auch diese Befürchtung durch D'ALEMBERTS Ablehnung beseitigt war, so fand sich doch noch im selben Jahre ein neuer Grund zur Verstimmung. Auf ein Gesuch EULERS vom 2. Oktober 1763 an FRIEDRICH DEN GROSSEN um Zustimmung zur Heirat seiner Tochter mit dem Kornet VAN DELEN antwortete ihm der König umgehend abschlägig, „weil in seinen Staaten Fahnenjunker und Kornets gewöhnlich nicht zu heiraten wagten und warten müßten, bis sie in höhere militärische Grade eingerückt seien“.[3]) Und nun kamen endlich die oben geschilderten Vorgänge in der Akademie dazu. Zehn Jahre lang hatte EULER die Akademie selbständig geleitet, und nun sollte er sich den Beschlüssen einer Kommission fügen, die seine bisherigen Maßregeln zum Teil mißbilligte. Das erschien ihm als Mißtrauen und Kränkung. Er bat deshalb den König um seine Entlassung. Aber erst auf das dritte Schreiben erhielt er unter dem 17. März 1766 eine gnädig gehaltene Antwort des Königs „daß EULER ihm ein Vergnügen bereiten würde, wenn er von der erbetenen Entlassung abstände und nicht mehr darauf zurückkomme“. Allein EULERS Entschluß stand fest. Er wiederholte sein Gesuch, und nun erhielt er die Bewilligung in einem ganz kurzen zwei Zeilen langen Schreiben vom 3. Mai 1766.[4]) So schieden diese beiden großen Männer, jeder ein königliches Genie in seinem Reiche, in gegenseitiger Mißstimmung. Erst zehn Jahre später fand eine Annäherung zwischen ihnen statt. FRIEDRICH hatte eine Witwenpensionskasse in seinem Staate ein-

1) HARNACK Bd. 1, 1 p. 364. 2) Correspondance p. 667.
3) Oeuvres T. 20 p. 208. 4) ib. p. 210.

gerichtet, und Euler übersandte 1776 zwei darauf bezügliche Abhandlungen, wofür der König ihm in zwei gnädigen Schreiben dankte. In einem letzten Brief vom 1. Februar 1777 spricht endlich der König Euler seinen Dank aus für seine, des Königs, Wahl zum Ehrenmitglied der Petersburger Akademie.[1]) Es ist erfreulich, daß auch auf diese Mißstimmungen die Jahre ihren heilenden Einfluß ausübten. Aber im Momente der Trennung war der König aufs peinlichste beberührt, seinen bedeutendsten Akademiker zu verlieren. Die Kränkung über dessen Fortgang saß tief beim König und machte sich in einem höhnischen Brief an D'Alembert Luft, nachdem er gehört hatte, daß Eulers Papiere bei der Sendung nach Petersburg verloren gegangen seien: „Herr Euler, der bis zur Unsinnigkeit den Großen und Kleinen Bären liebt, hat sich nach Norden begeben, um sie besser beobachten zu können. Das Schiff mit seinen xz und kk erlitt Schiffbruch und alles ging verloren. Das ist sehr schade, denn er hätte sechs Foliobände von Anfang bis zu Ende mit seinen Zahlen füllen können und Europa wird nun wahrscheinlich des angenehmen Vergnügens beraubt sein, den diese Lektüre ihm bereitet haben würde."[2])

Am 29. Mai 1766 wohnte Euler zum letztenmal einer Sitzung der Berliner Akademie bei; im Juni verließ er Berlin unter dem Bedauern der königlichen Prinzen, vor allem des regierenden Markgrafen von Brandenburg-Schwedt, dessen beide Töchter Euler unterrichtet hatte; die ältere von ihnen ist die, an welche er die Lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques sujets de physique et de philosophie gerichtet hat. Er begab sich mit seiner Familie über Warschau, wohin ihn der König von Polen eingeladen hatte, nach Petersburg, wo er am 17. Juli eintraf. Bald nach seiner Ankunft erkrankte er heftig und verlor durch diese Krankheit sein zweites Auge. Völlig erblindet hat er dann noch 17 Jahre lang rastlos tätig gewirkt, in dieser Zeit sind noch mehr als 200 Arbeiten von ihm veröffentlicht worden und beinahe 200 Abhandlungen hinterließ er, die allmählich bis 1830 in den Mémoires der Petersburger Akademie erschienen. Er starb am 7. September 1783.

Euler war mit Catharina Gsell verheiratet, von der er dreizehn Kinder hatte; acht dieser starben in jugendlichem Alter. Sein ältester Sohn, Johann Albrecht, in Petersburg 1734 geboren, wurde noch unter Maupertuis' Präsidentschaft 1754 Mitglied der Berliner Akademie und siedelte mit dem Vater nach Petersburg über. Er hei-

1) Oeuvres T. 20 p. 211 f. 2) ib. T. 24 p. 407.

ratete in Berlin „und da sein Einkommen wegen der Kriegsunruhen noch sehr gering, so lebt er mit seiner Frau bey uns und wir haben die Freude ein artiges Großtöchterleyn erlebt zu haben“, so schrieb EULER an GOLDBACH am 29. Juni 1762.[1]) Sein zweiter Sohn war ebenfalls noch in Petersburg geboren. „Il s'applique à la médicine sous la conduite de Monsieur MECKEL et de nos autres Médicins“ heißt es von ihm in einem Brief des Vaters an MAUPERTUIS vom 20. Januar 1759[2]) und in dem oben erwähnten Briefe an GOLDBACH äußert sich EULER über ihn: „er ist gegenwärtig in Halle, wohin ich ihn vor einem Jahr gebracht habe, und gedenket auf künftigen Herbst zu promovieren. Ich habe den Trost, daß seine Herren Professoren seinen Fleiß und gute Aufführung nicht genug rühmen können.“[3]) Dieser Sohn siedelte ebenfalls mit dem Vater nach Petersburg über. Sein jüngster Sohn endlich wurde ihm 1743 in Berlin geboren. In den beiden schon erwähnten Briefen heißt es von ihm (1759): „Je viens d'expédier mon fils cadet à l'armée du Roi, pour servir dans le régiment de hussards de Ziethen“[4]) und (1762): „Mein jüngster Sohn hat sich dem Kriegswesen gewidmet und ist nun Lieutnant bey der Artillerie, wo man ungemein wohl mit ihm zufrieden ist.“[5]) Er begleitet zunächst nicht den Vater nach Rußland, da FRIEDRICH DER GROSSE ihm den Abschied aus seinem Heere verweigerte, und es bedurfte erst der persönlichen Verwendung KATHARINAS II. bei FRIEDRICH II., um ihm zu gestatten, den preußischen Dienst zu verlassen und ins russische Heer einzutreten. Von EULERS beiden Töchtern war die ältere an einen Offizier VON BELL verheiratet, die jüngere hatte doch noch den Baron VON DEHLEN bekommen. Beide Töchter starben vor dem Vater, die eine 1781, die andere 1780, während alle drei Söhne den Vater überlebten.[6])

EULER besaß eine kräftige Konstitution; außer den zwei schweren Krankheiten, deren jede ihn ein Auge kostete, erfreute er sich bis auf seine letzten Tage einer guten Gesundheit. Seine Arbeitskraft war außerordentlich, sein Gedächtnis ganz eminent, konnte er doch, wie FUSS in seinem Éloge erzählt, die ganze Aeneis von Anfang bis zu Ende auswendig. Er besaß große allgemeine Bildung: er hatte die besten römischen Schriftsteller gelesen und besaß nicht geringe Kenntnis in der Geschichte, der Medizin, Botanik und Chemie. Er beherrschte

1) Correspondance p. 657. 2) LE SUEUR p. 172.
3) Correspondance p. 657. 4) LE SUEUR p. 172.
5) Correspondance p. 657. 6) FUSS p. 119.

vollständig die lateinische Sprache, sprach Französisch und Russisch, am liebsten aber bis in sein Alter hinein sein geliebtes Schweizer-Deutsch. Nicht frei von Lebhaftigkeit, Heftigkeit und Vorurteilen, suchte er doch fremde Verdienste in gerechter Weise anzuerkennen und die Entdeckungen wissenschaftlicher Wahrheiten erfreuten ihn, von welcher Seite sie auch kamen.

Wir aber begehen die heutige Erinnerungsfeier der wissenschaftlichen Wahrheiten wegen, die der große Mathematiker selbst gefunden hat und die seinen Namen bis in die fernsten Zeiten erhalten werden.

EULER
UND DIE VARIATIONSRECHNUNG

VON

ADOLF KNESER
IN BRESLAU

Um zu beurteilen, was EULER in der Entwicklung der Variationsrechnung bedeutet, gewinnen wir den richtigen Gesichtspunkt, indem wir einen Blick auf das mathematische Werk des großen LEIBNIZ werfen, dessen gewaltige Persönlichkeit durch seinen Freund und Jünger JOHANN BERNOULLI, den Lehrer EULERS, auf diesen von früh auf kräftig eingewirkt hat.

Einer der großen leitenden Gedanken, die LEIBNIZ während der ganzen langen Zeit seiner wissenschaftlichen Arbeit nicht verlassen haben, ist der einer Characteristica generalis. LEIBNIZ geht aus von der Vorstellung, daß alle Begriffe auf eine kleine Zahl widerspruchsloser Elemente zurückgeführt werden können und daß, wenn es gelingt, für diese passende Charaktere zu finden, die Möglichkeit gegeben ist, durch Kombination der Charaktere nach gewissen Operationsregeln nicht nur die bekannten Wahrheiten systematisch darzustellen, sondern auch neue zu finden, die Ars inveniendi zu fördern.[1])

Die allgemeine Idee wird erst fruchtbar, indem sie sich auf ein spezielles Gebiet beschränkt. In der Mathematik gibt sie als Niederschlag die Einsicht, wieviel für die vollkommenere Darstellung und für die Erweiterung der Wissenschaft auf eine passend gewählte Zeichensprache und die zugehörigen Operationsregeln, den zugehörigen Algorithmus ankommt. Diese Einsicht führt zunächst zu den Versuchen, eine geometrische Charakteristik herzustellen, die sich den Konstruktionen besser anschließt als die Formeln der analytischen Geometrie, ein Ziel, das erst GRASSMANN direkt an LEIBNIZ anknüpfend erreicht hat. Weitaus das Größte aber, was die Idee der allgemeinen Charakteristik in LEIBNIZens Händen geleistet hat, ist die Erfindung des Algorithmus der Differential- und Integralrechnung. Differenzieren und Integrieren, wie wir es nennen, konnte man schon vor LEIBNIZ. In unzähligen Fällen, für ganze Gruppen von Aufgaben hatte man die Fragen des Maximums und Minimums, sowie der Quadratur erledigt; es genügt an die Namen FERMAT, ROBERVAL, WALLIS zu erinnern. Aber erst LEIBNIZ gibt die allgemeinen Operationsregeln und faßt die zerstreuten Bestrebungen zu einer wohl geordneten einheitlichen Disziplin, eben

der Differential- und Integralrechnung zusammen, wodurch nicht nur das bisher Erreichte neu und übersichtlich geordnet, sondern auch ein gewaltiges Hilfsmittel für die Ars inveniendi, die Kunst spezielle Aufgaben unter allgemeinen Gesichtspunkten zu lösen, gewonnen wird.[2])

Zur Behandlung der Aufgaben mittels des neuen Algorithmus stellt Leibniz auf das Klarste in Gegensatz die consideratio rerum ipsarum, die gegenständliche Betrachtung der Dinge, wie wir wohl mit einem Goethischen Wort sagen dürfen, ohne diesem Wort, das ja den größten Gegner aller Algorithmen charakterisiert, Gewalt anzutun. Die Betrachtung der Dinge selbst, das scheint bei oberflächlichem Urteil das erwünschte Ziel zu sein; und doch, wenn wir die Leibnizische Infinitesimalrechnung mit der Behandlung ihrer Aufgaben bei den älteren Forschern, sowie mit den bis auf den heutigen Tag sich wiederholenden Rückschlägen in die vorleibnizische angeblich elementare Behandlung vergleichen, kann es nicht zweifelhaft sein, daß der Fortschritt der Wissenschaft darauf beruht, daß der Algorithmus an Stelle der gegenständlichen Betrachtung tritt; nicht weil es uns Freude macht, das Denken durch mechanisches Rechnen zu ersetzen, sondern unter dem Drange einer bitteren Notwendigkeit. „Da es nämlich in der Mathematik“, sagt Jacobi, „darauf ankommt, Schlüsse auf Schlüsse zu häufen, so wird es gut sein, so viele Schlüsse als möglich in ein Zeichen zusammenzuhäufen. Denn hat man dann ein für alle Mal den Sinn der Operation ergründet, so wird der sinnliche Anblick des Zeichens das ganze Räsonnement ersetzen, das man früher bei jeder Gelegenheit wieder von vorn anfangen mußte.“

Diese Worte entnehme ich einer unveröffentlichten Vorlesung von Jacobi über Variationsrechnung[3]); sie beziehen sich nicht nur auf die Entwicklung der Differentialrechnung, sondern auch auf unser eigentliches Thema, die Variationsrechnung, in der wir den Gegensatz, den wir zwischen Leibniz und seinen Vorgängern lebendig sehen, zwischen Euler und seinem Nachfolger Lagrange wiederfinden. Um aber diese Parallele durchzuführen und die Stellung Eulers klar zu erkennen, können wir noch in einer anderen, spezielleren Weise auf Leibniz zurückgehen. Gerade die Probleme der Variationsrechnung hat Leibniz zuerst in ihrer Eigenart begrifflich gekennzeichnet, ein wichtiges neues Einzelproblem gelöst und so das Recht gewonnen, auch als Begründer dieser Disziplin zu gelten. Zwar findet sich in Newtons Prinzipien die Aufgabe behandelt und gelöst, den Meridian einer Rotationsfläche so zu bestimmen, daß die Fläche in axialer

Richtung durch eine Flüssigkeit fortschreitend den kleinsten Widerstand erfährt. NEWTON hat die Differentialgleichung der gesuchten Kurve richtig angegeben. Aber die Integration fehlt und NEWTON hat sich dadurch, daß er seine Methode verheimlichte, um den eigentlichen Erfolg gebracht. Er hat keinen Einfluß auf die Entwicklung der Wissenschaft in diesem Punkte gewonnen. Die Geburtsstätte der Variationsrechnung ist der Briefwechsel zwischen LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI, und LEIBNIZ entwickelt genau die Methode, die EULER zum höchsten Grade der Vollendung bringt, ehe sie durch den Algorithmus von LAGRANGE ersetzt wird.

Das erste Problem, an dem LEIBNIZ sich die Eigenart unserer Disziplin klar macht, ist das isoperimetrische: man soll eine Kurve gegebener Länge in solcher Gestalt ziehen, daß der von ihr umschlossene Inhalt möglichst groß ist. Dazu kommt die Kettenlinie: man konstruiert eine Kurve von gegebener Länge, deren Schwerpunkt möglichst tief liegt. LEIBNIZ hebt hervor, daß es sich hier nicht wie bei dem gewöhnlichen Problem des Extrems darum handelt, unter den Ordinaten einer gegebenen Kurve die größte oder kleinste zu bestimmen, sondern daß aus einer Mannigfaltigkeit möglicher Gestalten eine ganze Kurve herausgesucht werden muß, die eine durch ihren ganzen Verlauf bestimmte Größe, wie etwa die Schwerpunktshöhe zum Extrem bringt.[4]) Aber es gelingt ihm keine rechten Fortschritte zu machen, weil die bezeichneten Probleme gerade nicht dem einfachsten Typus angehören; dieser tritt erst in der schönen Aufgabe der Brachistochrone auf, die JOHANN BERNOULLI stellt: es sollen zwei Punkte A und B durch eine solche Kurve verbunden werden, daß ein schwerer Punkt, längs der Kurve fallend, in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt. „Wie der Apfel die Eva, so hat mich dieses Problem durch seine Schönheit verlockt“, schreibt der bejahrte durch mancherlei Beschäftigung zerstreute LEIBNIZ an BERNOULLI und dieser antwortet: es sei gut, daß LEIBNIZ ihn wenigstens nicht mit der Schlange identifiziere. LEIBNIZ macht sich ans Werk und kommt zum richtigen Resultat, ein glänzendes Beispiel seiner Kraft, die allgemeine Idee auf den Boden der konkretesten Anwendung herabzuziehen und dadurch fruchtbar zu machen; er zeigt sich in der Beschränkung als Meister. Seine von der BERNOULLIschen abweichende Methode kann im wesentlichen folgendermaßen charakterisiert werden.[5])

Die gesuchte Kurve wird durch ein Polygon ersetzt, dessen Ecken auf einer Schar äquidistanter Ordinatenlinien liegen. Im Falle der

Brachistochrone z. B. werden drei aufeinanderfolgende Ecken C, D, E ins Auge gefaßt und man fragt: wenn C und E festgehalten werden, wie muß D auf seiner Ordinate gewählt werden, damit der Fall auf der gebrochenen Linie CDE in der kürzesten Zeit von C nach E führt? Man kommt durch diese Forderung auf eine als Differenzengleichung zu bezeichnende Beziehung zwischen den aufeinanderfolgenden Elementen der gesuchten Kurve, die, wenn man die Abstände der Ordinaten unendlich abnehmen läßt, in eine Differentialgleichung übergeht, eben die Gleichung der gesuchten Kurve.

Etwas analytischer können wir die Sache im wesentlichen nach Euler auch folgendermaßen formulieren. Das Integral, dessen Extrem man sucht, sei

$$J = \int_a^b f(x, y, p)\, dx;$$

dabei werde gesetzt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = P, \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad y = \varphi(x),$$

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_{\nu+1} = x_\nu + \varDelta x, \quad y_\nu = \varphi(x_\nu),$$

und das Integral J werde durch die Summe

$$S = \varDelta x \left\{ f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{\varDelta x}\right) + f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{\varDelta x}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + f\left(x_{n-1}, y_{n-1}, \frac{y_n - y_{n-1}}{\varDelta x}\right) \right\}$$

ersetzt, die man als Funktion der Ordinaten y ansieht. Setzt man den Differentialquotienten nach einer von ihnen gleich Null, so erhält man

$$\frac{\partial S}{\partial y_\nu} = T_\nu = \varDelta x \cdot N\left(x_\nu, y_\nu, \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{\varDelta x}\right) - P\left(x_\nu, y_\nu, \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{\varDelta x}\right)$$
$$+ P\left(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \frac{y_\nu - y_{\nu-1}}{\varDelta x}\right) = 0,$$

woraus durch Grenzübergang die Differentialgleichung in der von Euler gebrauchten Form hervorgeht:

$$N dx - dP = 0.$$

Man sieht, es werden keinerlei formale Regeln der Integralrechnung benutzt, um diese Gleichung abzuleiten, sondern es wird auf den ursprünglichen Begriff des Integrals als Grenzwert einer Summe zurückgegangen. Die Methode ist also gegenständlich und sogar anschaulich, wenn man nicht die Regel zur Bestimmung des Extrems aus der Differentialrechnung heranzieht, sondern an der Figur des Polygons

selbst, wie EULER es meistens macht, das variierte Polygon zur Anschauung bringt und den Unterschied der beiden Polygonen entsprechenden Summen S gleich Null setzt, entsprechend der Grundeigenschaft der Extremwerte, in dem bekannten Sinne stationär zu sein.

Vom Standpunkte der heutigen kritischen Mathematik sehen wir sofort, wie sich hier die Grenzübergänge, die in den verschiedenen gebrauchten Begriffen gefordert werden, verschieben; dadurch wird die moderne Kritik aufs Schärfste herausgefordert, der es auf nichts mehr ankommt, als daß die Reihenfolge der Grenzübergänge gewahrt bleibe. Die Vertauschung zweier Grenzübergänge ist ja in den meisten Fällen, wo den modernen Anforderungen an Strenge nicht genügt wird, der eigentliche Grund aller Bedenken.

Die für das Integral gesetzte Summe S erhält den Zuwachs $T_\nu \cdot \varepsilon$, wenn y_ν um die unendlich kleine Strecke ε geändert wird. Ändert man — und hier kommen wir auf einen fundamentalen Gedanken von JACOB BERNOULLI — y_ν um ε und $y_{\nu+1}$ um η, so erhält man den Zuwachs $T_\nu \varepsilon + T_{\nu+1}\eta$. Diese Bemerkung wird fruchtbar bei Aufgaben vom Typus der isoperimetrischen, d. h. wenn nicht das gegebene Integral schlechthin zum Extrem gebracht werden soll, sondern noch die Forderung hinzugefügt wird, daß die gegebene Kurve für irgend ein anderes Integral

$$K = \int_a^b g(x, y, p)\, dx,$$

z. B. das der Länge, einen vorgeschriebenen Wert ergeben soll. Ersetzt man auch dieses durch eine der Summe S entsprechend gebildete Summe, aus der die Größen U_ν ähnlich abgeleitet werden, wie vorher T_ν aus der Summe S, so findet man folgendes. Durch passende Bestimmung der Stücke ε und η kann man bewirken, daß das Integral K ungeändert bleibt. Sein Zuwachs ist aber $U_\nu \varepsilon + U_{\nu+1}\eta$; also hat man die Bedingung

$$U_\nu \varepsilon + U_{\nu+1}\eta = 0$$

anzusetzen. Ist diese erfüllt, so muß, damit das gesuchte Extrem vorliege, der infinitesimale Zuwachs der Summe S verschwinden:

$$T_\nu \varepsilon + T_{\nu+1}\eta = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{T_\nu}{U_\nu} = \frac{T_{\nu+1}}{U_{\nu+1}},$$

d. h. der Quotient $T_\nu : U_\nu$ ist von ν unabhängig, etwa gleich $-\lambda$. So erhalten wir analog der früheren Gleichung $T_\nu = 0$ die Beziehung

$$T_\nu + \lambda U_\nu = 0$$

und hieraus, indem wir h unendlich abnehmen lassen, die berühmte isoperimetrische Regel: man behandele das Integral

$$\int_a^b [f(x, y, p) + \lambda g(x, y, p)]\, dx = J + \lambda K$$

so wie vorher J; dann ergibt sich die Differentialgleichung der Kurve, die das isoperimetrische Problem allein lösen kann.[6])

Die beiden Grundideen von Leibniz und Jacob Bernoulli hat nun Euler von manchen Unvollkommenheiten befreit und in der Weise fortgebildet, daß er auch die Probleme, in denen höhere Differentialquotienten vorkommen, mit ihnen zu behandeln wußte. Ein solches Problem ist z. B. das der elastischen Linie, wenn man ihre Gestalt nach Daniel Bernoulli aus der Forderung bestimmt, daß ihre potentielle Energie ein Minimum werde, die durch das längs der Kurve genommene Integral des Quadrates der Krümmung dargestellt wird. Überhaupt bringt Euler die hierher gehörigen Probleme in ein durchsichtiges System und gibt leicht zu handhabende Regeln an, nach denen die Differentialgleichungen direkt hingeschrieben werden können.

Als der Qualität nach hervorragendste Leistung Eulers möchte ich bezeichnen, daß es ihm gelingt, seine Methode auf Größen auszudehnen, die nicht wie unsere J und K durch Quadraturen, sondern durch Differentialgleichungen definiert sind, und auf die Integrale solcher Größen.[7]) Hierher gehört z. B. die Aufgabe der Brachistochrone im widerstehenden Mittel; das einfachste Problem dieser Art ist die Aufgabe, bei gegebenem Gesetz des Luftwiderstandes die Kurve AB so zu bestimmen, daß ein schwerer Punkt, der längs ihrer von A nach B fällt, in B mit der größten Geschwindigkeit ankommt. Es handelt sich also darum, einer Größe v etwa an der Stelle $x = b$ einen extremen Wert zu geben, wenn v durch eine Gleichung

$$\frac{dv}{dx} = f(x, y, p, v)$$

und den gegebenen Anfangswert $v(a)$ definiert ist; y ist die unbekannte, gesuchte Funktion von x. Euler ist hier, ein seltener Fall bei großen mathematischen Entdeckungen, erst durch Irrtum zur Wahrheit vorgedrungen. In der älteren Mechanik von 1736 finden sich[8]) falsche Lösungen der genannten speziellen Aufgaben; erst in dem Hauptwerk Methodus inveniendi wird die Differentialgleichung des bezeichneten allgemeinen Problems richtig angegeben. Die Argumentation, die zu diesem Ziel führt, packt den Stier bei den Hörnern; Euler ersetzt

die die Größe v definierende Differentialgleichung durch eine auf äquidistante Werte von x bezügliche Differenzengleichung und bestimmt, ungeschreckt durch die Schwierigkeit der Aufgabe, den Zuwachs im Endwert der Größe v durch die Änderung einer der Ordinaten. Setzt man diesen Zuwachs wie bei den gewöhnlichen Aufgaben des Maximums und Minimums gleich Null, und läßt die Differenz der aufeinander folgenden Werte von x unendlich abnehmen, so erhält man die für die gesuchte Kurve charakteristische Differentialgleichung. Diese enthält eine Hilfsgröße, die ihrerseits durch eine Differentialgleichung definiert ist und mit dem von LAGRANGE in allgemeinerer Weise eingeführten Multiplikator zusammenfällt.

Sehen wir in den bisher besprochenen Leistungen EULER als den Systembildner, als den kraftvollen Verallgemeinerer, so ist er nicht minder groß in der Erkenntnis der individuellen Bildungen. Er wendet seine Methoden auf eine große Zahl der schönsten Einzelaufgaben an, von denen er die zugänglichen und fruchtbaren mit bewunderungswürdigem Spürsinn aufzufinden weiß, einem Instinkt, den er später in dem großen Werk über Integralrechnung zur Auffindung integrierbarer Differentialgleichungen in glänzender Weise bewährt hat. Aber auch in der Variationsrechnung gilt das Wort JACOBIS: es ist immer ein Fortschritt, wenn man den Beispielen EULERS ein wirklich neues hinzuzufügen weiß. Als Quelle schöner Einzelaufgaben, die teilweise seit EULERS Zeiten nie wieder bearbeitet sind, führe ich zunächst die ältere Mechanik[9]) und die Scientia navalis an.[10]) In letzterem Werke, dessen Titel ja nicht gerade auf enge Beziehungen zu den schwierigsten Teilen der Analysis hinweist, finden sich besonders eine Reihe interessanter Aufgaben, die eine gewisse Verwandtschaft mit der NEWTONschen Aufgabe der Fläche kleinsten Widerstandes zeigen und wie diese aus der Untersuchung der im Wasser fortschreitenden Körper hervorgegangen sind. Am glänzendsten aber treten jene Vorzüge in dem Werk hervor, in dem EULER seine Arbeiten über unser Gebiet systematisch zusammengefaßt hat, der Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietatibus gaudentes. Dieses von EULER in der Fülle seiner Schaffenskraft verfaßte Werk hat die lichtvolle Klarheit mit den übrigen Werken gemein, vermeidet aber die behagliche Breite, in der EULER sich sonst zu ergehen pflegt und die auf uns Heutige hier und da einmal einschläfernd wirken kann. Der Vorrat an Einzelaufgaben ist bis auf den heutigen Tag noch keineswegs erschöpfend bearbeitet; auch gewisse allgemeine Typen von Aufgaben, z. B. die, bei denen das Extrem einer Funktion von mehreren Inte-

gralen der vorher betrachteten Art gesucht wird, sind seitdem nie wieder eingehend behandelt worden. Ich stehe nicht an, diesem Werk unter allen Werken EULERS den ersten Platz anzuweisen, der ihm höchstens durch die zweite Mechanik — Theoria motus — streitig gemacht werden kann, die sich ähnlicher Vorzüge erfreut.

Aber so große Erfolge EULER auch mit seiner gegenständlichen, im wesentlichen geometrischen Methode erzielt, er empfindet doch das Ungenügende seiner Methode, die, wie LAGRANGE es ausdrückt, den Mechanismus der Infinitesimalrechnung zerstört: „Desideratur Methodus a resolutione geometrica et lineari libera".[11]) EULER generalisiert, er systematisiert, er strebt dem Algorithmus zu, indem er mechanische Regeln zur Lösung der Probleme entwickelt, ohne das erwünschte Ziel ganz zu erreichen. Er hat aber einen entschiedenen Instinkt für das, was der Wissenschaft not tut, und wie nun der junge LAGRANGE den Algorithmus des Zeichens δ erfindet und damit über den auf der Höhe des Ruhmes stehenden EULER hinausgeht, da nimmt dieser das Werk seines Nachfolgers mit Begeisterung auf; er macht sich zum Propheten der neuen Lehre und gibt eines der schönsten, in der Geschichte der Wissenschaft bekannten Beispiele von selbstloser Sachlichkeit. Niemals hat — nach dem Worte CONDORCETS — der Genius eine schönere Huldigung empfangen, niemals eine schönere dargebracht.

„LAGRANGE", so sagt JACOBI in der schon zitierten Vorlesung, „hat im zweiten Bande der Turiner Memoiren die ganze Variationsrechnung mit einem Schlage geschaffen. Es ist dies eine der schönsten Abhandlungen, die je geschrieben sind. Die Gedanken folgen wie Blitze mit der größten Schnelle aufeinander und mit der größten Kürze." So begeistert JACOBI dem ihm wesensverwandten Algorithmiker LAGRANGE huldigt, so kühl spricht er über den auf unserm Gebiet gegenständlich arbeitenden EULER: „Das Wichtigste an der Methodus inveniendi ist ein kleiner Anhang, in welchem gezeigt wird, wie bei gewissen Problemen der Mechanik die Kurve, die der Körper beschreibt, ein Minimum gibt; es wird indes nur ein Körper angenommen, der sich in einer Ebene bewegt. Allein aus diesem Anhang ist die ganze analytische Mechanik entsprungen. Denn bald nach seiner Erscheinung trat LAGRANGE, nach ARCHIMEDES vielleicht das größte mathematische Genie, 20 Jahre alt, mit seiner analytischen Mechanik auf . . . Indem er EULERS Methode verallgemeinerte, kam er auf seine merkwürdigen Formeln, wo in einer einzigen Zeile die Auflösung aller Probleme der analytischen Mechanik enthalten ist."[12])

Die Worte JACOBIS leiten uns zu dem zweiten Gesichtspunkt über, unter dem wir EULER und die Variationsrechnung betrachten wollen: wir fragen nach dem Einfluß seiner diesem Gebiet angehörigen Arbeiten auf die Entwicklung der Mechanik und weiter auf die Entwicklung der theoretischen Physik überhaupt. Es ist hauptsächlich das Prinzip der kleinsten Aktion, das wir zu betrachten haben. Dieses wird von EULER in dem erwähnten Anhange für eine ausgedehnte Klasse von Problemen aus der Dynamik des einzelnen Punktes in der Weise durchaus exakt entwickelt, daß gezeigt wird, die Bahnkurven bei jenen Problemen sind die Kurven, die ein gewisses Integral, das durch rein geometrische Elemente ausgedrückt werden kann, zum Minimum macht. Es ist das Integral

$$\int v^2 \, dt = \int v \, ds,$$

in dem durch v die Geschwindigkeit, durch ds und dt die Elemente der Bahnkurve und der Zeit bezeichnet werden, und in dem man sich v mittels der Gleichung der lebendigen Kraft durch die Koordinaten des bewegten Punktes ausgedrückt denkt. Dies ist die engere Form des Prinzips der kleinsten Aktion, die von JACOBI in voller Allgemeinheit und bestimmter Begrenzung ausgesprochen ist. Aus ihr hat sich in den Händen von LAGRANGE ein Prinzip der kleinsten Aktion in weiterer Form, sowie das HAMILTONsche Prinzip entwickelt. Wie sich alle diese Prinzipien aus einer einzigen Gleichung durch Spezialisierung der zugelassenen Variationen entwickeln, hat Herr HÖLDER [13]) in einer schönen und wichtigen Abhandlung gezeigt, durch die erst volle Klarheit über den ganzen Gegenstand gekommen ist. Bei LAGRANGE entwickelt sich zunächst aus der allgemeineren Form unseres Prinzips die neue analytische Form der Mechanik, die dann später aus einer mit dem HAMILTONschen Prinzip im wesentlichen identischen Gleichung abgeleitet wird.

Wenn hiernach das Prinzip der kleinsten Aktion in seinen verschiedenen Wandlungen dem Mathematiker zunächst als ein fruchtbares Mittel zur analytischen Transformation der Bewegungsgleichungen erscheint, so entspricht das dem Ursprung unseres Prinzips, das einem rein mathematischen Bedürfnis sein Entstehen verdankt, und zwar hat DANIEL BERNOULLI die entscheidende Anregung gegeben. [14]) Am 28. Januar 1741 schreibt er an EULER: „Von Ew. Wohlgeboren möchte vernehmen, ob Sie nicht meinen, daß man die orbitas circa centrum virium könne methodo isoperimetrica herausbringen." EULER bleibt, wie wir schon wissen, die Antwort auf diese Frage nicht schuldig.

Aber trotz dem mathematischen Ursprung verdankt unser Prinzip seine Berühmtheit hauptsächlich den metaphysischen Begriffen und Fragen, die sich angeknüpft haben, sowie den literarischen Fehden zwischen Maupertuis, König und Voltaire. Ich gehe auf dieses bekannte Kapitel aus der Geschichte der Wissenschaft nicht ein, möchte aber die Aufmerksamkeit auf einen Punkt lenken, der mir bisher nicht genügend beachtet zu sein scheint, die Tatsache nämlich, daß die metaphysische Nebenbedeutung des Prinzips der kleinsten Aktion nicht Maupertuis in Rechnung zu stellen ist, sondern vielmehr schon von Euler in seiner ersten von Maupertuis gänzlich unabhängigen Publikation ziemlich stark betont worden ist.

„Cumque universa mundi fabrica omnino sit perfectissima atque a creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat.“ Diese Worte, die sich in dem auf die elastische Kurve bezüglichen Anhang der Methodus inveniendi finden, charakterisieren unsern Heros aufs schönste und bezeichnen im Verein mit dem, was folgt, den tieferen und allgemeineren Sinn des Prinzips der kleinsten Aktion weit besser als Maupertuis' Vorstellung von der Sparsamkeit der Natur, gegen die sich bekanntlich sofort das Bedenken erhebt, daß das Minimum der Aktion nicht auf die Dauer vorhanden ist, daß also die Natur gewissermaßen wie ein sparsamer Kleinhändler erscheint, der sich bei größeren Posten verrechnet. Die ursprüngliche Fassung Eulers ist dem gegenüber bescheidener und exakter. Es ist kein Zweifel, fährt er an jener Stelle fort, daß man die Naturvorgänge ebenso gut a priori, d. h. nach der Methode des Größten und Kleinsten, wie a posteriori, d. h. ausgehend von den durch direkte Betrachtungen im unendlich kleinen gefundenen Differentialgleichungen ableiten kann. Das vielen von uns bedenklich klingende Wort a priori wird hier genau definiert; bedenken wir, daß bei Euler nicht zwischen hinreichenden und notwendigen Bedingungen des Extrems unterschieden wird, so können wir ohne Änderung des Sinnes sagen: als allgemeine formale Regel zur Aufstellung der Gleichungen irgend welcher Bewegungsvorgänge dienen stets Integralprinzipien von der Form des Prinzips der kleinsten Aktion.

Und in diesem Sinne ist Eulers metaphysische Auffassung nach langer Verkennung durch gewisse Entwicklungen der modernen theoretischen Physik glänzend gerechtfertigt; wir wollen uns dafür auf keinen geringeren Zeugen als Helmholtz berufen. Die hierher gehörigen Anschauungen finden sich besonders deutlich in einer schönen akademischen Rede über das Prinzip der kleinsten Wirkung entwickelt, die

vor einigen Jahren von Herrn ADOLF HARNACK veröffentlicht worden ist.[15]) HELMHOLTZ vergleicht hier die Entwicklung und Bedeutung des Prinzips der kleinsten Aktion mit der Entwicklung und Bedeutung des Satzes von der Erhaltung der Energie. Auch dieser ist ursprünglich hervorgegangen aus einer mathematischen Formel, die sich auf die Mechanik wägbarer Massen bezog, hat aber eine universelle Bedeutung gewonnen, seit man den Begriff der Energie mittels der Äquivalenzzahlen auf thermische, elektrische und andere Gebiete von Erscheinungen ausdehnen lernte, und der Satz ist dadurch über seine ursprüngliche Bedeutung weit hinaus gewachsen, ohne jedoch seine Ausdrucksform zu verlieren. Etwas ganz Ähnliches geschieht nach HELMHOLTZ mit dem Prinzip der kleinsten Aktion, wobei allerdings in erster Linie an das HAMILTONsche Prinzip zu denken ist, das HELMHOLTZ von jenem nicht streng absondert. So haben BOLTZMANN und CLAUSIUS den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie, FRANZ NEUMANN die Gesetze geschlossener elektrischer Ströme auf eine Erscheinungsform des Prinzips der kleinsten Aktion zurückgeführt. HELMHOLTZ selbst hat in seinen Untersuchungen über die physikalische Bedeutung dieses Prinzips seine Gültigkeit in großem Stile untersucht und erweitert. Er hat sodann in einer besonderen Arbeit über das Prinzip der kleinsten Aktion in der Elektrodynamik eine Untersuchungsrichtung eingeschlagen, in der sich auch die neuesten Forscher auf dem Gebiete der Elektronentheorie, die Herren ABRAHAM, LARMOR und LORENTZ[16]) bewegen; ihnen allen ist das Streben gemein, die elektrischen Erscheinungen aus einem allumfassenden Integralprinzip von der Form des Prinzips der kleinsten Aktion abzuleiten. An Anwendungen dieser Art denkt HELMHOLTZ, wenn er in jener akademischen Rede sagt: „Alles Geschehen wird dargestellt durch das Hin- und Herfluten des ewig unzerstörbaren und unvermehrbaren Energievorrates der Welt, und die Gesetze dieses Flutens sind vollständig zusammengefaßt in dem Satze der kleinsten Aktion.“

Freilich dürfen wir nicht verschweigen, daß diese ganze allgemeine Entwicklung weniger an EULER direkt als an seinen großen Nachfolger LAGRANGE anknüpft. Es ist beiläufig bemerkt nicht die anschauliche Welt der Kräfte und Momente, der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, kurz das Gegenständliche der Mechanik, sondern der von LAGRANGE ausgebildete Algorithmus dieser Disziplin, der über das Gebiet der wägbaren Massen hinaus gültig bleibt. Aber, wenn auch LAGRANGE die unmittelbarste Wirkung zugeschrieben werden muß, so fällt doch auch auf EULER helles Licht. Besonders wird der Metaphysiker EULER gerechtfertigt in seinem Gefühl, bei der Zurückführung

der dynamischen Aufgaben auf isoperimetrische in der Nähe eines allgemeinen Prinzips der Naturwissenschaft zu stehen und eine Formel in Händen zu haben, die über ihren Ursprung hinaus für weite Erscheinungsgebiete etwas Typisches an sich hat. HELMHOLTZ ist sogar geneigt MAUPERTUIS in gewissem Sinne recht zu geben, obgleich seine Spekulationen weit ausschweifender und unbestimmter sind, als die Gedanken, die EULER ursprünglich mit dem Prinzip der kleinsten Aktion verbindet.

Aber auch wenn wir den alten Forschern diese posthume Rechtfertigung nicht gönnen, sondern hier einen unverdienten Glücksfall sehen wollen, so möchte ich doch dem Metaphysiker EULER nicht zürnen und ihn nicht als unnützen Ballast des Mathematikers EULER über Bord werfen. Mindestens als treibender Dämon behält jener seinen Wert. Wir haben schon bei LEIBNIZ gesehen, daß ein weit hinschweifender Gedanke in richtiger Beschränkung immer noch eine große wissenschaftliche Wendung hervorrufen kann, und wenn der Flug des Icarus auch nicht die Sonne erreicht, so führt er doch ein gutes Stück über die Erde hin, und gewährt Einsichten und Ansichten, die dem unbedingt kritischen Erdenwaller verborgen bleiben.

Ich bin zu Ende mit dem, was ich Ihnen über EULER und sein Werk zu sagen hatte. Besinnen wir uns noch einen Augenblick darüber, was Betrachtungen, wie die Ihnen heute vorgeführten, eigentlich wollen und sollen. Wühlen wir nur in altem Schutt, weil es uns Vergnügen macht, allerhand Antiquitäten einer wohlverdienten Vergessenheit zu entreißen? Und was sind überhaupt die Zwecke einer historischen Betrachtung für den Mathematiker? LEIBNIZ spricht sich einmal über den Nutzen einer solchen Betrachtung aus und sagt: es sei dabei nicht nur wichtig, daß die Geschichte jedem sein Recht gebe und andere zur Bewerbung um gleiche Ehren anlocke, sondern ihr Zweck sei, daß die Ars inveniendi gemehrt und die Methode durch hervorragende Beispiele erläutert werde.[17]) Ich glaube, wir gehen in der Bewertung der Geschichte noch über LEIBNIZ hinaus. Wir haben von GOETHE gelernt, die Persönlichkeit als das höchste Glück der Erdenkinder und damit auch als den unbedingt interessanten Gegenstand aller Geschichte einzuschätzen. Am geistigen Verkehr mit großen Männern wollen wir uns erheben, und wenn wir in dieser festlichen Stunde den Pulsschlag der großen wissenschaftlichen Persönlichkeit LEONHARD EULERS gesucht und gefunden haben, so gilt auch uns die Verheißung des Dichters: Wohl dem, der seiner Väter gern gedenkt.

Anmerkungen.

1) Leibnizens Ges. Werke herausg. von Pertz, dritte Folge, Bd. 5. *Mathematische Schriften*, herausg. von Gerhardt. Zweite Abteilung, Bd. 1. S. 216: Handschriftliche Notiz von 1674, veröffentlicht von Gerhardt: Illustribus exemplis quotidie disco omnem solvendi pariter problemata et inveniendi theoremata artem tunc cum res ipsa imaginationi non subjacet aut nimis vasta est eo redire, ut characteribus sive compendiis imaginationi subjiciatur, atque quae pingi non possunt qualia sunt intelligibilia, ea pingantur tamen hieroglyphica quadam relatione, sed eadem et philosophica. Quod fit si non ut pictores mystae aut Sinenses similitudines quasdam sectemur, sed rei ipsius ideam sequamur.

S. 141: *Characteristica geometrica.* 1679:

Characteres sunt res quaedam, quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio. Itaque omni operationi quae fit in characteribus respondet enuntiatio quaedam in rebus: et possumus saepe ipsarum rerum considerationem differre usque ad exitum tractationis.

S. 393: *Historia et origo Calculi differentialis*, nach 1712 verfaßt: Et vero nemini ante Leibnitium in mentem venit constituere Algorithmum quendam calculi novi per quem imaginatio a perpetua ad figuras attentione liberaretur.

Die Beziehung zwischen der Erfindung der Differentialrechnung und der allgemeinen Charakteristik hat Gerhardt zuerst hervorgehoben, S. 4, 5.

2) Euler *Institutiones Calculi differentialis*, Petersburg 1755, S. XVI:

Leibnizio sumus obstricti quod hunc calculum antehac tantum velut singulare artificium spectatum in formam disciplinae redegerit ejusque praecepta in systema collegerit et dilucide explicaverit.

3) *Vorlesungen von* Jacobi *über Variationsrechnung* 1837/38, ausgearbeitet von Rosenhain. Manuskript in der Bibliothek der kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften S. 3.

4) Leibnizens Werke [1]), dritte Folge, Bd. 3. *Math. Schriften*, *erste Abteilung*, Bd. 3.

S. 175. Brief an Joh. Bernoulli 1695.

Video et novam meditationem superesse cira maxima et minima, materiam nondum exhaustam. Neque enim semper facile est problema reducere ad [methodum] tangentium inversam seu differentiales. Exempli causa in inquisitione Catenariae, si non per theoremata mechanica aliunde novissemus proprietatem tangentium ejus dari respectu centri gravitatis, difficile fuisset obtinere lineae constructionem. Nempe datis punctis A et C et longitudine catenae vel funiculi AC quaeritur natura curvae talis ut AF sit omnium possibilium minima.

S. 192: Brief an Joh. Bernoulli 1695:

Problemata in quibus quaeritur ex lineis omnibus una praestans aliquid in desideratis maximum non possunt Tibi esse nova.

5) A. a. O. [4]), S. 288 ff. Briefe an Joh. Bernoulli 1696 und Manuskript, veröffentlicht von Gerhardt:

S. 295: Est in his novae cujusdam Analyseos materies.

S. 310: Methodus mea nonnihil a Tua diversa est sed tamen eodem duxit, quam ut aequum est et ut Tuo candori pari ingenuitate respondeam sic paucis habeto. Concipiens scilicet pro curva polygonum infinitangulum, video id fore

omnium possibilium facillimi descensus, si sumtis in eo tribus punctis vel angulis quibuscunque A, B, C sit punctum B tale, ut omnium punctorum in recta DE horizontali hoc unum det viam ab A ad C facillimam. Res ergo redit ad solutionem problematis facilis: Datis duobus punctis A et C et recta horizontali inter ea cadente DE, invenire in hac recta punctum B tale, ut via ABC sit facillima. Ubi prodeunt, quae in novissimis literis notavi circa elementa abscissarum ordinatarum et arcuum; si scilicet infinite parvum inter puncta A, B, C ponatur intervallum.

6) Jacob Bernoulli *Analysis magni problematis isoperimetrici.* Acta Eruditorum 1700. Giesel, Geschichte der Variationsrechnung, Torgau 1857. Diese Abhandlung enthält ausgezeichnete Analysen vieler älterer auf unsern Gegenstand bezüglicher Abhandlungen.

7) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietatibus gaudentes,* Lausanne und Genf 1744. Cap. III, Nr. 38.

8) *Mechanica sive motus scientia* Bd. 2, Petersburg 1736. Fehlerhafte Entwicklungen finden sich in den Nrn. 364, 400, 663, 679, 691. S. auch Giesel [6]). S. 11, Nr. 7.

9) In der *Mechanica* Bd. 2 [8]) wird hauptsächlich die Aufgabe der Brachistochrone in mannigfaltigen Wandlungen bearbeitet.

Nr. 361 ff.: Die Brachistochrone eines Punktes in der Ebene unter der Wirkung beliebiger Kräfte; die Formeln sind korrekt für den Fall, daß die Kräfte ein nur vom Ort abhängendes Potential haben.

Nr. 367 ff.: Die Kraft wirkt in vertikaler Richtung und ist Funktion allein der vertikalen Höhe des bewegten Punktes.

Nr. 373 f.: Spezielle Fälle von Nr. 367.

Nr. 375: Wie muß die Kraft wirken, damit eine gegebene Brachistochrone herauskomme? Die Untersuchung ist ein Fall dessen, was man neuerdings als das umgekehrte Problem der Variationsrechnung bezeichnet.

Nr. 377: Der Druck des Punktes auf die Brachistochrone ist das Doppelte der Normalkomponente der wirkenden Kraft.

Nr. 385 ff.: Die Brachistochrone unter der Wirkung einer Zentralkraft.

Nr. 390: Die Zentralkraft ist der Entfernung proportional. Fälle, in denen die Brachistochrone algebraisch, z. B. eine Hypozykloide ist.

Nr. 391: Die Zentralkraft wirkt nach dem Newtonschen Gesetz.

Nr. 393: Ein Endpunkt der gesuchten Kurve ist auf einer gegebenen Kurve veränderlich; diese muß mit der Brachistochrone einen rechten Winkel bilden. Das Resultat ist richtig unter der bei Nr. 361 ausgesprochenen Voraussetzung.

Nr. 396 ff.: Die orthogonale Trajektorie der von einem festen Punkte A ausgehenden Brachistochronen wird längs aller dieser Kurven von A aus in derselben Zeit erreicht, ist also die Synchrone im Sinne Joh. Bernoullis. S. Briefe an Leibniz [4]) S. 299, 308 ff.

Nr. 401 ff.: Die Brachistochrone von gegebener Länge. Ein von den Brüdern Bernoulli mehrfach, später wie es scheint nicht mehr behandeltes Problem vom Typus des isoperimetrischen. Die erste Lösung rührt von Jacob Bernoulli her, während Johann [4]) S. 391 noch schreibt: Quaerit delirus cui non respondet Homerus.

10) *Scientia navalis.* Pars prior, Petersburg 1749. Hauptsächlich sind zu beachten Kap. 5 überschrieben: de resistentia quam figurae planae in aqua motae

patiuntur, und Kap. 6 überschrieben: de resistentia quam corpora quaecunque in aqua motu directo lata patiuntur.

Nr. 526: Das Minimum des Integrals

$$\int \frac{dy^3}{ds^2}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

das den Widerstand einer in ihrer Ebene durch eine Flüssigkeit fortschreitenden Kurve darstellt oder eines zylindrischen Körpers, dessen Generatrices ihre Richtung behalten. Die Extremalen sind Gerade.

Nr. 531 ff.: Das Minimum des Integrals

$$\int \frac{dy^3}{dx^2 + dy^2}$$

bei gegebenem Wert der Fläche $\int y\,dx$. Es ergibt sich, wenn a, b, c Konstante sind, und $dy = p\,dx$ ist,

$$x = \frac{3ap^2 + ap^4}{(1+p^2)^2} - b, \qquad y = \frac{2ap^3}{(1+p^2)^2} - c,$$

$$\int y\,dx = \frac{2a^2p^5}{(1+p^2)^4} + 2a^2\int \frac{p^4\,dp}{(1+p^2)^4} - cx,$$

$$\int \frac{dy^3}{dx^2 + dy^2} = \frac{2ap^5}{(1+p^2)^3} - 4a\int \frac{p^4\,dp}{(1+p^2)^4}.$$

Nr. 537: Diskussion und Rektifikation,

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{2a(3p^2 - 1)}{3(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nr. 690: Das Minimum des Newtonschen Widerstandsintegrals

$$\int \frac{y\,dy^3}{dx^2 + dy^2},$$

das den Widerstand einer Rotationsfläche gibt, bei gegebenem Volumen $\int y^2\,dx$. Die Extremalen sind algebraisch und enthalten als Spezialfall gewisse in Nr. 532 erhaltene Kurven.

Nr. 705 ff.: Das Minimum des Widerstandes eines eingetauchten Körpers von gegebenem Volumen wird gesucht, wobei der Schnitt mit dem Wasserspiegel und ein zur Bewegungsrichtung senkrechter Vertikalschnitt, dem alle andern ähnlich sein sollen, gegeben sind.

Setzt man $ds = p\,dx$ und versteht unter t, w gegebene Funktionen von r; setzt man ferner

$$f(s, p) = \int_0^b \frac{t^3p^3s\,dr}{b^2w^2 + t^2p^2},$$

so wird das Minimum des Integrals

$$\int_0^a f(s, p)\,dx$$

gesucht bei vorgeschriebenem Wert des Integrals

$$\int_0^a s^2\,dx.$$

Nr. 728 ff.: Die Aufgabe der Nr. 705 wird so abgeändert, daß ein der Bewegungsrichtung paralleler Vertikalschnitt gegeben und die ihm parallelen Schnitte ihm ähnlich sind.

Wenn w und t gegebene Funktionen von r sind, und $du = q\,dy$ gesetzt wird, soll das Integral

$$\int\limits_{u=0}^{u=c} u\,dy \int\limits_{0}^{a} \frac{dr}{c^2 w^2 + t^2 q^2}$$

bei gegebenem Wert des Integrals

$$\int\limits_{u=0}^{u=c} u^2\,dy$$

ein Minimum werden.

Nr. 732: Diskussion eines Spezialfalles der Aufgabe Nr. 728, in dem der Integrand rational wird; der gegebene Vertikalschnitt ist ein Dreieck.

11) *Methodus inveniendi*[7]) Cap. II. Nr. 39.

Hinc ad problemata resolvenda, in quibus curva quaeritur habens valorem formulae $\int Z\,dx$ maximum vel minimum, existente $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, valor ipsius Z debet differentiari, atque in differentiali $M\,dx + N\,dy + P\,dp$ loco $M\,dx$ poni debeat 0, $N\,dy$ immutatum relinqui, tam vero loco $P\,dp$ scribi $-p\,dP$; et id quod emergit nihilo aequale poni. Hoc enim pacto obtinebitur $N\,dy - p\,dP = 0$, quae aequatio ob $dy = p\,dx$, transit in hanc

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

quae est ipsa quam invenimus. Desideratur itaque Methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimive loco $P\,dp$ scribi debere $-p\,dP$.

12) [3]) S. 6, 20.

13) Hölder, *Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis*, Göttinger Nachrichten Math. phys. Klasse 1896.

14) A. Mayer, *Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion.* Leipzig 1877. P. H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle* Bd. 2. Petersburg 1843.

15) A. Harnack, *Geschichte der kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften,* Berlin 1901. Bd. 2 (Urkundenband) Nr. 70[b].

16) H. A. Lorentz, *Encyklopädie der Math. Wissenschaften* Bd. 5, S. 133 f.

17) *Historia et origo Calculi differentialis.* Leibniz[1]) S. 392.

Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu, sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis.



Anhang I.

Strenge Fassung der Eulerschen Methode bei dem einfachsten Problem der Variationsrechnung.

Die Methode, nach der EULER die Differentialgleichungen der Probleme der Variationsrechnung ableitet, behält durch ihre Anschaulichkeit und die mannigfaltigen Wendungen, die EULER ihr zu geben weiß, immer etwas Anziehendes, und es ist deshalb ganz erklärlich, daß SCHELLBACH noch im 41. Bande des Crelleschen Journals einer mit der Eulerschen im wesentlichen identischen Methode vor dem Algorithmus von LAGRANGE den Vorzug gibt und sie in vielseitiger Weise zur Lösung interessanter Einzelaufgaben anwendet.

Es scheint daher die Frage nicht ohne Interesse zu sein, ob nicht die alte Methode bei passender Modifikation zu einer im modernen Sinne strengen Ableitung der Differentialgleichung wenigstens in den einfachsten Fällen benutzt werden kann. Zu zeigen, daß dies zutrifft, ist das Ziel der folgenden Zeilen.

I.

Wir setzen wie oben

$$J = \int_a^b f(x, y, p)\, dx, \quad y = \varphi(x), \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad y_\nu = \varphi(x_\nu)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad x_\nu = a + \nu h, \quad x_n = b, \quad \pi_\nu = \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{h};$$

wir bezeichnen ferner durch $\mathfrak{J}$ die Strecke von $x = a$ bis $x = b$, durch $\mathfrak{C}$ den dieser Strecke der Abszissenachse entsprechenden Bogen der Kurve $y = \varphi(x)$, und nehmen an, die Funktion $\varphi(x)$ sei auf der Strecke $\mathfrak{J}$ mit ihren ersten drei Ableitungen stetig. Endlich sei die Funktion $f(x, y, p)$ mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig in den auf dem Bogen $\mathfrak{C}$ erreichten Wertsystemen (x, y, p).

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir für die Ableitungen der Eulerschen Summe

$$S = h \sum_{\nu}^{0,\, n-1} f(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu)$$

die allgemeine Formel

$$\frac{1}{h}\frac{\partial S}{\partial y_\nu} = F_\nu = N(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu) - \frac{1}{h}\left[P(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu) - P(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \pi_{\nu-1})\right],$$

und es handelt sich zunächst darum, wenn man h unendlich abnehmen läßt, den Übergang dieses Ausdruckes in seinen Grenzwert

$$N - \frac{dP}{dx}$$

näher zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke gehen wir davon aus, daß bei den eingeführten Voraussetzungen die Gleichung

$$\pi_\nu = \varphi'(\xi), \quad x_\nu \leqq \xi \leqq x_{\nu+1}$$

angesetzt werden kann. Wenn daher m und m^0 solche positive Konstante sind, daß die Beziehung

$$m > m^0 > |\varphi''(x)|$$

auf der ganzen Strecke $\mathfrak{J}$ gilt, so folgt

$$|\varphi'(\xi) - \varphi'(x_\nu)| < mh,$$

und wenn man

$$\pi_\nu = \varphi'(x_\nu) + \eta_0 = p_\nu + \eta_0$$

setzt, so daß η_0 von ν abhängt,

$$|\eta_0| < mh.$$

Die Konstante m^0 wollen wir erst später benutzen.

Aus dem erhaltenen Resultat ergibt sich eine Beziehung zwischen $N(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu)$ und $N(x_\nu, y_\nu, p_\nu)$. Sind nämlich m_1 und $m_1{}^0$ wiederum positive Konstante und besteht auf der ganzen Kurve $\mathfrak{C}$ die Ungleichung

$$m_1 > m_1{}^0 > \left|\frac{\partial N}{\partial p}\right|,$$

die durch unsere Voraussetzungen sofort auf alle Wertsysteme (x, y, p) übertragen wird, die von den auf der Kurve $\mathfrak{C}$ erreichten hinreichend wenig abweichen, so findet man sofort

$$|N(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu) - N(x_\nu, y_\nu, p_\nu)| < m_1 |p_\nu - \pi_\nu|,$$

oder auf Grund der für η_0 oder $p_\nu - \pi_\nu$ aufgestellten Ungleichung, wenn

$$N(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu) = N(x_\nu, y_\nu, p_\nu) + \eta_1$$

gesetzt wird,

$$|\eta_1| < m m_1 h.$$

Man erhält ferner, wenn man die Bezeichnung

$$\Theta(x, h) = P\left(x, y, \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\right)$$

einführt, die Gleichung

$$P(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu) - P(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \pi_{\nu-1}) = \Theta(x_\nu, h) - \Theta(x_\nu - h, h)$$
$$= h \frac{\partial \Theta(x, h)}{\partial x}\Big|^{x=\xi_1}$$

wobei ξ_1 einen Wert der Strecke von $x_{\nu-1}$ bis x_ν bedeutet. Hiermit kombinieren wir die Identität

$$\frac{\partial \Theta(x, h)}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\varphi'(x+h) - \varphi'(x)}{h}\frac{\partial P}{\partial p}$$
$$= \frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial y} + \varphi''(\xi_2)\frac{\partial P}{\partial p}$$
$$= \frac{dP}{dx} + (\varphi''(\xi_2) - \varphi''(x))\frac{\partial P}{\partial p},$$

in der ξ_2 auf der Strecke von x bis $x+h$ liegt.

Wenn nun auf der Strecke $\mathfrak{J}$ die mit positiven Konstanten $m_2, \cdots$ gebildeten Ungleichungen

$$m_2 > m_2{}^0 > \frac{\partial P}{\partial p}, \quad m_3 > m_3{}^0 > \varphi'''(x), \quad m_4 > m_4{}^0 > \frac{d^2 P}{dx^2}$$

gelten, so folgt

$$\frac{\partial \Theta(x, h)}{\partial x} = \frac{dP}{dx} + \eta_2, \quad |\varphi''(\xi_2) - \varphi''(x_\nu)| < hm_3,$$

wobei

$$|\eta_2| < hm_2 m_3;$$

ferner

$$\frac{dP}{dx}\Big|^{\xi_1} - \frac{dP}{dx}\Big|^{x_\nu} = \eta_3, \quad |\eta_3| < m_4 h,$$

und schließlich

$$\frac{P(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu) - P(x_{\nu-1}, y_{\nu-1}, \pi_{\nu-1})}{h} = \frac{dP}{dx}\Big|^{x_\nu} + \eta_2 + \eta_3,$$
$$|\eta_2 + \eta_3| < h(m_2 m_3 + m_4).$$

Daraus erhalten wir auf Grund der für $N(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu)$ abgeleiteten Beziehung

$$F_\nu = N - \frac{dP}{dx}\Big|^{x_\nu} + \eta_1 - \eta_2 - \eta_3,$$
$$|\eta_1 - \eta_2 - \eta_3| \leqq h(mm_1 + m_2 m_3 + m_4).$$

II.

In der ganzen bisher durchgeführten Untersuchung wollen wir nun $\varphi(x)$ durch $\varphi(x) + u\psi(x)$ ersetzen, wobei u einen positiven Parameter

bedeutet, und $\psi(x)$ die vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften mit $\varphi(x)$ gemein hat. Geometrisch gesprochen betrachten wir eine Kurve $\mathfrak{C}(u)$, die durch die Gleichung

$$\bar{y} = \varphi(x) + u\psi(x)$$

dargestellt wird und bei kleinen Werten von u der Kurve $\mathfrak{C}$ benachbart ist. Wenn dann u etwa unter der positiven Schranke u_0 bleibt, und diese hinreichend klein genommen wird, wenn ferner x auf die Strecke $\mathfrak{J}$ beschränkt bleibt, so sind die Größen

$$\varphi''(x), \quad \frac{\partial N}{\partial p}, \quad \varphi'''(x), \quad \frac{\partial P}{\partial p}, \quad \frac{d^2 P}{d x^2}$$

stetige Funktionen von x und u, und ändern sich, indem man y durch $\bar{y}$ ersetzt, auf der ganzen Strecke $\mathfrak{J}$ um beliebig kleine Beträge, etwa um weniger als die kleinste der Größen

$$\tfrac{1}{2}(m - m^0), \quad \tfrac{1}{2}(m_1 - m_1^0), \cdots \quad \tfrac{1}{2}(m_4 - m_4^0).$$

Daraus folgt, daß für die Kurven $\mathfrak{C}(u)$ bei der angegebenen Beschränkung der Größe u die Werte $m, m_1, \cdots m_4$ ihre Bedeutung behalten. Bezeichnen wir daher durch $\bar{y}_\nu, \bar{p}_\nu, \bar{\pi}_\nu, \bar{\eta}_\nu$ die für diese Kurven gebildeten Analoga der Größen $y_\nu, p_\nu, \pi_\nu, \eta_\nu$, so folgt wie im Abschnitt I

$$\begin{aligned}\bar{F}_\nu &= N(x_\nu, \bar{y}_\nu, \bar{\pi}_\nu) - \frac{1}{h}[P(x_\nu, \bar{y}_\nu, \bar{\pi}_\nu) - P(x_{\nu-1}, \bar{y}_{\nu-1}, \bar{\pi}_{\nu-1})] \\ &= N - \frac{dP}{dx}\Big|^{x_\nu, \bar{y}_\nu} + \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_3, \\ &|\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_3| < h(m m_1 + m_2 m_3 + m_4),\end{aligned}$$

und das wesentliche Resultat ist, daß die rechte Seite der letzten Ungleichung von u unabhängig ist.

Jetzt sei auf der Kurve $\mathfrak{C}$ längs der ganzen Strecke $\mathfrak{J}$

$$N - \frac{dP}{dx} > g > 0$$

und g eine positive Konstante; g_1 liege zwischen 0 und g. Wenn man dann nötigenfalls u_0 verkleinert, kann man bewirken, daß für alle Kurven $\mathfrak{C}(u)$ die Beziehung

$$N - \frac{dP}{dx} > g_1 > 0$$

gilt. Liegt ferner g_2 zwischen g_1 und 0, so kann man zufolge der für $\bar{F}_\nu$ gefundenen Ungleichung h so klein wählen, daß für alle Kurven $\mathfrak{C}(u)$ und alle noch kleineren Werte von h die Ungleichung

$$\bar{F}_\nu > g_2$$

gilt; man braucht nur eine obere Schranke der Größe h so klein zu nehmen, daß

$$h(m m_1 + m_2 m_3 + m_4) < \tfrac{1}{2}(g_1 - g_2).$$

III.

Ersetzen wir y durch $\overline{y}$, so gehe S in $S(u)$ über; indem wir diese Substitution allgemein durch Überstreichen andeutet, finden wir

$$\frac{dS(u)}{du} = \sum_{\nu}^{1,\,n-1} \overline{\frac{\partial S}{\partial y_\nu}}\, \psi(x_\nu)$$

und hieraus

$$\frac{\Delta S}{u} = \frac{S(u) - S}{u} = \sum_{\nu}^{1,\,n-1} \psi(x_\nu)\, \overline{\frac{\partial S}{\partial y_\nu}}\Big|^{u_1} = h \sum_{\nu}^{1,\,n-1} \overline{F}_\nu\, \psi(x_\nu)\Big|^{u_1},$$

wobei u_1 einen Wert der Strecke von 0 bis u bedeutet.

Jetzt nehmen wir an, $\psi(x)$ sei auf der Strecke $\mathfrak{J}$ positiv mit Ausnahme der Endpunkte, in denen $\psi(x)$ verschwinde. Irgend zwei Stellen a_0 und b_0 zwischen a und b seien Teilpunkte bei einer n-Teilung des Intervalls $\mathfrak{J}$, so daß etwa

$$a_0 = x_m, \quad b_0 = x_{m+k}, \quad 0 < m < m + k < n.$$

Dann bleibt $\psi(x)$ auf der Strecke von a_0 bis b_0 über einer positiven Grenze γ; speziell ist

$$\psi(x_\mu) > \gamma,$$

sobald für μ eine der Zahlen $m, m+1, \cdots m+k$ gesetzt wird.

Wir bilden nun die Größe S für immer neue, wachsenden Werten von n entsprechende Teilungen, und zwar immer für solche, bei denen a_0 und b_0 Teilpunkte bleiben; dazu genügt es, für die Zahlen n Vielfache des ursprünglichen Wertes anzunehmen. Bei allen diesen Teilungen sind die Summanden der Summe

$$\sum_{\nu}^{1,\,n-1} \overline{F}_\nu\, \psi(x_\nu)\Big|^{u_1}$$

wegen der Ungleichung

$$\overline{F}_\nu > g_2$$

positiv; eine Gruppe von Gliedern ist

$$G = \sum_{\nu}^{m,\,m+k} \overline{F}_\nu\, \psi_\nu(x)\Big|^{u_1},$$

und für diese findet man sofort

$$G > g_2(k+1)\gamma.$$

Hieraus folgt auf grund der oben für ΔS aufgestellten Gleichung

$$\Delta S > G h u > g_2 \gamma h (k+1) u$$

oder

$$\Delta S > g_2 \gamma u (b_0 - a_0);$$

dabei kann u von vornherein so klein, wie man will, genommen sein.

Zweitens sei die Funktion $\psi(x)$ im Innern der Strecke $\mathfrak{J}$ negativ, und zwischen a_0 und b_0 kleiner als $-\gamma$; dann findet man ebenso

$$G < -g_2 h (k+1) \gamma, \quad \Delta S < -g_1 \gamma u (b_0 - a_0).$$

In dieser Ungleichung muß u_0, die obere Schranke der Größe u, vielleicht anders gewählt werden als vorher, da sie von dem Verlauf der Funktion $\psi(x)$ abhängt. Nimmt man die kleinere der beiden Schranken so findet man, daß die Ungleichungen

$$\Delta S > g_2 \gamma u (b_0 - a_0), \quad \Delta S < - g_2 \gamma u (b_0 - a_0),$$

deren rechte Seiten von n unabhängig sind, für ein gewisses, an den Wert 0 heranreichendes Gebiet der Größe u erfüllt sein können bei passender Wahl der Funktion $\psi(x)$.

Läßt man nun n in der angegebenen Weise unbegrenzt wachsen, so erhält man die Grenzübergänge

$$\lim S = J = \int_a^b f(x, y, p)\, dx,$$

$$\lim \bar{S} = \bar{J} = \int_a^b f(x, \bar{y}, \bar{p})\, dx,$$

$$\lim \Delta S = \bar{J} - J,$$

und da ΔS bei passender Wahl von $\psi(x)$ sowohl über einer positiven wie unter einer negativen von n unabhängigen Grenze liegt, so gilt dasselbe von $\bar{J} - J$. Da ferner u beliebig klein genommen werden kann, so hat man in beliebiger Nähe der Kurve $\mathfrak{C}$ benachbarte Kurven $\mathfrak{C}(u)$, für die die Differenz $\bar{J} - J$ sowohl positiv wie negativ werden kann; die Kurven $\mathfrak{C}(u)$ liegen nach der neueren Bezeichnung in einer engeren Nachbarschaft der Kurve $\mathfrak{C}$, mit der sie auch der Richtung nach in Punkten mit derselben Abszisse nahezu übereinstimmen.

Damit ist vollständig gezeigt, daß, wenn längs der Kurve $\mathfrak{C}$ die Ungleichung

$$N - \frac{dP}{dx} > 0$$

gilt, die Kurve $\mathfrak{C}$ sicher nicht das in der Variationsrechnung geforderte Extrem des Integrals J liefert, und zwar auch kein schwaches Extrem

nach der neueren Bezeichnung. Dasselbe Resultat ergibt sich offenbar aus der Annahme

$$N - \frac{dP}{dx} < 0$$

und damit ist die Eulersche Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

als notwendige Bedingung des Extrems nachgewiesen.

IV.

Man sieht, die strenge Fassung der Eulerschen Methode gelingt nicht ganz ohne Weitläufigkeiten, wenigstens, wenn man allen Schwierigkeiten ins Auge sehen will, und diese Weitläufigkeiten dürften in der Natur der Sache begründet sein. Denn, wenn das für die moderne Kritik Unbefriedigende der alten Methode darin besteht, daß die Reihenfolge der Grenzübergänge nicht festgehalten wird, so muß die Vertauschbarkeit derselben nachgewiesen werden, und dabei kommt es im allgemeinen darauf an, Grenzübergänge, die von Parametern abhängen, als gleichmäßig konvergent bezüglich der Parameter nachzuweisen.

Jedenfalls aber sind wir zu einem Beweis der Eulerschen Differentialgleichung gekommen, bei dem die Lagrangesche partielle Integration nicht vorkommt. In einem Punkte aber mußten wir uns doch der Methode von LAGRANGE annähern. EULER bezeichnet es in einem Briefe[1]) an LAGRANGE als besondere und überraschende Eigentümlichkeit der neuen Methode, daß alle Ordinaten der Kurve zugleich variiert werden, während EULER selbst in seiner ursprünglichen Methode nur eine Ordinate, bei den isoperimetrischen Problemen nach JACOB BERNOULLI eine begrenzte Anzahl von Ordinaten als veränderlich betrachtet hat. Wir haben ebenfalls auf dem festen Stück von a_0 bis b_0 Ordinaten variiert, deren Zahl bei den betrachteten Grenzübergängen unbegrenzt anwächst, und insofern haben wir uns von der Eulerschen Methode entfernen müssen.

Endlich sei noch ohne Beweis bemerkt, daß die Voraussetzung, $\varphi'''(x)$ existiere und sei stetig, weggelassen werden kann; nur werden dann etwas schwierigere Untersuchungen über die Schwankung stetiger Funktionen und die Abhängigkeit der Schwankung von einem in der Funktion auftretenden Parameter nötig.

---

1) Oeuvres de Lagrange Bd. 14, S. 144.

Anhang II.

Die Begründung der Variationsrechnung in der Theorie der analytischen Funktionen von Lagrange.

Die Methode, nach der Lagrange in der Theorie der analytischen Funktionen die Differentialgleichung der gesuchten Kurve beim einfachsten Problem der Variationsrechnung ableitet, scheint von keinem der späteren Autoren erörtert zu sein, verdient dies aber auch heute noch, weil sie zu einem Resultate führt, das zuerst mit komplizierteren Hilfsmitteln von P. du Bois Reymond[1]) abgeleitet und von verschiedenen Mathematikern beachtenswert gefunden ist.[2]) Für gewöhnlich verfährt man nämlich, wenn man die Kurve sucht, die dem Integral

$$\int f(x, y, p)\,dx \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

einen extremen Wert gibt, in der Weise, daß man von vornherein voraussetzt, die gesuchte Kurve habe nicht nur stetig veränderliche Tangenten, sondern auch die Krümmung ändere sich stetig, die gesuchte Funktion y sei also mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig. Werden diese Voraussetzungen wenigstens für ein Stück der gesuchten Kurve gemacht, so erhält man für dieses nach der gewöhnlichen Methode die Eulersche Differentialgleichung

$$N - \frac{dP}{dx} = 0, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

P. du Bois Reymond hat aber gezeigt, daß man dieses Resultat auch erzielen kann, ohne von der zweiten Ableitung der gesuchten Funktion y irgendwie Gebrauch zu machen, indem man nur, wenigstens für ein Stück der gesuchten Kurve, die erste Ableitung als stetig voraussetzt. Die die Eulersche Differentialgleichung erfüllende Kurve, die Extremale, wie wir jetzt sagen, ist danach in dem weiten Gebiet der nur mit stetiger Tangente versehenen Kurven die einzige, die möglicherweise ein Extrem des Integrals J liefern kann, während sie bei der gewöhnlichen Beweismethode nur unter den mit stetiger Krümmung versehenen Kurven als allein mit jener Eigenschaft ausgestattet erkannt wird. Dies Resultat ergibt sich wohl am leichtesten durch eine Modifikation der erwähnten Entwicklung von Lagrange.

---

1) Math. Annalen Bd. 15.

2) Zermelo, Math. Annalen Bd. 58. Hahn, Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. 14.

I.

Das Integral

$$J = \int_a^b f(x, y, p)\,dx,$$

dessen Extrem gesucht wird, sei zunächst mit der gesuchten Funktion y gebildet; in den zugehörigen Wertsystemen (x, y, p) seien die ersten partiellen Ableitungen von f stetige Funktion ihrer drei Argumente, N und P also längs der gesuchten Kurve stetige Funktionen von x. Die gesuchte Funktion y werde um $\varepsilon\eta$ vermehrt, wobei ε eine Konstante, η eine stetige Funktion von x sei, die an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verschwinde und eine integrierbare erste Ableitung besitze. Die Größe

$$\varphi(\varepsilon) = \int_a^b f(x, y + \varepsilon\eta, p + \varepsilon\eta')\,dx$$

muß dann an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Extrem besitzen, woraus sofort die Gleichung

$$\varphi'(0) = \int_a^b (N\eta + P\eta')\,dx = 0.$$

hervorgeht.

Bei der gewöhnlichen Methode transformiert man das Glied

$$\int P\eta'\,dx$$

durch partielle Integration, wobei die Größe $\frac{dP}{dx}$ benutzt wird, deren Existenz aber fraglich bleibt, solange über $\frac{d^2y}{dx^2}$ nichts vorausgesetzt wird. An der angeführten Stelle dagegen leitet Lagrange die Eulersche Gleichung als Integrabilitätsbedingung des Ausdrucks

$$N\eta\,dx + P\,d\eta$$

ab, der integrierbar sei, weil sein Integral den Wert Null habe. Diesen noch nicht ganz bestimmten Gedanken benutzen wir, um die gewöhnlich angewandte partielle Integration in folgender Weise zu umgehen.

Man trage x als Abszisse, η als Ordinate auf und bezeichne durch A und B die Punkte der x-Achse, deren Abszissen a und b sind, durch $\mathfrak{G}$ das Gebiet zwischen den Geraden $x = a$ und $x = b$, dem wir die Punkte A und B zurechnen wollen. Dann besagt die oben

erhaltene notwendige Bedingung des Extrems des Integrals J, daß das Integral

$$U = \int (N\eta\, dx + P\, d\eta),$$

längs einer Kurve AB erstreckt, verschwindet, sobald η eine eindeutige stetige, mit integrierbarer Ableitung versehene Funktion von x ist, die an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verschwindet. Man integriere z. B. längs des Polygons $ACDEB$, in dem die Ecken CDE dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehören und C die größte, E die kleinste Abszisse hat; keine Seite laufe der η-Achse parallel. Dann kann man auch längs der Polygone $ACEB$, ACB und AEB integrieren und erhält die Gleichungen

$$U_{ACDEB} = 0, \quad U_{ACEB} = 0, \quad U_{ACB} = 0, \quad U_{AEB} = 0,$$

mithin auch

$$U_{CDE} = U_{CE}, \quad U_{CDEC} = 0, \quad U_{BCEB} = 0, \quad U_{ACEA} = 0,$$

d. h. das Integral U, über den Umfang eines dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehörigen Dreiecks erstreckt, dessen Seiten der η-Achse nicht parallel sind, verschwindet.

Hieraus folgt unmittelbar, daß das Integral U_{AP}, geradlinig integriert, denselben Wert ergibt, wie wenn man von A nach P längs irgend eines Polygonzuges integriert, dessen Seiten nie die Richtung der η-Achse haben. Die hiermit im Gebiete $\mathfrak{G}$ definierte eindeutige Funktion des Ortes von P, also U_{AP}, bezeichnen wir durch $\varphi(x, \eta)$, wenn P die Koordinaten x, η hat. Hat ferner P_1 die Koordinaten $x + \xi$, $\eta + \omega$, wobei ξ von Null verschieden sei, so kann man setzen

$$U_{AP_1} = U_{AP} + U_{PP_1},$$

oder

$$\varphi(x + \xi, \eta + \omega) = \varphi(x, \eta) + \int_0^1 [N(x + t\xi)(\eta + t\omega)\xi + P(x + t\xi)\omega]\, dt.$$

Wendet man die gewöhnliche Mittelwertformel der Integralrechnung an, und setzt $\omega = \alpha\xi$, so ergibt sich hieraus

$$\frac{\varphi(x + \xi, \eta + \alpha\xi) - \varphi(x, \eta)}{\xi} = N(x + \theta\xi)(\eta + \theta\omega) + P(x + \theta\xi)\alpha,$$

wobei θ ein Wert der Strecke von 0 bis 1 ist; hält man jetzt α fest und läßt ξ unendlich abnehmen, so folgt, da N und P stetige Funktionen von x sind,

$$\lim_{\xi = 0} \frac{\varphi(x + \xi, \eta + \alpha\xi) - \varphi(x, \eta)}{\xi} = N\eta + P\alpha;$$

speziell wenn $\alpha = 0$ gesetzt wird, ergibt sich

$$\lim_{\xi=0} \frac{\varphi(x+\xi,\ \eta) - \varphi(x,\ \eta)}{\xi} = N\eta.$$

Die Funktion $\varphi(x,\ \eta)$ hat also eine stetige Ableitung nach x und zwar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x(x,\ \eta) = N\eta.$$

Aus dieser Gleichung erschließen wir durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$S = \frac{\varphi(x+\xi,\ \eta+\alpha\xi) - \varphi(x,\ \eta+\alpha\xi)}{\xi} = \varphi_x(x+\theta\xi,\ \eta+\alpha\xi),$$

wobei θ wieder dieselbe Bedeutung wie oben hat. Setzt man ferner

$$T = \frac{\varphi(x,\ \eta+\alpha\xi) - \varphi(x,\ \eta)}{\xi},$$

so ergibt eine soeben erhaltene Gleichung

$$\lim_{\xi=0} (S+T) = \lim_{\xi=0} \frac{\varphi(x+\xi,\ \eta+\alpha\xi) - \varphi(x,\ \eta)}{\xi} = N\eta + P\alpha.$$

Anderseits ist wegen der Stetigkeit der Funktion $\varphi_x(x,\ \eta)$ offenbar

$$\lim_{\xi=0} S = \varphi_x(x,\ \eta) = N\eta;$$

somit folgt, daß auch $\lim\limits_{\xi=0} T$ existiert, und man findet

$$\lim_{\xi=0} T = P\alpha, \quad \lim_{\xi=0} \frac{\varphi(x,\ \eta+\alpha\xi) - \varphi(x,\ \eta)}{\alpha\xi} = P.$$

Da nun auch $\alpha = 1$ gesetzt werden kann, zeigt die erhaltene Gleichung, daß $\varphi(x,\ \eta)$ auch eine stetige Ableitung nach η besitzt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \varphi_\eta(x,\ \eta) = P.$$

Auf Grund der abgeleiteten Eigenschaften der Funktion $\varphi(x,\ \eta)$ gelten offenbar folgende Gleichungen:

$$\varphi(x,\ \eta+\omega) - \varphi(x,\ \eta) = \int_\eta^{\eta+\omega} P\,d\eta = P(x)\omega,$$

$$\varphi(x+\xi,\ \eta+\omega) - \varphi(x+\xi,\ \eta) = P(x+\xi)\omega,$$

$$\varphi(x+\xi,\ \eta) - \varphi(x,\ \eta) = \int_x^{x+\xi} N\eta\,dx = \eta\int_x^{x+\xi} N\,dx,$$

$$\varphi(x+\xi,\ \eta+\omega) - \varphi(x,\ \eta+\omega) = (\eta+\omega)\int_x^{x+\xi} N\,dx.$$

Bildet man nun die Differenz der ersten beiden und der letzten beiden Gleichungen, so tritt links dieselbe Größe auf, mithin auch rechts, und man erhält die Gleichung

$$\omega(P(x+\xi)-P(x))=\omega\int_x^{x+\xi} N\,dx,$$

$$\frac{P(x+\xi)-P(x)}{\xi}=\frac{1}{\xi}\int_x^{x+\xi} N\,dx=N(x+\theta\,\xi),$$

wobei θ die frühere Bedeutung hat. Da nun N stetig ist, erhält man, indem man ξ unendlich abnehmen läßt, das Resultat, daß die Ableitung $\frac{dP}{dx}$ existiert, und die Gleichung

$$\frac{dP}{dx}=N$$

gilt, d. h. die Eulersche Gleichung der Extremalen.

II.

Jetzt ist es leicht, ein analoges Resultat auch für die Probleme des gebundenen Extrems zu erzielen; soll etwa das Integral

$$J=\int_a^b f(x,\ y,\ p)\,dx$$

einen extremen Wert annehmen, während das Integral

$$J^0=\int_a^b f^0(x,\ y,\ p)\,dx$$

den vorgeschriebenen Wert A erhält, so braucht man wiederum, um die Eulersche Differentialgleichung zu erhalten, nur vorauszusetzen, daß die gesuchte Funktion y eine stetige erste Ableitung besitze.

Man betrachte, um dies einzusehen, neben der gesuchten Funktion y die benachbarte $y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2$, in der ε_1 und ε_2 Konstante, η_1 und η_2 Funktionen von den im Abschnitt I für η geforderten Eigenschaften sind; die mit dieser neuen Funktion y gebildeten Integrale J und J^0 seien $F(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ und $F^0(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$. Dann kann die isoperimetrische Bedingung dadurch erfüllt werden, daß man die Variablen ε der Gleichung

$$F^0(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)-A=0$$

unterwirft, und nun die Bedingung dafür sucht, daß die Größe $F(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ an der Stelle $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ ein Extrem habe. Das gibt die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2} d\varepsilon_2 = 0, \quad \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon_2} d\varepsilon_2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon_2} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_2}\frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon_1} = 0,$$

in denen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ zu setzen ist.

Nun findet man sofort, indem man

$$N^0 = \frac{\partial f^0}{\partial y}, \quad P^0 = \frac{\partial f^0}{\partial p}$$

setzt und der Funktion f^0 die oben von f geforderten Eigenschaften beilegt,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\nu}\right|^{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = \int_a^b (N\eta_\nu + P\eta_\nu')\,dx,$$

$$\left.\frac{\partial F^0}{\partial \varepsilon_\nu}\right|^{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = \int_a^b (N^0\eta_\nu + P^0\eta_\nu')\,dx; \qquad (\nu = 1, 2)$$

hält man also die Funktion η_2 fest, so ergibt sich aus der dritten der erhaltenen notwendigen Bedingungen des Extrems für jede beliebige Funktion η_1 eine Gleichung

$$\int_a^b [(N + \lambda N^0)\eta_1 + (P + \lambda P^0)\eta_1']\,dx = 0,$$

in der λ eine durch η_2 bestimmte, von η_1 unabhängige Konstante bedeutet. Da nun η_1 nur derselben Anforderung wie η im Abschnitt I unterworfen ist, und die letzte Gleichung genau dieselbe Form hat und in demselben Sinne zu verstehen ist, wie dort die Gleichung

$$\int_a^b (N\eta + P\eta')\,dx = 0,$$

so führen die Schlüsse des Abschnittes I ohne jede Abänderung zu der Gleichung

$$N + \lambda N^0 = \frac{d(P + \lambda P^0)}{dx},$$

d. h. zu der Eulerschen Gleichung beim Problem des gebundenen Extrems unter der zu Anfang dieses Abschnitts angegebenen weiten Voraussetzung hinsichtlich der gesuchten Kurve.

III.

Die entwickelte Methode ist mit einer gewissen Modifikation auch auf solche Probleme des Extrems anzuwenden, bei denen unter

dem Integralzeichen höhere Ableitungen der gesuchten Funktion vorkommen.

Es sei etwa

$$J = \int_a^b f(x, y, p, q)\,dx \qquad \left(q = \frac{dp}{dx}\right)$$

durch passende Wahl der Funktion y extrem zu machen, wobei die Werte von y und p an den Stellen $x = a$ und $x = b$ gegeben seien. Damit die Aufgabe einen Sinn habe, setzen wir von vornherein voraus, die gesuchte Funktion habe eine stetige erste und zweite Ableitung; beim gewöhnlichen Beweis der Eulerschen Gleichung werden auch ihre dritte und vierte Ableitung benutzt, über die wir hier nichts, auch nicht ihre Existenz voraussetzen wollen. Unser Verfahren führt auch dann noch zum Ziel.

Setzt man voraus, daß die Größen

$$N = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial q}$$

in den der gesuchten Kurve entsprechenden Wertsystemen (x, y, p, q) stetig sind, und versteht unter η eine zweimal differenzierbare Funktion, die mit ihrer ersten Ableitung an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verschwindet, so erhält man zunächst wie im Abschnitt I als notwendige Bedingung des Extrems

$$\int_a^b (N\eta + P\eta' + Q\eta'')\,dx = 0.$$

Indem man ferner eine neue Variable ζ durch die Gleichungen

$$\eta' - \zeta = 0, \quad \eta = \int_a^x \zeta\,dx$$

einführt und eine beliebige Größe λ nennt, erhält man

$$\int_a^b (N\eta + P\zeta + Q\zeta' + \lambda\eta' - \lambda\zeta)\,dx = 0.$$

Jetzt werde λ so bestimmt, daß die Gleichung

$$\int_a^b (N\eta + \lambda\eta')\,dx = 0$$

gilt; dazu genügt es,

$$\lambda' = N$$

zu setzen, da dann die linke Seite der letzten Gleichung den Wert

$$\lambda \eta \Big|_a^b = 0$$

erhält. Die notwendige Bedingung des Extrems wird jetzt

$$\int_a^b [(P - \lambda)\zeta + Q\zeta'] dx = 0,$$

wobei die Funktion ζ an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verschwinden und die Bedingung

$$\eta \Big|^b = \int_a^b \zeta dx = 0$$

erfüllen muß. Setzen wir speziell

$$\zeta = \varepsilon_1 \zeta_1 + \varepsilon_2 \zeta_2,$$

wobei ε_1, ε_2 Konstante und ζ_1, ζ_2 ganz beliebige stetige, mit integrierbarer Ableitung versehene Funktionen von x sind, die an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verschwinden, so kann man die Konstanten ε_1 und ε_2, um die letzte Bedingung zu erfüllen, so wählen, daß

$$\varepsilon_1 \int_a^b \zeta_1 dx + \varepsilon_2 \int_a^b \zeta_2 dx = 0.$$

Dann besteht die Gleichung

$$\varepsilon_1 \int_a^b [(P - \lambda)\zeta_1 + Q\zeta_1'] dx + \varepsilon_2 \int_a^b [(P - \lambda)\zeta_2 + Q\zeta_2'] dx = 0,$$

und das Resultat der Elimination von ε_1 und ε_2 kann man schreiben

$$\int_a^b [(P - \lambda - \mu)\zeta_1 + Q\zeta_1'] dx = 0,$$

wobei μ eine durch ζ_2 bestimmte, von ζ_1 unabhängige Konstante bedeutet.

Hiermit ist man wieder auf eine Gleichung von der Form der im Abschnitt I behandelten gekommen, und von der Größe ζ_1 werden nur genau dieselben Eigenschaften gefordert wie dort von η. Man schließt also auf Grund der früheren Entwicklungen unmittelbar, daß $\frac{dQ}{dx}$ existiert und die Gleichung

$$\frac{dQ}{dx} = P - \lambda - \mu$$

oder

$$\frac{dQ}{dx} = P - \int N dx$$

gilt, eine Gleichung, aus der die Eulersche folgt, indem man nach x differenziert.

Daß auch diese Operation stets einen Sinn hat, d. h. daß die bei ihr formal gebildeten Ableitungen existieren, kann auch noch leicht unter gewissen zulässigen Voraussetzungen gezeigt werden. Wir wollen annehmen, in den auf der gesuchten Kurve erreichten Wertsystemen (x, y, p, q) seien die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $f(x, y, p, q)$ stetig und die Größe

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$$

von Null verschieden. Setzt man dann

$$\bar{x} = x + h, \quad y\Big|^{x+h} = \bar{y}, \quad p\Big|^{x+h} = \bar{p}, \quad q\Big|^{x+h} = \bar{q},$$

so ist

$$Q(x+h) = Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q}) = Q(x, y, p, q) + h\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_m + (\bar{y} - y)\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_m$$
$$+ (\bar{p} - p)\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_m + (\bar{q} - q)\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_m,$$

wobei in den mit dem Suffix m versehenen Ausdrücken ein Argumentsystem

$$x + \theta h, \quad y + \theta(\bar{y} - y), \quad p + \theta(\bar{p} - p), \quad q + \theta(\bar{q} - q), \quad 0 \leqq \theta \leqq 1$$

zu nehmen ist. Da nun die Quotienten

$$\frac{Q(x+h) - Q(x)}{h}, \quad \frac{\bar{y} - y}{h}, \quad \frac{\bar{p} - p}{h},$$

wenn man h unendlich abnehmen läßt, den Grenzen $\frac{dQ}{dx}$, p, q zustreben, und $\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_m$ von Null verschieden ist, so folgt, daß auch $\frac{\bar{q} - q}{h}$ sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, und zwar der Größe

$$\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{\partial Q}{\partial x} - p\frac{\partial Q}{\partial y} - q\frac{\partial Q}{\partial p}\right) : \frac{\partial Q}{\partial q}.$$

Somit existiert $\frac{dq}{dx}$ und ist eine stetige Funktion von x. Man kann demnach auch $\frac{dP}{dx}$ bilden und ersieht aus der Gleichung

$$\frac{dQ}{dx} = P - \int N\,dx,$$

daß $\frac{d^2Q}{dx^2}$ existiert; so erhält man schließlich die Eulersche Gleichung in der gewohnten Gestalt:

$$\frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{dP}{dx} + N = 0.$$

Anhang III.

Eulers Methode, die Extreme durch Differentialgleichungen definierter Größen zu finden.

Als die eigentümlichste und größte Leistung EULERS auf dem Gebiete der Variationsrechnung haben wir bezeichnet, daß es ihm gelingt, einer Größe v, die durch eine Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = f(x, y, p, v) \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

und den Anfangswert $v(a)$ definiert ist, an der Stelle $x = b$ einen extremen Wert zu geben, d. h. die Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $y = \varphi(x)$ aufzustellen, die sich aus der Forderung dieses Extrems als notwendige Bedingung ergibt. In unmittelbarem Zusammenhang hiermit gelingt es ihm auch, die notwendige Bedingung für das Extrem des Integrals

$$J = \int \bar{f}(x, y, p, v)\,dx$$

aufzustellen, in dem die oben definierte Größe v vorkommt. Die Methode, durch die EULER diese Resultate erzielt, und deren Kern sich im § 38 des dritten Kapitels der Methodus inveniendi findet, ist in der vortrefflichen Abhandlung von GIESEL über die Geschichte der Variationsrechnung (Torgau 1857) eingehend dargestellt, und zwar in den ursprünglichen, etwas schwerfälligen Bezeichnungen; sonst haben, wie es scheint, alle Autoren, die diese Methode erwähnen, sich im Anschluß an LAGRANGE damit begnügt, die Methode als schwierig und weitläufig zu bezeichnen und sich darüber zu wundern, daß schließlich die einfachen Formeln herauskommen, die man als Einzelfälle der LAGRANGEschen Multiplikatorentheorie einzuordnen pflegt. Wir glauben daher den Lesern EULERS einen Dienst zu erweisen, wenn wir die bezeichnete

Entwicklung in eine moderne, übersichtliche Form bringen, in der auch die Lücken klar ersichtlich werden.

I.

Wir betrachten zunächst das einfachere der beiden bezeichneten Probleme, setzen wie im Anhang I

$$x_0 = a, \quad x_\nu = a + \nu h, \quad x_n = b, \quad y_\nu = \varphi(x_\nu), \quad \pi_\nu = \frac{y_{\nu+1} - y_\nu}{h},$$

und ersetzen die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dx} = f(x, y, p, v)$$

durch die Differenzengleichung

$$v_{\nu+1} - v_\nu = hf(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu, v_\nu), \quad (\nu = 0, 1, \ldots n-1)$$

aus der sich die Größen v_ν, insbesondere auch v_n, wenn v_0, y_0 und y_n als gegeben gelten, als Funktionen der Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ ergeben. Man erhält für diese Funktionen offenbar

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial y_\varrho} = 0,$$

sobald $\nu < \varrho$; setzt man ferner

$$\frac{\partial f}{\partial v} = L, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = P$$

und bezeichnet durch den Index ν an diesen Buchstaben, daß das Wertsystem $(x_\nu, y_\nu, \pi_\nu, v_\nu)$ eingesetzt wird, so findet man sofort

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\varrho}{\partial y_\varrho} &= P_{\varrho-1}, \\
\frac{\partial v_{\varrho+1}}{\partial y_\varrho} &= \frac{\partial v_\varrho}{\partial y_\varrho} + N_\varrho h - P_\varrho + L_\varrho h \frac{\partial v_\varrho}{\partial y_\varrho}, \\
\frac{\partial v_{\varrho+2}}{\partial y_\varrho} &= \frac{\partial v_{\varrho+1}}{\partial y_\varrho}(1 + hL_{\varrho+1}), \\
&\vdots \\
\frac{\partial v_{\varrho+\sigma+1}}{\partial y_\varrho} &= \frac{\partial v_{\varrho+\sigma}}{\partial y_\varrho}(1 + hL_{\varrho+\sigma}),
\end{aligned}$$

wobei σ eine beliebige positive ganze Zahl ist; indem man ϱ festhält und allgemein

$$V_\nu = \frac{\partial v_\nu}{\partial y_\varrho}$$

setzt, kann man die erhaltenen Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$V_\varrho = P_{\varrho-1},$$
$$V_{\varrho+1} = P_{\varrho-1} - P_\varrho + h(N_\varrho + L_\varrho P_{\varrho-1}),$$
$$V_{\varrho+\sigma+1} - V_{\varrho+\sigma} = h L_{\varrho+\sigma+1} V_{\varrho+\sigma}.$$

Jetzt lassen wir h unendlich abnehmen, und fassen die Größen V_ν als Einzelwerte einer Größe V auf, die wir als stetige und differenzierbare Funktion von x betrachten; wir nehmen ferner an, daß bei allen den abnehmenden Werten von h entsprechenden Wertsystemen x_ν immer x_ϱ in einen bestimmten, zwischen a und b liegenden Wert ξ falle. Dann geht die letzte Differenzengleichung in die an die Bedingung $x > \xi$ gebundene Differentialgleichung

$$dV = LVdx$$

über, und es ergibt sich, sobald $x \geqq \xi$ ist,

$$V = V(\xi) e^{\int\limits_\xi^x L dx}.$$

Der oben für $V_{\varrho+1}$ gefundene Wert ergibt aber

$$V(\xi) = -dP + (N + LP)dx\,|^\xi;$$

somit erhalten wir speziell, wenn $x = b$ gesetzt und von Differenzen zu Differentialen übergegangen wird,

$$V(b) = (-dP + (N + LP)dx)\,|^\xi.\quad e^{\int\limits_\xi^b L dx},$$

und $V(b)$ ist durch einen formalen Grenzübergang aus $\frac{\partial v_n}{\partial y_\varrho}$ hervorgegangen. Wenn daher die Größe $v\,|^b = \lim\limits_{h=0} v_n$ einen extremen Wert annehmen soll, und wir erlauben uns, die gewöhnliche Extremsbedingung der Differentialrechnung in der Gestalt

$$\frac{\partial v_n}{\partial y_\varrho} = 0$$

zu benutzen, deren linke Seite wir durch ihre formal gebildete Grenze $V(b)$ ersetzen, so ergibt sich die richtige Differentialgleichung

$$-\frac{dP}{dx} + N + LP = 0.$$

II.

Handelt es sich um das Extrem des Integrals J, so ersetzen wir dieses durch die Summe

$$S = h \sum_{\nu}^{0,\, n-1} \bar{f}(x_\nu,\ y_\nu,\ \pi_\nu,\ v_\nu)$$

und differenzieren wiederum nach y_ϱ; setzen wir

$$\bar{L} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}, \qquad \bar{N} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}, \qquad \bar{P} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial p}$$

und behalten im übrigen die Bezeichnungen des Abschnittes I bei, so ergibt sich

$$\frac{\partial S}{\partial y_\varrho} = h \bar{N}_\varrho + \bar{P}_{\varrho - 1} - \bar{P}_\varrho + h \sum_{\nu}^{\varrho,\, n-1} \bar{L}_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial y_\varrho}.$$

Um nun die Summe

$$\sum_{\nu}^{\varrho,\, n-1} \bar{L}_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial y_\varrho} = \sum_{\nu}^{\varrho,\, n-1} \bar{L}_\nu V_\nu$$

zu berechnen, setzen wir, wenn $\mu > \varrho$,

$$V_\mu W_\mu = h \sum_{\nu}^{\mu,\, n-1} \bar{L}_\nu V_\nu;$$

dann ist offenbar

$$\sum_{\nu}^{\varrho,\, n-1} V_\nu \bar{L}_\nu = \bar{L}_\varrho V_\varrho + V_{\varrho+1} W_{\varrho+1},$$

und man findet aus der Definition der Größen W

$$V_{\mu+1} W_{\mu+1} = V_\mu W_\mu - h \bar{L}_\mu V_\mu.$$

Anderseits haben wir früher die Gleichung

$$V_{\mu+1} = V_\mu (1 + h L_{\mu+1})$$

gefunden; somit folgt

$$V_{\mu+1} W_{\mu+1} = V_\mu W_{\mu+1} (1 + h L_{\mu+1}),$$
$$W_{\mu+1} - W_\mu = - h \bar{L}_\mu - h L_{\mu+1} W_{\mu+1}.$$

Macht man nun wieder wie oben $\lim h = 0$, so geht diese Gleichung in die Differentialgleichung

$$\frac{dW}{dx} + LW + \bar{L} = 0$$

über, und da $\lim W_{n-1} = 0$, hat man unter W diejenige Lösung zu verstehen, für die die Beziehung

$$W|^b = 0$$

gilt.

Da ferner der oben für $\frac{\partial S}{\partial y_\varrho}$ gefundene Ausdruck und die Definition der Produkte $V_\nu W_\nu$ die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial y_\varrho} = h\bar{N}_\varrho + \bar{P}_{\varrho-1} - \bar{P}_\varrho + h\bar{L}_\varrho V_\varrho + W_{\varrho+1} V_{\varrho+1}$$

ergeben, so findet man, indem man nach Abschnitt I die Größen V_ϱ und $V_{\varrho+1}$ in P und

$$(N + LP)\,dx - dP$$

übergehen läßt, als Grenzgestalt der Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial y_\varrho} = 0$$

die Extremsbedingung

$$\bar{N}\,dx - d\bar{P} + \bar{L}P dx + W(-\,dP\,(N + LP)\,dx) = 0\,,$$

oder indem man die für W geltende Differentialgleichung benutzt,

$$\bar{N}\,dx - d\bar{P}\left(\frac{dW}{dx} + LW\right) dx + W(-\,dP + (N + LP)\,dx) = 0$$

oder endlich

$$\bar{N} - \frac{d\bar{P}}{dx} + WN - \frac{d(WP)}{dx} = 0\,.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den oben erhaltenen

$$\frac{dW}{dx} + LW + \bar{L} = 0, \qquad W|^b = 0$$

löst also das vorgelegte Problem; dabei ist W mit dem Multiplikator der Lagrangeschen Methode identisch.

Setzt man speziell

$$f = \bar{f}, \qquad W + 1 = U,$$

so erhält man

$$NU - \frac{d(PU)}{dx} = 0\,, \qquad \frac{dU}{dx} + LU = 0\,, \qquad U|^b = 1\,,$$

$$U = e^{-\int_x^b L\,dx}\,, \qquad N - \frac{dP}{dx} + LP = 0,$$

wodurch man wieder auf die Endformeln des Abschnitts I zurückkommt.

Will man diese Entwicklungen streng gestalten, wie dies im ersten Anhang für den einfachsten Fall geschehen ist, so wird man die Annäherung einer durch eine Differenzengleichung definierten Größenreihe an das Integral einer entsprechenden Differentialgleichung untersuchen müssen, und besonders die gleichmäßige Konvergenz dieses Grenzprozesses für den Fall, daß die Differenzengleichung Parameter enthält, unter gewissen Bedingungen festzustellen suchen. Die Untersuchung dürfte auf Grund einer exakten Form des von Cauchy gegebenen, von Lipschitz vervollkommneten Beweises für die Existenz der Integrale von Differentialgleichungen durchführbar sein.



L. Euler

ÜBER BAHNBRECHENDE ARBEITEN
LEONHARD EULERS
AUS DER REINEN MATHEMATIK

VON

FELIX MÜLLER
IN FRIEDENAU

Die Festschrift, welche die Berliner Mathematische Gesellschaft zur Feier des zweihundertsten Geburtstages LEONHARD EULERS, am 15. April 1907, herauszugeben beschlossen hat, soll dem ehrenden Gedächtnis eines der größten Mathematiker gewidmet sein. Mögen ihm auch einige andere Mathematiker den Rang „des Größten“ unter ihnen streitig machen, an Fruchtbarkeit der Produktion hat ihn keiner übertroffen. Außer seinen Einzelwerken, welche ungefähr 50 Bände umfassen, zeugen mehr als 800 Abhandlungen, die in 21 Zeitschriften veröffentlicht wurden, von der rastlosen Tätigkeit EULERS auf fast allen Gebieten der mathematischen Forschung. Und die Tätigkeit eines Genies wie EULER ist um so höher anzuschlagen, als sie meist von bahnbrechendem Erfolge war.

Man hat den Umfang der Werke EULERS auf 25 Quartbände zu je 640 Seiten geschätzt. Leider vermissen wir noch heute eine Gesamtausgabe der Werke LEONHARD EULERS. Die Petersburger Akademie, eingedenk der Ehrenpflicht gegen ihr hervorragendstes Mitglied, entwarf einen Plan zur Herausgabe der Werke EULERS. Nach Veröffentlichung seiner „Opera minora collecta“[1]) und der „Opera posthuma“[2]) schreckte sie jedoch vor den Kosten einer Gesamtausgabe der Werke zurück. Neuerdings hat sich Herr JOHANN G. HAGEN, der Verfasser der Synopsis der höheren Mathematik, auf das eifrigste, aber leider vergeblich, bemüht, in Amerika einen Mäcen der Wissenschaft für die pekuniäre Unterstützung des Unternehmens zu gewinnen. Um eine Gesamtausgabe vorzubereiten, hat Herr HAGEN mit großem Fleiße ein systematisches Verzeichnis der Schriften EULERS

---

1) LEONARDI EULERI *Opera minora collecta I, II. Commentationes arithmeticae collectae.* Auspiciis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae ediderunt auctoris praenepotes P. H. FUSS et NIC. FUSS. Petropoli 1849.

2) LEONARDI EULERI *Opera posthuma mathematica et physica,* anno 1844 detecta, quae Academiae Scientiarum Petropolitanae obtulerunt ejusque auspiciis ediderunt auctoris praenepotes PAULUS HENRICUS FUSS et NICOLAUS FUSS. 2 vol. Petropoli 1862.

zusammengestellt[1]), zu dem G. Valentin[2]) und Friedrich Engel[3]) einige Ergänzungen lieferten. Bibliographische Ergänzungen des Hagenschen Index enthält ebenfalls ein Aufsatz, den ich kürzlich in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veröffentlicht habe.[4]) Er hat den Zweck, das Studium der Eulerschen Werke zu erleichtern, und gibt einen Beitrag zur Erschließung der literarischen Quellen, auf welche dieses Studium zurückzuführen ist. Zunächst gebe ich darin eine kurze Übersicht über die Einzelwerke Eulers. Da sie in mehreren Auflagen erschienen und zum großen Teil ins Deutsche und andere Sprachen übersetzt[5]), also leicht zugänglich sind, so haben sie das Bedürfnis einer Gesamtausgabe der Werke Eulers in geringerem Grade hervorgerufen, als die zahlreichen Abhandlungen des großen Mathematikers. Die meisten der Abhandlungen sind in seltenen und oft schwer zugänglichen Akademie-Schriften vergraben. Um das Auffinden zu erleichtern, habe ich in dem genannten Aufsatze für die Bände der vier ersten Serien der Publikationen der Petersburger Akademie (ann. 1726—1802), sowie für die Bände der „Histoire de l'Académie de Berlin avec les Mémoires“ (ann. 1745—1769) den laufenden Jahrgängen das Erscheinungsjahr hinzugefügt, das im Hagenschen Index fehlt. Die Verwechselung beider Jahreszahlen, die in Zitaten Eulerscher Abhandlungen leider sehr häufig vorkommt, erschwert das Quellenstudium ungemein. Von den Abhandlungen Eulers sind, wie wir im folgenden sehen werden, bis heut nur sehr wenige in Sonderausgaben veröffentlicht worden. Da die Aussicht, eine Gesamtausgabe der Eulerschen Werke erscheinen zu sehen, in weite Ferne gerückt ist, so machte ich in einer Sitzung der Berliner Mathematischen Gesellschaft den Vorschlag, bei Gelegenheit des bevorstehenden Jubiläums eine Reihe bahnbrechender Abhandlungen Eulers in deutschen Übersetzungen herauszugeben. Wenngleich dieser Vorschlag mehrfache Zustimmung fand, so fehlte doch bis zum Festtage zu seiner Realisierung die erforderliche Zeit. Inwieweit meine Anregung auf fruchtbaren Boden gefallen ist, müssen wir abwarten.

---

1) Joh. G. Hagen, *Index Operum Leonardi Euleri.* Berolini, Felix L. Dames. 1896. VIII, 80. 8°.

2) G. Valentin, *Beitrag zur Bibliographie der Eulerschen Schriften.* Biblioth. math. (**2**) 12, 41—49, 1898.

3) Friedrich Engel, *Rezension des Index von Hagen.* Ztschr. f. Math. u. Phys. **42**, III. Abt. 200—203, 1897.

4) Felix Müller, *Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler.* Jhrsb. d. Dtsch. Math.-Ver. **16**, 185—195, 1907. Nachtrag im Druck.

5) Siehe den oben Anm. 2) aufgeführten Aufsatz von G. Valentin.

Der vorliegende Beitrag zur EULER-Festschrift hat den Zweck, die Fachgenossen zum fleißigeren Studium der Schriften unseres großen Mathematikers anzuregen und durch eine sorgfältige Angabe der Quellen dieses Studium zu erleichtern. Die Abhandlungen EULERS verdienten in der Tat fleißiger gelesen zu werden. Die außerordentlich klare Darstellung macht diese Lektüre zu einem großen Genuß. EULER ist ein geschickter Lehrer, der die Begeisterung, mit der ihn der Gegenstand erfüllt, auch auf den Schüler zu übertragen versteht. Seine liebenswürdige Offenheit, mit der er uns jedesmal die Wege enthüllt, auf denen er zu seinem Resultat gelangt ist, übt einen eigenen Reiz auf den Leser aus. Der Einblick in die geschickte Behandlung der Probleme seitens des Meisters ermutigt den Schüler zu eigenen Versuchen, die ihn zwanglos in die Technik, Aufgaben zu lösen, einführen. Interessant ist eine Bemerkung G. A. KÄSTNERS über EULERS Stil. Er sagt in einem Briefe an SCHEIBEL vom 19. April 1797: „Allemal wenn einerley Untersuchung von D'ALEMBERT und von EULER angestellt ist, ziehe ich EULER vor. Sonst hatten die Franzosen das Verdienst, schwere Untersuchungen durch Auseinandersetzung und Witz zu erleichtern, aber bey den genannten beyden ist mir oft eingefallen: EULER sey der gefällig unterhaltende belehrende Franzose und D'ALEMBERT der schwerfällige Deutsche.“[1])

Es wird im folgenden eine kurze systematische Übersicht über die wichtigsten Arbeiten EULERS aus der reinen Mathematik gegeben werden. Fast alle Gebiete der reinen und angewandten Mathematik verdanken dem Genie EULERS glänzende Fortschritte. Seinem außerordentlichen Talente gelang es, für ein jedes Problem besondere Kunstgriffe zu finden, die zur Lösung führten. Wir werden zeigen, daß EULER auf den meisten mathematischen Disziplinen bahnbrechend gewirkt hat. Ganz neue Gebiete der mathematischen Forschung wurden von ihm erschlossen. Wer sich für die historische Entwickelung unserer Wissenschaft interessiert, wird bei eingehendem Studium der Schriften EULERS mit Staunen entdecken, daß viele Sätze, welche man bisher späteren Entdeckern zugeschrieben hat, unserm EULER zu verdanken sind. Wir werden an zahlreichen Beispielen nachweisen, daß die Spuren der modernsten mathematischen Theorien sich bis auf EULER zurückverfolgen lassen. Daß dies in vielen Fällen noch

---

1) CONRAD H. MÜLLER, *Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert.* Abh. z. Gesch. d. Math. Heft **18**, S. 123. Leipzig 1904.

nicht einmal bekannt ist, hat mit Recht schon Herr ENGEL in seiner Rezension des HAGENschen Index hervorgehoben.

Wenn wir nun zu der kurzen Übersicht der wichtigsten Arbeiten EULERS auf den einzelnen Gebieten der reinen Mathematik übergehen, so wählen wir im allgemeinen die systematische Anordnung, welche sich bei der Herausgabe unseres Jahrbuches für die Fortschritte der Mathematik als brauchbar bewährt hat.

Philosophie.

Als Philosoph war LEONHARD EULER ein Anhänger DESCARTES'. Gleich ihm hält er an dem Dualismus von Ausdehnung und Denken fest, wenn er auch nicht die Wechselwirkung zwischen Körper und Geist zu erklären vermag. Er bekämpft die LEIBNIZsche Monadenlehre; denn ihr widerspricht die unendliche Teilbarkeit der Materie. In seiner nüchternen Klarheit ist EULER ein Feind aller phantastischen Hypothesen, und deshalb ein eifriger Gegner der WOLFFschen Spekulationen, für welche damals alle Welt sich begeisterte. Die Wahrnehmung, die logischen Schlüsse und das historische Zeugnis sind die einzigen Quellen der Erkenntnis. An der Realität der Außenwelt muß als an einer Hypothese festgehalten werden. In seinen „Réflexions sur l'espace et le temps"[1]) bekämpft er die Ideen der Metaphysiker, welche die Realität von Dingen leugnen, die wir nicht sinnlich fassen, sondern nur durch Reflexion uns vorstellen können. Das fundamentale Prinzip der Mechanik ist ohne die Begriffe von Zeit und Raum unmöglich; daher kommt diesen Begriffen Realität zu. Besonders wichtig für EULERS Naturphilosophie sind seine „Lettres à une Princesse d'Allemagne"[2]), das vortreffliche populäre Lehrbuch der Physik, welches er niederschrieb, als der Unterricht, den er in Berlin den Töchtern des Markgrafen von Brandenburg-Schwedt erteilt hatte, durch den Aufenthalt des Hofes in Magdeburg abgebrochen werden mußte. Hier wird in leicht verständlicher Darstellung die neue Äthertheorie zur Erklärung der allgemeinen Anziehung, der elektrischen und magnetischen Erscheinungen auseinandergesetzt, die Unhaltbarkeit der Monadenlehre und der

1) L. EULER, *Réflexions sur l'espace et le temps.* Hist. Mém. Ac. Berlin, année 1748, 324—333 [1750]. Deutsch übersetzt: L. EULER, *Vernünftige Gedanken von dem Raume, dem Ort, der Dauer und der Zeit.* Quedlinburg 1763, p. 1—18 und Mag. f. Philos. **4**, 177—194, 1781.

2) L. EULER, *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques sujets de physique et de philosophie.* Pétersbourg 3 v. **1**, **2** 1768, **3** 1772. (Übersetzungen und Auflagen siehe bei VALENTIN, l. c. S. 64 Anm. 2.)

Newtonschen Emissionstheorie des Lichtes dargelegt und zur Erklärung der Materie und der Kräfte, welche den Zustand der Körper verändern, die Undurchdringlichkeit und die Trägheit eingeführt. Eine kürzere, aber wissenschaftlichere Darstellung seiner Naturphilosophie gab Euler in einer wichtigen Abhandlung: „Anleitung zur Naturlehre"[1]), welche erst 1844 in seinem Nachlaß entdeckt und in die Opera posthuma aufgenommen wurde. Der Grund, weshalb Euler diese Schrift nicht veröffentlicht hat, lag vielleicht darin, daß seine Zeitgenossen spekulativen Betrachtungen der Naturereignisse wenig zugänglich waren. Durch Zurückführung der mechanischen Kräfte, der allgemeinen Attraktion, der Erscheinungen des Lichtes, des Schalles, der Wärme, des Magnetismus und der Elektrizität auf eine gemeinsame Ursache, den Äther, wurde Euler zu ähnlichen Anschauungen über die Materie und die Umwandlung der Kräfte geführt, wie sie erst hundert Jahre später als richtig erkannt und experimentell erwiesen wurden. So wurde er ein Vorläufer von Robert Mayer, Helmholtz, Secchi, Riemann u. a. Schon in einer Abhandlung über die Erscheinungen der Luft aus dem Jahre 1727[2]) wurde die Wärme als Bewegung aufgefaßt. In einer Abhandlung über den Magneten aus dem Jahre 1744[3]) wird die damals herrschende Ansicht widerlegt, daß die *attractio* ein *attributum essentiale corporum* sei. In drei Abhandlungen aus dem Jahre 1746 wurde gegenüber der Monadenlehre die Molekulartheorie und die Lehre vom Äther begründet.[4]) B. Riemann trat in seinen nachgelassenen naturphilosophischen Aufsätzen[5]) ganz in die

---

1) L. Euler, *Anleitung zur Naturlehre, worin die Gründe zur Erklärung aller in der Natur sich ereignenden Begebenheiten und Veränderungen festgesetzt werden.* Op. posth. **2**, 449—560. 1862. — Eine Inhaltsangabe findet man bei E. Miething, *Leonhard Eulers Lehre vom Äther.* Pr. Berlin 1894.

2) L. Euler, *Tentamen explicationis phaenomenorum aeris.* Comm. Ac. Petrop. **2**, a. 1727, 347—368 [1729].

3) L. Euler, *Dissertatio de magnete.* Opusc. varii argum. Berolini. **3**, 1 bis 53, 1751. Rec. d. pièces cour. Ac. sc. Paris **5**, **I**(c), 1752.

4) L. Euler, *An materiae facultas cogitandi tribui possit?* Opusc. var. arg. **1**, 277—286, 1746. — *Recherches sur la nature des moindres particules des corps.* ib. 287—300. — *De relaxatione motus planetarum a resistentia aetheris orta,* ib. 245 bis 276. — Siehe auch Isenkrahe, *Eulers Theorie von der Ursache der Gravitation,* Ztsch. f. Math. Phys. **26**, Hl. Abt. 1—19, 1881, und *Über Zurückführung der Schwere auf Absorption und die daraus dargestellten Gesetze,* ib. 37, Suppl. 161 bis 204.

5) Bernh. Riemanns *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß.* Herausg. unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. 2. Aufl. bearbeitet von Heinrich Weber. Anhang III, Naturphilosophie 2. *Neue*

Fußstapfen Eulers. Ihm gelten die Eulerschen Sätze, daß die Wirkung eines Dinges auf ein anderes, deren Größe von der Entfernung abhängig ist, sich durch den Raum fortpflanzt, daß diese Fortpflanzung durch den Äther vermittelt wird, und daß die Ursache der Schwere auf Absorption beruht, als Axiome. Riemanns Hypothese des in allen ponderablen Atomen unaufhörlich verschwindenden Äthers bildet den Schlußstein der Eulerschen Äthertheorie.

Einen interessanten Beitrag zur Geschichte der Philosophie in der Zeit von Wolff bis Kant enthält das Programm von E. Hoppe [1]), in dem eine übersichtliche Darstellung von Eulers Erkenntnistheorie, Metaphysik, Psychologie, Naturphilosophie und Religionsphilosophie gegeben wird. Danach erscheint es nicht ausgeschlossen, daß Euler direkt durch seine Schriften auch auf Kant einen Einfluß ausgeübt hat.

Am Schluß dieses Abschnittes müssen wir einer Abhandlung Eulers gedenken, welche erst hundert Jahre nach ihrer Abfassung im Manuskript entdeckt und veröffentlicht wurde.[2]) Sie hat den Zweck, den jungen wißbegierigen König Friedrich II von Preußen über den Nutzen der höheren Mathematik zu belehren. Alle Wahrheiten hängen miteinander zusammen, und da auch die höhere Mathematik den Zweck verfolgt, Methoden zur Erforschung der Wahrheit zu schaffen, so kann sie nicht ohne Nutzen sein. Ja, ihr Nutzen ist weit umfassender als der der elementaren Mathematik, den niemand leugnen wird. Dies läßt sich an einzelnen Disziplinen, der Mechanik, Hydrostatik, Astronomie, Ballistik, Nautik, Physik und Physiologie eingehend nachweisen.

Algebra.

Die Arbeiten Eulers in der Algebra lassen sich in fünf Gruppen teilen: die Bemühungen, das Fundamentaltheorem der Algebra zu beweisen, die Lösung der Gleichungen bis zum 4. Grade, die Versuche algebraische Gleichungen beliebigen Grades zu lösen, die Herleitung der Lambertschen Reihe und die Theorie der Elimination.

---

mathematische Principien der Naturphilosophie. 528—532. 3. *Gravitation und Licht.* 532—534. Leipzig, B. G. Teubner 1892.

1) E. Hoppe, *Die Philosophie Leonhard Eulers.* Gotha, F. A. Perthes A.-G. VII u. 167. 8°. 1904.

2) L. Euler, *De matheseos sublimioris utilitate.* Ex autographo edidit G. Friedlaenderus. Journ. f. Math. **35**, 109—116. Berlin 1847. Franz. von Ed. Lévy, Nouv. ann. **13**, 5—21, 1853.

Zuvor haben wir das musterhafte elementare Lehrbuch EULERS „Vollständige Anleitung zur Algebra“ [1]) zu nennen, durch welches allen denen ein außerordentlicher Dienst erwiesen wurde, die sich durch Selbstunterricht mit den Elementen der Arithmetik und Algebra vertraut machen wollen. Für die Beliebtheit des Buches sprechen die zahlreichen Auflagen und Übersetzungen.[2]) Der erste Teil enthält die Einführung in die algebraischen Operationen (Grüson S. 1—221) und in die Proportionen (S. 225—312); der zweite Teil die Theorie der algebraischen Gleichungen (S. 1—162) und die unbestimmte Analytik (S. 165—402).

Schon im Jahre 1742 gelangte EULER [3]) gelegentlich einer Untersuchung über die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche zu dem Resultate, daß jeder algebraische Ausdruck $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ sich in Faktoren zerlegen lasse, die entweder linear sind von der Form $p + qx$ oder quadratisch von der Form $p + qx + rx^2$. Diesen ersten Versuch, das Fundamentaltheorem der algebraischen Gleichungen zu lösen, veröffentlichte EULER mit Beweis in den Hist. Mém. Ac. Berlin ann. 1749 [1751] unter dem Titel: „Recherches sur les racines imaginaires des équations“.[4]) Es wird ohne Anwendung des Unendlichen, das D'ALEMBERT 1746 benutzt hatte, bewiesen, daß jede imaginäre Gleichungswurzel und das Resultat aller transzendenten Operationen mit solchen Wurzeln sich in die Form $M + N\sqrt{-1}$ bringen lasse, wo M und N reell sind. Später zeigte bekanntlich GAUSS in seiner Dissertation[5]) vom Jahre 1799, daß EULER und D'ALEMBERTS Beweise nicht einwandfrei seien, und gab den ersten vollständigen Beweis des Fundamentaltheorems.

Den Nachweis, daß die Gleichungen 2., 3. und 4. Grades auf eine Gleichung vom resp. 1., 2., 3. Grades, die *aequatio resolvens*, zurück-

1) L. EULER, *Vollständige Anleitung zur Algebra.* St. Petersburg 1770, 2 Teile. — Von den vielen Auflagen und Bearbeitungen sei hier nur genannt: L. EULERS *Vollständige Anleitung zur niederen und höheren Algebra.* Nach der französischen Ausgabe des Herrn DE LA GRANGE mit Anmerkungen und Zusätzen herausgegeben von JOH. PHIL. GRÜSON, Berlin. I. Teil 1796. II. T. 1797.

2) Siehe bei VALENTIN, l. c. S. 64 Anm. 2).

3) Brief an GOLDBACH. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIeme siècle,* par P. H. FUSS, T. I, 170—171. St. Pétersbourg 1843.

4) L. EULER, *Recherches sur les racines imaginaires des équations.* Hist. Mém. Ac. Berlin **5**, ann. 1749, 222—288 [1751].

5) C. F. GAUSS, *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi ordinis resolvi posse.* Diss. Helmstädt 1799. Werke **3**, 1. — Eine Übersicht über die betr. Literatur gab G. LORIA, Bibl. math. (**2**) **5**, 107—112; 1891.

geführt werden können, und zugleich die erste Verwendung der Resolvente einer Gleichung von beliebigem Grade, gab Euler in einer Abhandlung: „De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio“.[1]) In dieser Abhandlung (p. 223) führte er zuerst die Benennung „reciproke Gleichung“ ein.

Eine Fortsetzung dieser Arbeit[2]), in der der vergebliche Versuch gemacht wird, Gleichungen höheren Grades durch die Substitution $x = \sum_{\mu=1\cdots n-1} \sqrt[n]{v_\mu}$ zu lösen, enthält Formen der Gleichungen 5. Grades, deren Wurzeln angebbar sind. Ebenso enthält eine spätere Abhandlung[3]) unzählige algebraisch auflösbare Gleichungen von höherem als dem vierten Grade. Es ist hier noch ein Beweis zu erwähnen für die Newtonschen Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung und den Wurzelpotenzen.[3])

In einer Abhandlung „Observationes circa radices aequationum“[4]), in der die Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung als Funktionen der Koeffizienten dargestellt werden, gibt Euler eine neue Herleitung der Lambertschen Reihe[5]) für die Lösung der trinomischen Gleichung $x^m + px = q$. Es wird diese Reihe für die Wurzeln der Gleichungen von mehr als drei Gliedern verallgemeinert. Noch eine zweite Abhandlung über die Lambertsche Reihe[6]) enthält analytische Operationen, die zur Kenntnis der wahren Summe führen. Die Lambertsche Reihe spielt eine wichtige Rolle in den Versuchen Eulers, die Wurzeln und Wurzelpotenzen algebraischer Gleichungen durch Reihen auszudrücken.[7])

---

1) L. Euler, *De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio*, Comm. Ac. Petrop. **6**, ad ann. 1732 et 1733, 216—231 [1739].

2) L. Euler, *De resolutione aequationum cujusvis gradus,* Nov. Comm. Ac. Petrop. **9**, ad ann. 1762 et 1763, 70—98 [1764].

3) L. Euler, *Demonstratio genuina theorematis Newtoniani, quo traditur relatio inter coefficientes cujusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum ejusdam.* Opusc. var. arg. **2**, 108—120. Berolini 1750.

4) L. Euler, *Observationes circa radices aequationum.* Nov. Comm. **15**, a. 1770, 51—74 [1771].

5) Joh. Heinr. Lambert, *Observationes variae in Mathesin puram.* Acta Helvet. **3**, 154. Basil. 1758.

6) L. Euler, *De serie Lambertiana plurimisque ejus insignibus proprietatibus.* Acta Ac. Petrop. **7**, Pars II, a. 1789, 29—51 [1783].

7) Wir nennen hier nur die beiden Abhandlungen von Euler, *Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaevis eorum potestates exprimi possunt.* Nova Acta Petrop. **4**, a. 1786, 55—73 [1789]. — *De innumeris generibus*

EULER war der Erste, welcher die Elimination einer Unbekannten aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten lehrte, und zwar nach zwei verschiedenen Methoden.[1]) Er wurde durch die Untersuchung der Durchschnittspunkte zweier Kurven auf den Begriff der Resultante geführt. Er gab in zwei Abhandlungen aus dem Jahre 1748[2]) eine wichtige Erklärung des sogenannten CRAMERschen Paradoxons, daß eine C_n nicht immer durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ ihrer Punkte bestimmt zu sein braucht, da für $n \geqq 3$ diese Zahl nicht größer wird als die Zahl n^2 der Schnittpunkte der C_n mit einer anderen gleichen Grades.[3]) Die wahre Bedeutung dieses Paradoxons wurde später von LAMÉ (1818), GERGONNE (1827) und PLÜCKER (1828) erkannt. Eine weitere Ausbildung der Theorie der Elimination enthält ein Aufsatz EULERS aus dem Jahre 1764[4]); hier ist EULER der Vorläufer BÉZOUTS. EULERS hier genannte Abhandlungen sind überdies von Bedeutung für die Theorie der symmetrischen Funktionen.

Zahlentheorie.

Die Zahlentheorie war ein Lieblingsgebiet EULERS. Seine zahlreichen Arbeiten auf diesem Gebiete behandeln die Teilbarkeit der Zahlen, die Divisorensummen, die Kriterien der Primzahlen, die Partitio numerorum, die Theorie der Potenzreste und Kongruenzen, die unbestimmte Analytik, die Anfänge der Formentheorie, die Figuren mit rationalen Stücken, die vollkommenen und befreundeten Zahlen, die magischen Quadrate. Die meisten dieser Abhandlungen sind in die „Commentationes arithmeticae collectae“ (S. 63, Note 1) aufgenommen. Zahlreiche Zusätze enthalten die „Fragmenta arithmetica“.[5]) Wir sind

---

serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaecunque earum potestates exprimi possunt. ib. 74—95.

1) L. EULER, *Introductio in Analysin infinitorum.* 2 v. Lausannae 1748, **2**, § 482.

2) L. EULER, *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes.* Hist. Mém. Ac. Berlin **4**, a. 1748, 219—233 [1750]. — *Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper.* ib. 234—248.

3) GABRIEL CRAMER, *Introduction à l'analyse des courbes algébriques.* Genevae 1750. — Es findet sich schon bei COLIN MACLAURIN, Geometria organica. London 1740, 135—137.

4) L. EULER, *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations.* Hist. Mém. Ac. Berlin **20**, a. 1764, 91—104 [1766].

5) L. EULER, *Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis deprompta,* NN. 1—90, Opera posth. **1**, 157—266. — *Continuatio Fragmentorum ex Adversariis*

überzeugt, daß bei einem eingehenden Studium dieser Sammlungen viele Resultate, welche jetzt späteren Forschern zugeschrieben werden, als von Euler herrührend sich ergeben würden. Eine Übersicht der ersten zahlentheoretischen Arbeiten bis zum Jahre 1758 findet man in M. Cantors klassischem Geschichtswerke[1]); zahlreiche historische Notizen in Paul Bachmanns „Zahlentheorie" in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.[2])

Das Zeichen $\int n$ für die Summe der Teiler einer Zahl führte Euler 1750 ein, bei einer Untersuchung über befreundete Zahlen.[3]) Zwei Zahlen heißen befreundet, wenn jede gleich der Summe der aliquoten Teile der anderen ist. Euler gab in der genannten Abhandlung 61 Paare befreundeter Zahlen und fügte ihnen in einer nachgelassenen Arbeit, die erst 1849 veröffentlicht wurde[4]), noch 30 weitere hinzu.

Eine Reihe wichtiger Sätze über die Divisoren der Zahlen enthält der Aufsatz: „Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata".[5]) Hierin tritt zum ersten Male die „Eulersche Funktion" auf $n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p'}\right)\cdots$, welche nach Gauss mit $\varphi(n)$ bezeichnet wird und die Anzahl aller Zahlen darstellt, die $< n$ und relativ prim zu n. Mit ihrer Hilfe gab Kummer einen Beweis des Satzes, daß die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche sei.[6]) Riemann gibt in einer Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe[7]) eine Funktionalgleichung für seine Zetafunktion $\zeta(s)=\sum_{\nu=1\ldots\infty}\frac{1}{\nu^s}$.

---

mathematicis depromptorum. I, N. N. 91—96. *Supplementa numerorum doctrinae* Opera post. **1**, 487—493. 1862.

1) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* **3**, 2. Aufl., Kap. 107, 610—624. Leipzig 1901.

2) P. Bachmann, *Zahlentheorie,* Encykl. d. math. Wiss. **1**, T. II, Abschnitt C, 1—3, S. 556—674. Leipzig, Teubner 1904.

3) L. Euler, *De numeris amicabilibus.* Opusc. var. arg. **2**, 23—107. Berolini 1750. — Comm. ar. **1**, 102. — Im Auszug schon Nova Acta Erud. 1747, 267. — Comm. ar. **2**, 637—638.

4) L. Euler, *De numeris amicabilibus.* Comm. ar. **2**, 627—636. 1849.

5) L. Euler, *Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1760—61, 74—104 [1763]. — Comm. ar. **1**, 274—386.

6) E. Kummer, *Neuer elementarer Beweis des Satzes, daß die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist.* Monatsber. Ak. Berlin 1878, 777—778.

7) B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe.* Monatsber. Ak. Berlin 1859, 671—673. Werke 2. Aufl. 145—146, 1892.

Neunzig Jahre vor RIEMANN hat, wie Hr. E. LANDAU kürzlich nachgewiesen hat[1]), EULER diese Relation gefunden.[2])

EULERS Untersuchungen über Divisorensummen nahmen ihren Ausgangspunkt von der Entwicklung des Produktes $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ usw.[3]) Er gibt in der zweiten Abhandlung eine Tabelle der Divisorensummen der Zahlen 1—100 und später eine Tafel der Primzahlen und der kleinsten Divisoren der zusammengesetzten Zahlen bis über eine Million.[4])

Der berühmte FERMATsche Satz, daß $a^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$, wenn p eine Primzahl und a relativ prim zu p, war schon von LEIBNIZ bewiesen worden.[5]) EULER gab seinen ersten Beweis im Jahre 1736: „Theorematum quarundam ad numeros primos spectantium demonstratio"[6]), und einen zweiten in einer Arbeit über Potenzreste, die 1761 erschien.[7]) Der FERMATsche Satz von der Darstellbarkeit einer Primzahl von der Form $4n+1$ als Quadratsumme war kurz vorher endgültig bewiesen in einer für die Zahlentheorie äußerst wichtigen Abhandlung[8]), durch welche die Lehre von den Potenzresten, besonders den quadratischen Resten, begründet wurde. In ihr kommen auch zum ersten Male die Ausdrücke „residua" und „nonresidua" vor. In zwei Arbeiten aus dem Jahre 1772[9]) wurde die Theorie der quadratischen

---

1) EDM. LANDAU, *Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.* Bibl. math. (**3**) **7**, 69—79. 1906.

2) L. EULER, *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques.* (Lu en 1749.) Hist. Mém. Ac. Berlin **17**, a. 1761. 83—106 [1768].

3) L. EULER, *Observatio de summis divisorum.* Nov. Comm. Ac. Pétrop. **5**, a. 1754—55, 59—74 [1760] — Comm. ar. **1**, 146—154. — *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum.* ib. 75—83. — Comm. ar. **1**, 234—238.

4) L. EULER, *De tabula numerorum primorum, usque ad millionem et ultra continuenda, in qua simul omnium numerorum non primorum minimi divisores exprimantur.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **19**, a. 1774, 132—183 [1775]. — Comm. ar. **2**, 64—91.

5) GIOV. VACCA, *Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat.* Bibl. math. (**2**) **8**, 46—48, 1894.

6) L. EULER, *Theorematum quarundam ad numeros primos spectantium demonstratio.* Comm. Ac. Petrop. 8, a. 1736, 141—146 [1741]. — Comm. ar. **1**, 21—23.

7) L. EULER, *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **7**, a. 1758—59 [1761]. — Comm. ar. **1**, 260—273.

8) L. EULER, *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum.* Nov. Comm. Ac. Petrop **5**, a. 1754—55, 3—58 [1760]. — Comm. ar. **1**, 210—233.

9) L. EULER, *Problematis cujusdam Diophantei evolutio.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **17**, a. 1772, 24—63 [1773]. — Comm. ar. **1**, 450—472. — *Observationes circa bina*

Reste weiter entwickelt und die Theorie der Indizes begründet. Das EULERsche Kriterium für quadratische Reste, daß, wenn p eine Primzahl, $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{n}{p}\right)$ mod. p, nebst andern Untersuchungen über Reste, sowie über Divisoren einiger quadratischer Formen, gab EULER in einer Abhandlung der Opuscula analytica **1**, 1783.[1])

Das LEGENDREsche Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste, $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$, wurde von EULER entdeckt. In einer Abhandlung, welche 1751 erschien und zahlreiche Sätze über Divisoren von der Form $pa^2 \pm qb^2$ enthält[2]), steckt es in einem Theorem mit mehreren Anmerkungen. Später (1783) wird es in vollkommner Form von EULER ausgesprochen in einem Aufsatz der Opuscula analytica, **1**.[3]) LEGENDRE gab einen teilweisen Beweis, GAUSS 7 Beweise dieses Reziprozitätsgesetzes.

Die Lehre von der Zerfällung der Zahlen, die partitio numerorum, wurde von EULER begründet und in mehreren Abhandlungen entwickelt.[4]) Den Ausgangspunkt bildet die schon im Jahre 1741[5]) gefundene Entwicklung des unendlichen Produktes $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ in eine Potenzreihe von x, deren Exponenten die Form $\frac{1}{2}(3n^2 \pm n)$ haben und deren Koeffizienten für gerade n gleich $+1$, für ungerade n gleich -1 sind. Kapitel 16 der Introductio handelte „von der Teilung der Zahlen", und außer in den für die Theorie der Divisorensummen

---

biquadrata, quorum summa in duo alia biquadrata resolvere liceat. Nov. Comm. Ac. Petrop. **17**, a. 1772, 64—69 [1773]. — Comm. ar. **1**, 473—476.

1) L. EULER, *De quibusdam eximiis proprietatibus circa divisores potestatum occurrentibus.* Opusc. anal. **1**, 242—267, 1783. Additamentum. ib. 268—295. — Comm. ar. **2**, 1—26.

2) L. EULER, *Theoremata circa divisores numerorum in hac forma: $pa^2 \pm qb^2$ contentorum.* Comm. Ac. Petrop. **14**, a. 1744—46, 151—181 [1751]. — Comm. ar. **1**, 35—49.

3) L. EULER, *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos* Opusc. anal. **1**, 64—84, 1783. — Comm. ar. **1**, 477—486. (Auf S. 84, resp. 485 u. 486.) — Vgl. L. KRONECKER, *Bemerkungen zur Geschichte des Reziprozitätsgesetzes.* Monatsber. Ak. Berlin 1875, 267—274. — Ital. übers. von Q. SPARAGNA, Bull. bibl. stor. **18**, 244—249, 1885.

4) L. EULER, *De partitione numerorum.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1750 bis 1751, 125—169 [1753]. — Comm. ar. **1**, 73—101. — *De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **14**, a. 1769, 168—187 [1770].

5) *Observationes analyticae variae de combinationibus,* Comm. Ac. Petrop. **13**, a. 1741—43, 54—93 [1751].

wichtigen, schon oben genannten Abhandlungen[1]) ist besonders hervorzuheben ein zweiter Beweis jener Entwicklung aus dem Jahre 1780.[2]) LEGENDRE und JACOBI haben später auf die fundamentale Bedeutung dieser Entwicklung wiederholt hingewiesen.[3]) Die Untersuchungen über die Teilbarkeit der Zahlen von der Form $\alpha x^2 + \beta y^2$, mit den Determinantenwerten $\alpha\beta$, welche EULER *numeri idonei, nombres convenables* nennt, haben im wesentlichen den Zweck, zu erkennen, ob eine Zahl Primzahl sei.[4]) Verschiedene Sätze über die Potenzreste bei Division durch Primzahlen[5]) führen auf die Theorie der primitiven Wurzeln und eine Vervollkommnung des FERMATschen Satzes.

Zahlreich sind die Arbeiten EULERS über diophantische Gleichungen. Die schon oben genannte „Vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra"[6]) enthält im II. Abschnitt des 2. Teiles (S. 163—403) viele Sätze aus der unbestimmten Analytik, die z. T. von LAGRANGE herrühren. LAGRANGE hat vor EULER den Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ veröffentlicht. EULER teilte in einem Briefe an GOLDBACH vom 4. Aug. 1753 mit, er könne die Unmöglichkeit der Lösung von $a^3 + b^3 = c^3$ und $a^4 + b^4 = c^4$ beweisen.[7]) Lösungen simultaner unbestimmter Gleichungen sowie Sätze über quadratische und kubische Formen enthalten zwei im Jahre 1761 erschienene

---

1) Vgl. Anmerkung 3) S. 73.

2) L. EULER, *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ *etc. in seriem simplicem.* Acta Ac. Petrop. **4**, a. 1780, P. I, 47—55 [1783]. — Eine kurze Rekapitulation der Prinzipien, nach denen LAGRANGE (Nouv. Mém. Ac. Berlin **1**, a. 1770) die Zerfällung der Zahlen in Quadrate dargestellt, gab EULER Acta Ac. Petrop. **1**, a. 1777, P. II, 48—70 [1780].

3) L. GOLDSCHMIDT, *Über einen Satz EULERS aus der partitio numerorum.* Ztschr. Math. Phys. **38**, 121—128, 1893.

4) L. EULER, *Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi necne?* Nov. Comm. Ac. Petrop. **13**, a. 1768, 67—88 [1769]. — Comm. ar. **1**, 379 bis 390. — *Observations au problème sur les nombres premiers.* Extrait d'une lettre à M. Nic. Béguelin. Nouv. Mém. Ac. Berlin **5**, a. 1776, 337. — Comm. ar. **2**, 270—271. — *De formulis speciei* $mx^2 + ny^2$, *ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus.* Nova Acta Ac. Petrop. **12**, a. 1794, 22—46. [1801]. — Comm. ar. **2**, 249—260. — *De variis modis numeros praegrandes examinandi utrum sint primi necne?* Nova Acta Ac. Petrop. **13**, a. 1795—96, 14—44 [1827]. — Comm. ar. **2**, 198—214.

5) L. EULER, *Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **18**, a. 1773, 85—135 [1774].

6) Vgl. Anmerkung 1) auf S. 69.

7) Siehe die in Anmerkung 3) auf S. 69 genannte Correspondance **1**, 618 und L. EULER, *Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes.* Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1738, 125—146 [1747]. — Comm. ar. **1**, 24—34.

Abhandlungen.[1]) FERMATS Sätze über Kongruenzen und Sätze zur diophantischen Analysis wurden in einer Arbeit vom Jahre 1763 gegeben.[2]) Die Lösung der vollständigen Gleichung $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + Ey + F = 0$ ist in 2 Abhandlungen aus dem Jahre 1774[3]) zu finden, die für die Theorie der Indices und der quadratischen Reste von außerordentlicher Wichtigkeit sind. Hier wird das Minimum der Form $mx^2 - ny^2$ in ganzen Zahlen durch Verwandlung von $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ in einen Kettenbruch gewonnen. Der hier angewandten Analyse EULERS ist die LAGRANGEsche Behandlung des PELLschen Problems ganz analog.

Zur diophantischen Analysis gehören auch die Aufgaben über Figuren mit rationalen Stücken. EULER behandelt Dreiecke, deren Mittellinien rational sind, solche, deren Ecken rationale Abstände vom Schwerpunkt haben, Vierecke, für welche die Sinus der Winkel im rationalen Verhältnis stehen, und Dreiecke, deren Seiten- und Schwerlinien rational sind.[4])

Eine neue Konstruktion magischer Quadrate basiert EULER auf einer besonderen Methode der Superposition zweier Systeme von Zahlen, die auf eine bestimmte Weise ausgewählt sind.[5]) Schon früher

---

1) L. EULER, *De problematis indeterminatis, quae videntur plus quam determinata.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1756—1757, 85—114 [1761]. — Comm. ar. **1**, 193—209. — *Solutio generalior quorundam problematum Diophanteorum, quae vulgo non nisi solutiones speciales admittere videntur.* ib. 155—184.

2) L. EULER, *Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1760—61, 105—128 [1763], — Comm. ar. **1**, 287—296.

3) L. EULER, *Resolutio aequationis* $Ax^2 + 2Bxy + Cy^3 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ *per numeros tam rationales quam integros.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **18**, a. 1773, 185—197 [1774]. — *De resolutione irrationalium per fractiones continuas, ubi simul nova quaedam et singularis species minimi exponitur.* ib. 218—244. — Comm. ar. **1**, 549—555, resp. 570—583.

4) L. EULER, *Solutio problematis de inveniendo triangulo, in quo rectae ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **18**, a. 1773, 171—184 [1774]. — *Investigatio trianguli, in quo distantiae angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur.* Nova Acta Ac. Petrop. **12**, a. 1794, 101 bis 113 [1801]. — *Investigatio quadrilateri, in quo singulorum angulorum sinus datam inter se teneant rationem; ubi artificia prorsus singularia in analysi Diophantea occurrunt.* Mém. Ac. Pétersb. **5**, a. 1812, 73—95 [1815]. — *Problème de géométrie, résolu par l'analyse de Diophante.* Mém. Ac. Pétersb. **7**, a. 1815—16, 3—9 [1820]. — Comm. ar. **1**, 507—515, resp. **2**, 294—301, **2**, 380—391 u. **2**, 488—491.

5) L. EULER, *De quadratis magicis.* Op. post. **1**, 140—151. — Comm. ar. **2**, 593—602.

behandelte er das für die Kombinationslehre und die Theorie der magischen Quadrate wichtige Problem der 36 Offiziere von 6 verschiedenen Graden und 6 verschiedenen Regimentern, die so in ein Quadrat geordnet werden sollen, daß jede Horizontal- und jede Vertikalreihe 6 Offiziere aus verschiedenen Regimentern und verschiedenen Ranges enthält, und untersucht die Bedingungen der Möglichkeit für die Anzahl n^2.[1])

Kombinationslehre. Wahrscheinlichkeit. Analysis situs.

Verwandt mit den im vorliegenden Kapitel genannten Arbeiten ist eine Abhandlung EULERS über Kombinationen aus dem Jahre 1741.[2]) Hier wird die für die Zerfällung der Zahlen wichtige Entwicklung des Produktes $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)$ usw. gegeben, nachdem Relationen zwischen den Funktionen $\sum a_\nu$, $\sum a^2_\nu$, $\sum a^3_\nu \ldots$, $\sum a_\mu a_\nu$, $\sum a_\mu a_\nu a_\varrho$ usw. usw. entwickelt sind, die sich aus den Elementen a_1, a_2, a_ν usw. bilden lassen. Interessante Aufgaben aus der Kombinationslehre findet man in einer erst im Jahre 1811 veröffentlichten Arbeit[3]) und in einer Abhandlung über eine neue Art von Progressionen aus dem Jahre 1775.[4])

In den Sitzungen der Berliner Akademie hielt EULER eine Reihe von interessanten Vorträgen über Wahrscheinlichkeit, u. a. über Kartenspiele, Lotterien, Witwenkassen.[5])

Die Ausbildung der sogenannten Analysis situs ist EULER zu verdanken. LEIBNIZ hatte in einem Briefe an HUYGENS vom 8. Sept. 1679 den Gedanken einer neuen geometrischen Analysis angeregt, welche „uns unmittelbar den situs ausdrückt, wie die Algebra die

---

1) L. EULER, *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques.* Verhand. Genootsch. Vlissingen **9**, 85—239, 1782. — Comm. ar. **1**, 302—361.

2) L. EULER, *Observationes analyticae variae de combinationibus.* Comm. Ac. Petrop. **13**, a. 1741—43, 64—93 [1751].

3) EULER, *Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum.* Mém. Ac. Pétersb. **3**, a. 1809—10, 57—64 [1811].

4) L. EULER, *Observationes circa novum et singulare progressionum genus.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **20**, a. 1775, 123—139 [1776].

5) L. EULER, *Calcul de la probabilité dans le jeu de Rencontre.* Hist. Mém. Ac. Berlin **7**, a. 1751, 255—270 [1753]. — *Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon.* ib. **20**, a. 1764, 144—164 [1766]. — *Sur la probabilité des séquences dans la loterie Génoise.* ib. **21**, a. 1765, 191—230 [1767] u. *Réflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée loterie Génoise.* Op. post. **1**, 319—335. — *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain.* Hist. Mém. Ac. Berlin **16**, a. 1760, 144—165 [1767]. — *Sur les rentes viagères.* ib. 165—175.

magnitudo".[1]) Huygens setzte keine große Hoffnung auf diese neue Charakteristik, und Leibniz selbst ließ den Gedanken wieder fallen. Erst Euler verstand es, diese Anregung fruchtbar zu machen. Die Frage, ob man 7 Brücken nacheinander überschreiten könne, ohne eine derselben doppelt zu benutzen, gab ihm Veranlassung dazu.[2]) Die mathematische Behandlung des Rösselsprungs für Schachbretter von mannigfacher Gestalt[3]) führte zu weiterer Ausbildung der Analysis situs.

Kettenbrüche.

Wenngleich schon 1613 Cataldi die Ausziehung einer Quadratwurzel aus einer bestimmten Zahl durch einen Kettenbruch bewirkte, wenngleich Daniel Schwenter 1618 den Bruch $\frac{177}{233}$ durch Kettenbruchmethode in kleineren Zahlen ausdrückte, Lord Brouncker 1655 ein unendliches Zahlenprodukt in einen unendlichen Kettenbruch verwandelte und Huygens in seiner Descriptio automati planetarii 1703 an Kettenbrüchen mit bestimmten Zahlen Sätze für Näherungswerte entdeckte, so war es doch Euler, dem es gelang eine Theorie der Kettenbrüche zu begründen. Auch der Name *fractio continua* rührt von ihm her. Eine erste zusammenhängende Theorie der Kettenbrüche enthält eine Abhandlung aus dem Jahre 1737[4]), die, wie wir sehen werden, auch für die transzendenten Funktionen von bahnbrechender Bedeutung ist. Auch periodische Kettenbrüche, auf welche die Entwicklung einer Quadratwurzel führt, werden hier berechnet. Eine zweite Abhandlung aus dem Jahre 1739, auf die wir in der Theorie der bestimmten Integrale zurückkommen werden, enthält die Fortsetzung der Theorie der Kettenbrüche.[5]) Wichtig für diese Theorie ist ferner eine Arbeit[6]), in der

1) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* **3**, 2. Aufl., 36 u. 624, 1901.

2) L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 128—140 [1741]. Übers. von Coupy, Nouv. Ann. **10**, 106 bis 119, 1851.

3) L. Euler, *Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse sur la marche du cavalier sur l'échiquier.* Hist. Mém. Ac. Berlin **15**, a. 1759, 310—337 [1766]. — Übers. The Journal of science and the arts **3**, 72—77. London 1817.

4) L. Euler, *De fractionibus continuis.* Comm. Ac. Petrop. **9**, a. 1737, 98 bis 137 [1744]. — Siehe M. Cantor, l. c. **3**, 693—696.

5) L. Euler, *De fractionibus continuis observationes.* Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1739, 32—81 [1750]. — Siehe M. Cantor l. c. **3**, 696—699.

6) L. Euler, *Specimen algorithmi singularis.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **9**, a. 1762—63, 53—69 [1764].

ein neuer Algorithmus für Zahlen gegeben wird, die aus den Nennern des Kettenbruchs $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$ usw. auf besondere Weise gebildet sind. Die Anwendung dieses neuen Algorithmus ist, wie S. GÜNTHER[1]) bemerkt hat, ganz analog den Regeln der Zerlegung einer Determinante. Die Verwandlung von Quadratwurzeln in Kettenbrüche ist schon im Vorigen (s. Seite 76) erwähnt[2]); eine ebensolche war schon früher auf die Lösung einer Aufgabe aus der unbestimmten Analysis angewendet.[3]) Ausgangspunkt für weitere Entwicklungen bilden die Gleichungen $fA = gB + hC$, $f'B = g'C + h'D$ usw.[4]) Eine neue Darstellung der Haupteigenschaften der Kettenbrüche gab EULER später in einem Aufsatz der Opuscula analytica[5]) bei Gelegenheit der Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche. Eine Verallgemeinerung des Kettenbruchs für $1/e-1$ führt auf solche Kettenbrüche, deren Summe eine rationale Zahl ist.[6]) Die Formeln von WALLIS lassen sich durch bestimmte Integrale ausdrücken[7]), und der LAGRANGEsche Kettenbruch für $(1+x)^n$ läßt sich umformen.[8])

Reihen.

Die Untersuchungen EULERS über Reihen und unendliche Produkte (bis zum Jahre 1759) sind in dem Werke von M. CANTOR[9]) ausführ-

---

1) S. GÜNTHER, Lehrbuch der Determinantentheorie für Studierende. 2. Aufl. Erlangen 1877 (Historischer Überblick).

2) In der Zahlentheorie (S. 76).

3) L. EULER, *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1765, 28—66 [1767]. — Comm. ar. **1**, 316—336.

4) L. EULER, *De formatione fractionum continuarum.* Acta Ac. Petrop. **3**, P. I, a. 1779, 3—29 [1782].

5) L. EULER, *De transformatione serierum in fractiones continuas, ubi simul haec theoria non mediocriter amplificatur.* Opusc. anal. **2**, 138—177, 1785.

6) L. EULER, *Observationes analyticae.* Opusc. anal. **1**, 1783, 85—120. — *Observationes circa fractiones continuas in hac forma contentas:*

$$S=\frac{n}{1+\frac{n+1}{2+\frac{n+2}{3+etc.}}}$$

Mém. Ac. Pétersb. **4**, a. 1811, 52—74 [1813].

7) L. EULER, *De fractionibus continuis Wallisii.* Mém. Ac. Pétersb. **5**, a. 1812, 24—44 [1815].

8) L. EULER, *Commentatio in fractionem continuam qua Ill. La Grange potestates binomiales expressit.* Mém. Ac. Pétersb. **6**, a. 1813—14, 3—11 [1818].

9) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* 2. Aufl., **3**, 641 bis 737, Kap. 109—112.

lich dargestellt. Wir erwähnen zunächst Arbeiten über diejenigen Reihen, die aus der Entwicklung der n^{ten} Potenz eines Binoms oder Polynoms hervorgehen. Den ersten strengen und rein elementaren Beweis des binomischen Satzes für gebrochene Exponenten verdanken wir Euler.[1]) Dieser Satz, den Newton 1676 nur durch Induktion gefunden, gab ein Mittel, Wurzeln beliebigen Grades durch Reihen auszudrücken. Einen neuen Beweis gab Euler 1787.[2]) Es folgten mehrere Abhandlungen über die Eigenschaften der Binomial- und Polynomial-Koeffizienten[3]) und im Jahre 1794 ein Beweis des polynomischen Satzes.[4]) Die Entwicklung des unendlichen Produktes

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \text{ usw.},$$

von dem wir schon in der Zahlentheorie (S. 74) gesprochen, und daraus sich ergebende Eigenschaften der Pentagonalzahlen bringen zwei Abhandlungen aus dem Jahre 1780.[5])

Ein von Joh. Bernoulli 1736 gestelltes Problem, die Summen der reziproken Reihen zu finden, löste Euler schon früher und verbesserte darauf die erste Methode.[6]) Mit der ersten der hier genannten Ab-

---

1) L. Euler, *Demonstratio theorematis Newtoni de evolutione potestatum binomii, pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri.* Novi Comm. Ac. Petrop. **19**, a. 1774, 103—111 [1775].

2) L. Euler, *Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat.* Nova Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1787, 52 bis 58 [1789].

3) L. Euler, *De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt.* Acta Ac. Petrop. **5**, P. I, a. 1781, 74—111 [1784]. — *De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis.* Acta Ac. Petrop. **5**, P. II. a. 1781, 76—89 [1785]. — *Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur.* Nov. Acta Ac. Petrop. **8**, 1790, 32—68 [1794]. — *Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium.* Nova Acta Ac. Petrop. **15**, a. 1799—1802, 33—43 [1806]. — *De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest.* Mém. Ac. Pétersb. **4**, a. 1811, 75 bis 87 [1813].

4) L. Euler, *De evolutione potestatis polynomialis cujuscunque* $(1+x+x^2+x^3+etc.)^n$. Nova Acta Ac. Petrop. **12**, a. 1794, 47—57 [1801].

5) L. Euler, *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ *etc. in seriem simplicem.* Acta Ac. Petrop. **4**, P. I, a. 1780, 47—55 [1783]. — *De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium.* ib. 56—75. — Comm. ar. **2**, 105—115.

6) L. Euler, *De summis serierum reciprocarum.* Comm. Ac. Petrop. **7**, a. 1734 bis 1735, 123—134 [1740]. — *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera: in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantur.* Misc. Berol. **7**, 1743, 172—192.

handlungen beginnen die zahlreichen Reihen für π, π^2, π^3 usw., deren Erfinder EULER ist. U. a. wird hier bewiesen, daß $\sum_{x=1\ldots\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ist. Die Bezeichnung π für die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser 1 gebrauchte EULER zum ersten Male in einer Abhandlung aus dem Jahre 1737[1]); hier kommt auch die Bezeichnung e für die Basis der natürlichen Logarithmen wiederholt vor. In dieser Abhandlung werden viele Reihen und Produktentwicklungen für π gegeben, die z. t. aus trigonometrischen und zyklometrischen Reihen gewonnen werden. Eine Abhandlung in den Misc. Berol. 1743[2]) enthält neben goniometrischen Reihen die Reduktion von Integralen auf die Quadratur des Kreises. Eine Zusammenstellung verschiedener Reihen, die zur Berechnung von π dienen, gibt EULER in einer Abhandlung aus dem Jahre 1737.[3]) Diese und andere Reihenentwicklungen finden sich in der Introductio.[4]) Halbkonvergente Reihen treten zum ersten Male auf in einer Arbeit vom Jahre 1739, die aber erst 1750 erschien.[5]) Sie werden zur Berechnung von π benutzt. EULER hebt hier ausdrücklich hervor, wie vorsichtig man bei der Summation divergenter Reihen sein müsse. Sehr schnell konvergente Reihen für π enthalten 2 Abhandlungen aus dem Jahre 1793[6]), sowie ein Aufsatz aus den Opera posthuma.[7]) Eine übersichtliche Zusammenstellung dieser mannigfachen Resultate, die meist aus der von EULER entdeckten Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen (siehe weiter unten: Funktionentheorie) hergeleitet werden, wäre eine sehr lohnende Aufgabe. Einiges ist erwähnt von F. RUDIO

1) L. EULER, *Variae observationes circa series infinitas.* Comm. Ac. Petrop. **9**, a. 1737, 160—183 [1744].

2) L. EULER, *Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam.* Misc. Berol. **7**, 1743, 91—129.

3) L. EULER, *De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimandi.* Comm. Ac. Petrop. **9**, a. 1737, 222—238 [1744].

4) L. EULER, *Introductio in Analysin infinitorum.* Lausannae 1748. I, Kap. 4, 7, 10, 13, 14, 15. — Siehe die erste Anm. zur Funktionentheorie, 6) S. 95.

5) L. EULER, *Consideratio progressionis cujusdam ad circuli quadraturam inveniendam idoneae.* Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1739, 116—127 [1750].

6) L. EULER, *Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accommodatae.* Nova Acta Ac. Petrop. **11**, a. 1793, 133—149 [1798]. — *De novo genere serierum rationalium et valde convergentium, quibus ratio peripheriae ad diametrum exprimi potest.* ib. 150—154.

7) L. EULER, *Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime investiganda.* Opera posthuma **1**, 288—298. 1862.

in einer Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels.[1])

Von ganz besonderer Tragweite sind die Untersuchungen EULERS über die harmonischen Reihen. Sie haben die Form $\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} + \frac{c}{a+2b} +$ usw., und heißen harmonisch, weil drei aufeinanderfolgende Glieder A_{n-1}, A_n, A_{n+1} in stetiger harmonischer Proportion stehen, d. h. weil $\frac{A_{n-1} - A_n}{A_n - A_{n+1}} = \frac{A_{n-1}}{A_{n+1}}$ ist. In der ersten Arbeit „De progressionibus harmonicis" aus dem Jahre 1734[2]) wird die Beziehung zwischen der harmonischen Reihe und dem Logarithmus hergeleitet:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} = \log(i+1) + C,$$

wo C die EULERsche Konstante ist, die hier auf 6 Stellen $= 0{,}577218$ berechnet wird. Später[3]) gab EULER für die harmonische Reihe die Formel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x} - \log x = C + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_2}{4x^4} - \frac{B_3}{6x^6} + \cdots\cdot\cdot$$

und berechnete die nach ihm benannte Konstante (er bezeichnete sie mit γ) auf 16 Stellen. Die doppelte Anzahl Stellen gab MASCHERONI.[4]) Die B_1, B_2, B_3 usw. sind die BERNOULLIschen Zahlen. Sie sind, wie EULER hervorhebt, von großem Nutzen bei der Summierung von Reihen aus den Potenzen der natürlichen Zahlen und ihrer Reziproken. Durch Integration und Differentiation solcher Reihen lassen sich andere finden, die ebenfalls summierbar sind. Eine Quelle für solche Reihen ist die allgemeine Reihe

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{B_1 dX}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx} \mp \frac{B_2 d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot dx^3} + \frac{B_3 d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot dx^5}$$

— usw., wo X das allgemeine Glied einer Reihe mit dem Index x und S das Summenglied. Für seine Konstante gab EULER später noch ver-

1) F. RUDIO, *ARCHIMEDES, HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE. Vier Abhandlungen über die Kreismessung.* Deutsch herausgegeben und mit einer Übersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Zirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Leipzig, B. G. Teubner. 1892. S. 50—53.

2) L. EULER, *De progressionibus harmonicis observationes.* Comm. Ac. Petrop. **7**, a. 1734—35, 150—161 [1740].

3) L. EULER, *De summis serierum numeros Bernoullianos involventium.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **14**, I, a. 1769, 129—167 [1770].

4) LORENZO MASCHERONI, *Adnotationes ad calculum integralem EULERI.* Pars I, Ticini 1790.

schiedene merkwürdige Formeln; er versuchte vergeblich, dieselbe als log einer bemerkenswerten Zahl darzustellen.[1]) Der Name BERNOULLIsche Zahl rührt von EULER her, der die Entwicklung der Funktion cotg fx nach Potenzen von x als ihren Ursprung angibt.[2]) Dieselbe Rolle spielen in der Entwicklung von sec$x$ die EULERschen Zahlen, die in seiner Differentialrechnung (l. c. 2,259—260, § 224) zum ersten Male auftreten: Sec $x = 1 - E_1 \frac{x^2}{2!} + E_2 \frac{x^4}{4!} - E_3 \frac{x^6}{6!} +$ usw. In neueren Arbeiten von E. LUCAS, E. CATALAN u. a. haben sich die EULERschen Zahlen vorteilhafter für die Rechnung erwiesen als die BERNOULLIschen.[3])

Historisch besonders wichtig ist, daß EULER durch seine Untersuchung der harmonischen Reihe auf eine Konvergenzbedingung für eine unendliche Reihe geführt wurde, welche mit einer Verbesserung auf die von CAUCHY fast 90 Jahre später entdeckte zurückgeführt werden kann. Wie Herr G. ENESTRÖM kürzlich nachgewiesen hat[4]), findet sich in der Abhandlung: „De progressionibus harmonicis observationes" nicht bloß die Divergenzbedingung $\lim_{n=\infty} |S_2 n - Sn| > 0$ deutlich ausgesprochen, sondern auch die exakte Auffassung der Konvergenzbedingung $\lim_{\infty} |S_2 n = Sn| = 0$, wenn auch nur gelegentlich ausgedrückt. Seine Entdeckung blieb unbeachtet und unfruchtbar bis auf BOLZANO und CAUCHY.[5])

Seit ABEL und JACOBI hat man vielfach die Untersuchungen EULERS aus der Theorie der Reihen unterschätzt, weil er mehrfach divergente Reihen benutzt hat. Wir haben schon oben erwähnt, daß EULER selbst zur Vorsicht bei der Summation divergenter Reihen

---

1) L. EULER, *De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente.* Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1781, P. II, 45—75 [1785]. — *Evolutio formulae integralis* $\int dx \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{lx}\right)$ *a termino* $x = 0$ *usque ad* $x = 1$ *extensae.* Nova Acta Ac. Petrop. **4**, a. 1786, 3—16 [1789].

2) L. EULER, *Institutiones calculi differentialis.* Berol. 1755. **2**, § 127.

3) E. LUCAS, *Théorie nouvelle des nombres de* BERNOULLI *et d'*EULER. C. R. Ac. sc. Paris **83**, 539—541. 1876 u. Nouv. Corr. math. **2**, 328—338, 1876, **3**, 69—73, 1877, u. Ann. math. p. appl. (**2**) **8**, 56—79, 1876. — E. CATALAN, *Sur les nombres de* BERNOULLI *et d'*EULER *et sur quelques intégrales définies.* Mém. Ac. Belg. **37**, Bruxelles 1867.

4) G. ENESTRÖM, *Über eine von* EULER *aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung.* Bibl. math. (**3**) **6**, 186—189. 1905. — A. PRINGSHEIM, *Über ein* EULER*sches Konvergenzkriterium.* ib. 252—256.

5) A. L. CAUCHY, *Exercices mathématiques.* **2**, 221. Paris 1827.

geraten hat. Schon in einem Briefe an Goldbach vom 7. August 1745[1]) definiert Euler die Summe einer Reihe folgendermaßen: „Summa cujusdam seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur." Das gilt auch für die divergenten Reihen. Diese Auffassung berechtigt ihn, divergente Reihen in einen Kettenbruch umzuwandeln, wie es in dem genannten Briefe mit der hypergeometrischen Reihe $1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 -$ etc. geschieht, die den Wert 0,5963475922 erhält. Neuerdings wurde die Anwendung der divergenten Reihen gerechtfertigt durch die Vorlesungen von Borel.[2]) Ganz im Sinne Eulers stellt er das Problem, für eine divergente Reihe eine Summe zu finden, d. h. eine Zahl zu suchen, welche, an Stelle der Reihe gesetzt, richtige oder fast immer richtige Resultate gibt. Er zeigt, daß die Entwicklungen zusammenhängen mit Weierstrass' Theorie der analytischen Funktionen und mit Mittag-Lefflers neuesten Untersuchungen über die analytische Fortsetzung einer Funktion. So sehen wir abermals, daß die Keime einer modernen Theorie auf Euler zurückzuführen sind. Er ist der Vorläufer von Stieltjes in der Verwandlung semikonvergenter Reihen in Kettenbrüche und bestimmte Integrale und von Poincaré in der Anwendung asymptotischer Reihen. Die hypergeometrische Reihe gehörte zu den transzendenten Progressionen, „quarum termini generales algebraice dari nequeunt".[3]) Ihren Namen hat die spezielle Reihe $\sum_n n!$ von Wallis Sie wurde von Euler verallgemeinert zur Reihe $\sum a(a+b)(a+2b)\ldots$[4]) und dann zu der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{ab(a+1)(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} +$ usw. von Gauss.[5]) Euler benutzt zur Summation die Differentialgleichung 2. O.

---

1) P. H. Fuss, *Correspondance math.* **1**, 323.

2) Borel, *Leçons sur les séries divergentes.* Paris 1901.

3) S. die ersten Arbeiten Eulers: *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.* Comm. Ac. Petrop. **5**, a. 1730 und 1731, 36—57 [1738]. — *De summatione innumerabilium progressionum.* ib. 91 bis 105.

4) L. Euler, *De termino generali serierum hypergeometricarum.* Nova Acta Ac. Petrop. **7**, a. 1789, 42—63 [1793]. — *Variae considerationes circa series hypergeometricas.* Nova Acta Ac. Petrop. **8**, a. 1790, 3—14 [1794].

5) Gauss, *Disquisitio generalis circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + usw.$$

Werke **3**, 127 u. 207. Übersetzt mit Einschluß der nachgelassenen Fortsetzung von H. Simon, Berlin 1887.

$$x(x-1)\frac{\partial^2 s}{s}+[c-(a+b+1)x]\frac{\partial s}{s}-ab=0,$$ [1]

die von Gauss zur Definition benutzt wurde. Die Einschließung der Reihensummen $\sum A_n$ zwischen 2 Integrale ergibt sich aus der Differentialgleichung $\frac{d\Sigma A_n}{dn}=A_n$, und so die Summe aus dem allgemeinen Gliede.[2] Methoden zur Verwandlung von Reihen oder Transformationen konvergenter Reihen in schneller konvergierende gab Euler in seiner Differentialrechnung[3], wo $ax+bx^2+cx^3$ usw. verwandelt wird in

$$\frac{x}{1-x}a+\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a+\frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a+\text{usw.},$$
$$(\Delta a=b-a,\ \Delta^2 a=c-2b+a\ldots)$$

und dadurch die Summe einer Anzahl numerischer Reihen gewonnen wird. Die Betrachtung des Restgliedes war Poncelet[4] vorbehalten. Eine Fortsetzung der Beziehungen zwischen der Summe divergenter Reihen und entsprechenden konvergenten Reihen enthalten die „Exercitationes analyticae"[5] aus dem Jahre 1772. Für die Verwandlung divergenter Reihen in Kettenbrüche sind noch zwei Abhandlungen aus den Jahren 1784 und 1785 zu erwähnen.[6] Eine Weiterausführung der soeben erwähnten Methode der gliedweisen Differentiation und Integration zur Summierung von Reihen wird in zwei Abhandlungen gelehrt, die erst in den Jahren 1790 resp. 1815 erschienen sind.[7]

---

1) L. Euler, *Specimen transformationis singularis serierum.* Nova Acta Ac. Petrop. **12**, a. 1794, 58—70 [1801].

2) L. Euler, *Methodus universalis serierum convergentium summam quam proxime inveniendi.* Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 3—8 [1741]. — *Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali.* ib. 9—22.

3) L. Euler, *Institutiones calculi differentialis.* **2**, cap. 1. S. Anm. 1) flg. S.

4) J. V. Poncelet, *Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries.* Journ. f. Math. **13**, 1—54. 1835.

5) L. Euler, *Exercitationes analyticae.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **17**, a. 1772, 173—204 [1773].

6) L. Euler, *De transformatione seriei divergentis* $1-mx+m(m+n)x^2-m(m+n)(m+2n)x^3+$ *etc. in fractionem continuam.* Nova Acta Ac. Petrop. **2**, a. 1784, 36—45 [1788]. — *De transformatione serierum in fractiones continuas, ubi simul haec theoria non mediocriter amplificatur.* Opusc. anal. **2**, 138—177. 1785.

7) L. Euler, *De singulari ratione differentiandi et integrandi, quae in summis serierum occurrit.* Nova Acta Ac. Petrop. **6**, a. 1788, 3—15 [1790]. — *Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi.* Mém. Ac. Pétersb. **5**, a. 1812, 45—56. [1815].

Differentialrechnung.

Im vorigen Abschnitt haben wir schon mehrfach von der Anwendung der Differentialrechnung auf die Summation von Reihen und auf die Umformung der Reihen sprechen müssen. Hier haben wir der übrigen bahnbrechenden Untersuchungen zu gedenken, welche Eulers „Institutiones calculi differentialis", 1755[1]), enthalten. G. A. Kästner nennt dieses Werk „unser vornehmstes klassisches Werk von der Differentialrechnung". In jedem Kapitel trägt es die Spuren des Genies. Es zeichnet sich aus durch die große Einfachheit und Klarheit in der Entwicklung der Grundsätze, durch den systematischen Aufbau, durch die Methoden der Darstellung und durch die schönen Anwendungen auf unendliche Reihen und auf die Theorie der Maxima und Minima. „Von seinem (des neuen Calculs) Nutzen in der Geometrie aber rede ich nicht" — sagt Euler in der Vorrede (S. LXXV der Übersetzung) —, weil man darüber Werke genug hat, da sogar die ersten Prinzipien der Differenzial-Rechnung aus der Geometrie hergenommen und dieselbe auf diese Wissenschaft gleich nach ihrer ersten Entwicklung mit der größten Sorgfalt angewandt worden sind. Das gegenwärtige Werk hält sich durchaus innerhalb der Grenzen der reinen Analyse, so daß ich auch nicht einmal eine einzige Figur zur Erläuterung nötig gehabt habe." Dadurch bereitete Euler den Boden, auf dem eine Arithmetisierung der Arithmetik, die mit Lagrange begonnen, möglich war. Durch Einführung des neueren Grenzbegriffes entwickelte Cauchy die Arithmetisierung weiter, die dann Weierstrass vollendete.

Eine ausführliche Inhaltsangabe des Werkes findet man bei M. Cantor.[2]) Es beginnt mit einer Theorie der endlichen Differenzen. Hier werden zum ersten Male die Zeichen Δ, Δ^2, Δ^3 usw. eingeführt. Aus der Differenzenrechnung entwickelt sich die Differentialrechnung. Euler war der Erste, der die Bedeutung der Taylorschen Reihe erkannte. Er hatte schon vor Maclaurin die von diesem aus der Taylorschen Reihe hergeleitete Summenformel veröffentlicht, die nun

---

1) L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum. Impensis Academiae Imperialis Petropolitanae.* Gedruckt Berlin 1755, 2 vol. 4. — *Leonhard Eulers Vollständige Anleitung zur Differenzialrechnung.* Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von Joh. Andr. Christ. Michelsen, I. u. II. T. Berlin u. Libau 1790. III. T. Berlin 1793. Die übrigen Ausgaben und Übersetzungen siehe bei Valentin l. c. Anmerkung 2) auf S. 64.

2) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* **3**, 2. Aufl., 749 bis 773, 1901.

mit Recht sogenannte EULER-MACLAURINsche Summenformel für das bestimmte Differenzenintegral:

$$h\sum_a^b f(x) - \int_a^b f(x)\,dx = -\frac{1}{2}h\Big[f(x)\Big]_a^b + \frac{B^2}{2!}h^2\Big[f'(x)\Big]_a^b - \frac{B^4}{4!}h^4\Big[f'''(x)\Big]_a^b + \text{usw.}$$

wo $[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$ usw., und die B die BERNOULLIschen Zahlen.[1]) In § 217 des ersten Teiles behandelt EULER den nach ihm benannten Satz von den homogenen Funktionen, welcher die Relation $Px + Qy = nV$ lehrt, wenn V eine homogene Funktion von x und y, und $dV = Pdx + Qdy$ ist. Dieser Satz war von EULER schon 1736 erkannt und in seiner Mechanica angedeutet.[2]) Er führt auf den Satz von der willkürlichen Reihenfolge der partiellen Differentiation. Zu erwähnen ist noch, daß EULER in I, § 201 ein besonderes Zeichen $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ für den partiellen Differentialquotienten einführt, wofür wir jetzt $\frac{\partial Q}{\partial x}$ schreiben. Das Werk enthält auch Sätze über Interpolation; in eine Potenzreihe wird das Glied mit gebrochenem Index eingeschaltet. In I, Kap. 9 wird die Differentiation der inexplikabeln Funktionen behandelt. Werden nämlich die Glieder einer Reihe, die den Indizes 1, 2, 3 usw. entsprechen, mit (1), (2), (3) usw. bezeichnet, so heißt für ein ganzes, gebrochenes, irrationales x die Reihe $\sum : x = (1) + (2) + (3) + \cdots + (x)$ eine *functio inexplicabilis*. Von ihnen handelt insbesondere eine spätere Abhandlung[3]), welche diese Funktionen mit Hilfe der Differenzenzeichen analytisch ausdrückt. Ein Beispiel ist die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}.$$

In der Vorrede zur Differentialrechnung (S. LIV) definiert EULER den Differenzial-Calcul als „die Methode, das Verhältnis der verschwindenden Elemente zu bestimmen, welche die Funktionen veränderlicher Größen bekommen, wenn die veränderliche Größe, wovon sie Funktionen sind, um ein verschwindendes Increment vermehrt worden". Das 3. Kapitel (S. 71 fg.) handelt dann ausführlich „Von dem Unendlichen und dem unendlich Kleinen" und das 4. (S. 101 fg.) „Von der

---

1) L. EULER, *Methodus generalis summandi progressiones.* Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1732—33, 68—97 [1739].

2) L. EULER, *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita.* Petrop. 1739, **2**, § 106, Prop. 14.

3) L. EULER, *Dilucidationes in Capita postrema calculi mei differentialis: de functionibus inexplicabilibus.* Mém. Ac. Pétersb. **4**, a. 1811, 88—119 [1813].

Natur der Differenzialien aller Ordnungen". Auf die verschiedenen Grade des Unendlichen kommt Euler in mehreren Abhandlungen zu sprechen. Die Kriterien, die in der höheren Analysis bei Logarithmen und Exponentialgrößen eintreten, sind andere als bei den Potenzen der unendlich großen oder unendlich kleinen Basis.[1])

In den Opera posthuma wurde noch ein dritter Band der Eulerschen Differentialrechnung veröffentlicht[2]), der die Anwendung auf die Theorie der Kurven enthält. Auf ihn werden wir in der Differential-Geometrie zurückkommen. Dort wird auch die Literatur der „Analysis infinitorum indeterminata" ihren Platz finden.

Wir erwähnen schließlich, daß in der oben[3]) genannten Abhandlung über die transzendenten Progressionen Euler eine genaue Erklärung der Differentiation mit gebrochenem Index gibt und damit eine Frage erledigt, die schon 1696 von Leibniz in einem Briefe an Johann Bernoulli aufgeworfen war.

Integralrechnung.

Die erstaunliche Leichtigkeit, mit welcher Euler Probleme der höheren Analysis behandelte, tritt besonders in der Integralrechnung ans Licht. Eine Fülle von Integrationen, an denen sich andere Mathematiker lange vergeblich abgemüht hatten, erledigte er in kurzer Zeit mit großer Gewandtheit. Wir finden die meisten derselben in seinem dreibändigen Meisterwerke, den „Institutiones calculi integralis", Petropoli 1768—1770, das in seiner neuen Ausgabe 1792—94 um einen vierten Band vermehrt wurde.[4]) Dieses Werk ist das vorzüglichste

---

1) L. Euler, *De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum.* Acta Ac. Petrop. **2**, a. 1878, P. I, 102—118 [1780].

2) L. Euler, *Institutionum calculi differentialis Sectio III.* Opera post. **1**, 342—403. 1862.

3) Vgl. Anmerkung 3) auf S. 84.

4) L. Euler, *Institutionum calculi integralis* Vol. 1, in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur, Petrop. 1768; Vol. II, in quo methodus inveniendi functiones unius variabilis ex data relatione differentialium secundi altiorisve gradus pertractatur, 1768; Vol. III, in quo methodus inveniendi functiones duarum et plurium variabilium ex data relatione differentialium cujusvis gradus pertractatur. Una cum appendice de calculo variationum et supplemento, evolutionem casuum prorsus singularium circa integrationem aequationum differentialium continente, 1769. Die neue Ausgabe, Petrop. 1792—94, enthält noch ein Vol. IV, continens supplementa partim inedita, partim jam in operibus Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae impressa. — Deutsch: *Leonhard Eulers Voll-*

ältere Lehrbuch der Integralrechnung, das auch heute noch studiert zu werden verdient, da es eine reichhaltige Quelle wichtiger Resultate ist, die oft durch die genialsten Kunstgriffe gefunden werden. Zwei wichtige Abhandlungen über die Integration gebrochener rationaler Funktionen hatte EULER schon in dem 14. Band der Commentarii, der 1751 erschien, veröffentlicht.[1]) „Von der Integration der rationalen Differenzialformeln" handelt das I. Kapitel der Integralrechnung. Eine neue Methode der Integration rationaler Funktionen ohne Anwendung imaginärer Größen gab EULER später in den Acta v. J. 1781.[2]) In Kap. II werden irrationale Funktionen integriert, in III folgt die Integration durch Reihen und in den folgenden Kapiteln die Integration der transzendenten Funktionen. Mit dem VIII. Kapitel beginnt die Theorie der bestimmten Integrale, die im folgenden Kapitel durch unendliche Faktorenfolgen ausgedrückt werden.

EULERS erste Behandlung der bestimmten Integrale, oder die Theorie „der Integrale, wenn nach der Integration der veränderlichen Größe ein bestimmter Wert beigelegt wird", stammt aus dem Jahre 1743.[3]) Die nach EULER benannten bestimmten Integrale treten schon früher auf. In einem Briefe an GOLDBACH vom 8. Januar 1730[4]) wird das EULERsche Integral 2. Gattung oder (nach LEGENDRES Bezeichnug) die Γ-Funktion $\int\limits_0^1 \left(\log. \frac{1}{x}\right)^n$ behandelt, und beide Funktionen, die Beta- und die Gammafunktion, werden in die Wissenschaft eingeführt in den schon oben[5]) genannten, für die Theorie der transzendenten Progressionen grundlegenden Abhandlungen aus dem 5. Bande der Commentarii. Eine Darstellung der Betafunktionen durch unendliche Produkte und eine Verwandlung derselben in Kettenbrüche bringt

---

ständige Anleitung zur Integralrechnung. Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von JOSEPH SALOMON. 4 Bde. I 1828, II 1829, III u. IV 1830, Wien, CARL GEROLD.

1) L. EULER, *Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes.* Comm. Ac. Petrop. **14**, a. 1744—46, 3—91 [1751], — *Methodus facilior atque expeditior integrandi formulas differentiales rationales.* ib. 99 bis 150.

2) L. EULER, *Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginarium.* Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1781. P. I, 3—47 [1784].

3) L. EULER, *De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur.* Misc. Berol. **7**, a. 1743, 129—171.

4) S. die in Anmerkung 3) auf S. 69 erwähnte Correspondance 1, 13.

5) Vgl. Anmerkung 3) auf S. 84.

eine Abhandlung des 11. Bandes der Commentarii, die in den Novi Commentarii 6 fortgesetzt wird.[1]) Dieselbe Theorie behandelt ein Aufsatz im 3. Bande der Miscellanea Taurinensia.[2]) Über den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^1 \partial x \left(l\frac{1}{x}\right)^n$ siehe auch eine Abhandlung aus dem Jahre 1790.[3]) In Kap. 9 der Integralrechnung (S. 221) wird für das Integral $\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ das Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ eingeführt. In die Supplemente wurde eine umfangreiche Arbeit über die Betafunktion aus dem Jahre 1771 aufgenommen.[4]) Hier werden die Doppelintegrale in der Theorie der einfachen Integrale benutzt. Der Name *formula integralis duplicata* wird von Euler eingeführt in einer wichtigen Arbeit über Doppelintegrale aus dem Jahre 1769, woselbst auch eine allgemeine Lösung der berühmten Vivianischen Aufgabe gegeben wird.[5]) Zu erwähnen ist hier eine Abhandlung über wiederholte Integration aus dem Jahre 1789[6]), wo unter dem Integral Potenzen von der Form x^ϑ mit variablem Exponenten ϑ auftreten. Der 4. Band der „Institutiones calculi integralis" ist eine Fundgrube interessanter bestimmter Integrale, die durch besondere Kunstgriffe ausgewertet werden. Für die Beziehungen zwischen bestimmten Integralen, unendlichen Produkten und Kettenbrüchen besonders wichtig ist eine Arbeit aus den Opuscula

---

1) L. Euler, *De fractionibus continuis observationes.* Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1739, 32—81 [1750]. — *De expressione integralium per factores.* Novi Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1756—57, 115—154 [1761].

2) L. Euler, *Observationes circa integralia talium formularum:*

$$\int x^{p-1} dx \left(1-x^n\right)^{\frac{q}{k}-1}$$

posito post integrationem $x=1$. Misc. Taur. **3**, 156b, 1762—65.

3) L. Euler, *De vero valore formulae integralis* $\int dx \left(l\frac{1}{x}\right)^n$ *a termino* $x=0$ *usque ad* $x=1$ *extensae.* Nova Acta Ac. Petrop. **8**, a. 1790, 15—31 [1794].

4) L. Euler, *Evolutio formulae integralis* $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$, *integratione a valore* $x=0$ *ad* $x=1$ *extensa.* Novi Comm. Ac. Petrop. **16**, a. 1771, 91—159 [1772]. — Inst. calc. int. **4**, 78—116. — Integralrechnung **4**, Suppl. III, 75—116.

5) L. Euler, *De formulis integralibus duplicatis.* Novi Comm. Ac. Petrop. **14**, I, a. 1769, 72—103 [1770].

6) L. Euler, *De iterata integratione formularum integralium dum aliquis exponens pro variabili assumitur.* Nova Acta Ac. Petrop. **7**, a. 1789, 62—82 [1793].

analytica vom Jahre 1785[1]) und eine spätere in den Mémoires de St. Pétersbourg vom Jahre 1812.[2])

Wir kommen nur zur Theorie der Differentialgleichungen. Das Meisterwerk, die „Institutiones calculi integralis", trägt, wie wir oben aus dem vollständigen[3]) Titel ersehen, die Theorie der linearen totalen Differentialgleichungen erster Ordnung im zweiten und dritten Abschnitt des 1. Buches vor.[4]) Kap. I. Trennung der Veränderlichen, II. Anwendung des Multiplikators auf die Integration der Differentialgleichungen, III. Integrabilität durch Multiplikatoren von gegebener Form, IV. Von den partikulären Integralen, V. Die spezielle Differentialgleichung von der Form $\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{R_2(x)}} + \frac{P(y)\,dy}{R_2(y)} = 0$, VI. Die EULERsche Differentialgleichung für elliptische Funktionen, VII. Integration durch Näherung. Der 1. Abschnitt des II. Bandes[5]) behandelt die totalen Differentialgleichungen 2. Ordnung (secundi gradus nach EULERS Ausdruck) mit 2 Variabeln, und dessen 2. Abschnitt die Differentialgleichungen 3. und höherer Ordnung mit 2 Variabeln.[6]) Die erste Arbeit über die Zurückführung der Differentialgleichung 2. Ordnung auf solche 1. Ordnung, vermittels der Substitution $x = e^{\alpha v}$, $y = e^{vt}$, wenn $dx = $ konst., gab EULER schon im Jahre 1728.[7]) Er sagt ausdrücklich, die Benutzung der Exponentialgrößen führe auch bei vielen Differentialgleichungen höherer Ordnung zur Integration. Eine in mehrfacher Beziehung bahnbrechende Arbeit über Kurven mit einem veränderlichen Parameter oder Modulus im 7. Bande der Commentarii[8]) enthält die erste Benutzung eines integrierenden Faktors und den Satz

---

1) L. EULER, *Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casibus inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi.* Opusc. anal. **2**, 178—216, 1785; Inst. calc. int. 378 sq. (deutsche Ausg. 359—392).

2) L. EULER, *De fractionibus continuis Wallisii.* Mém. Ac. Pétersb. **5**, a. 1812, 24—44 [1815].

3) Vgl. Anm. 4) auf S. 88.

4) L. EULER-SALOMON, Integralrechnung I, 235—439.

5) ib. II, 1—284.

6) ib. II, 285—424.

7) L. EULER, *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus.* Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1728, 124—137 [1732].

8) L. EULER, *De infinitis curvis ejusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis.* Comm. Ac. Petrop. **7**, a. 1734—35, 174—183 [1740]. — *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis*, ib. 184—200 [1740]. Die Seitenzahlen 180—189 kommen im Original zweimal vor, so daß die Arbeit umfangreicher ist, als es erscheint.

von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge. Die erste grundlegende Arbeit über die Integration der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y + a\frac{dy}{dx} + b\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots = 0$$

vermittels einer einzigen Operation veröffentlichte Euler in dem 7. Bande der Miscellanea Berolinensia im Jahre 1743.[1]) Vor ihm bedurfte man nach Johann Bernoulli n aufeinanderfolgender Operationen zur Lösung der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit variabeln Koeffizienten. Euler teilte seine Methode, die auf der Vergleichung der linken Seite mit einem Polynom n^{ten} Grades und der Zerlegung der letzteren in lineare oder quadratische Faktoren beruhte (s. oben Algebra S. 69), schon früher Johann Bernoulli in einem Briefe vom 15. September 1739 mit.[2]) Im folgenden Briefe an Johann Bernoulli vom 19. Januar 1740 teilt er diesem mit, daß eine ähnliche Methode auch zur Lösung der Differentialgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten

$$y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bx^2d^2y}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{usw.} = 0$$

($dx =$ konst.) führe. Der Fall, wo das 2. Glied nicht $= 0$ ist, sondern eine Funktion von x, wird von Euler zum ersten Male behandelt im 3. Bande der Novi Commentarii, der 1753 erschien.[3]) Zahlreiche Beispiele erläutern die beiden zuletzt genannten Arbeiten Eulers. Eine Sammlung der verschiedenen Differentialgleichungen, die in den die allgemeine Theorie behandelnden Schriften Eulers vorkommen, würde für den Studierenden von großem Nutzen sein. Durch fortwährende Verbesserung der Methoden, durch immer neue Kunstgriffe gelingt es Euler, schwierige Probleme, an deren Lösung seine Vorgänger zweifelten, zu bewältigen. Wiederholt beschäftigte sich Euler beispielsweise mit der Riccatischen Gleichung $dy + y^2dx = ax^m dx$, die Jacopo Riccati 1722 vorgelegt hatte.[4])

---

1) L. Euler, *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum.* Miscell. Berol. **7**, 193—242, 1743.

2) G. Eneström, *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants.* Bibl. math. (**2**) **11**, 43—50, 1897.

3) L. Euler, *Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota.* Novi Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1750—51, 3—35 [1753].

4) Jacopo Riccati, Acta Erud. Suppl. VIII, 73, 1722. — L. Euler, *Constructio aequationis differentialis* $ax^n dx = dy + y^2 dx$. Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1732—33, 231—246 [1739]. — *De aequationibus differentialibus, quae certis tantum casibus*

Für die Theorie des EULERschen Multiplikators oder des integrierenden Faktors in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist vor dem Erscheinen der „Institutiones calculi integralis“ eine Arbeit in den Novi Commentarii 8 zu nennen[1]), und später im 17. Bande zwei Abhandlungen.[2]) In einem Supplement zum 3. Bande der Integralrechnung[3]) werden die Vorzüge der allgemeinen Methode des integrierenden Multiplikators vor der Absonderung der Veränderlichen in vielen Fällen auseinandergesetzt.

Die fernere Literatur der EULERschen Differentialgleichung für elliptische Integrale wird in der „Funktionentheorie“ angegeben werden.

Partielle Differentialgleichungen sind von EULER im III. Bande seiner Institutiones calculi integralis behandelt worden. Der nach ihm benannte Satz für die Summe der Produkte aus den partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion in die bezüglichen Variabeln:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \cdots = r \cdot f,$$

wo r der Grad der Homogeneität, findet sich am Schluß des III. Bandes, in Kap. 4, das die Auflösung der homogenen Differentialgleichungen behandelt. Im III., IV. und V. Kapitel der Sektion 2 desselben Bandes wird von EULER die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{a}{x-y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{a}{x-y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

allgemein gelöst, welche schon in seinen Untersuchungen über die Ausbreitung des Schalles auftritt und bei mehreren geometrischen Problemen von Wichtigkeit ist. Da ihre allgemeine Lösung unter einer ganz neuen Form entwickelt wird, welche die Ableitungen der willkürlichen Funktionen bis zu irgend einer Ordnung enthielt, so hat G. DARBOUX[4]) diese Differentialgleichung die EULERsche partielle

---

integrationem admittunt. Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1738, 40—55 [1747]. — Auszug Nova Acta Erud. 1733, 369—373. — Integralrechnung I, § 441—442, S. 257 bis 259 u. III, § 346, 240—242. — *Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi.* Mém. Ac. Pétersb. **6**, a. 1813—14, 12—29 [1818].

1) L. EULER, *De integratione aequationum differentialium.* Novi Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1760—61, 3—63 [1763].

2) L. EULER, *De variis integrabilitatis generibus.* Novi Comm. Ac. Petrop. **17**, a. 1772, 70—104 [1773]. — *Observationes circa aequationem differentialem* $ydy + Mydx + Ndx = 0$. ib. 105—124.

3) L. EULER-SALOMON, Integralrechnung III, 487—520: Supplement, welches die Entwicklung besonderer Fälle rücksichtlich der Integration der Differentialgleichungen enthält.

4) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* IIe Partie. Chap. **3**, Paris 1889.



Differentialgleichung genannt. Bald nachdem D'ALEMBERT bei seinen Untersuchungen über schwingende Saiten die erste Arbeit über partielle Differentialgleichungen veröffentlicht hatte, in der er die allgemeine Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ in der Form $y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x)$ gab, erschien in den Mémoires der Akademie zu Berlin v. J. 1748[1]) eine Abhandlung, die die Untersuchungen D'ALEMBERTS in neuer Form darstellte und die Bedingungen für die Funktion y richtiger formulierte. Wir kommen auf diese Ansichten über die willkürlichen Funktionen in der „Funktionentheorie" zurück. Viele andere partielle Differentialgleichungen enthalten die Abhandlungen EULERS über angewandte Mathematik.

Variationsrechnung.

Da in dieser Festschrift die Verdienste EULERS um die Variationsrechnung von kompetenterer Seite eingehend geschildert werden, so kann ich mich mit kurzen Literaturangaben begnügen. Eine zusammenhängende klare Darstellung der Variationsrechnung gibt EULER im III. Bande seiner Institutiones calculi integralis.[2]) Als Einführung ist diese Darstellung auch noch heute empfehlenswert. Den Keim dieser neuen Disziplin bildete die Beschäftigung mit dem isoperimetrischen Problem. Auf dieses kommt EULER zum ersten Male zu sprechen in einem Briefe an JOHANN I. BERNOULLI vom 30. Juli 1738.[3]) Es handelt sich um das Problem, unter allen isoperimetrischen Kurven diejenige zu bestimmen, in der $\int r^m ds$ (wo r der Krümmungsradius, s der Bogen) ein Maximum oder Minimum. EULER veröffentlichte eine Lösung schon im 10. Bande der Commentarii.[4]) Noch ein zweiter Brief vom 20. Dezember 1738 bringt Notizen über die allgemeine Lösung isoperimetrischer Probleme und über das im vorhergehenden Briefe behandelte spezielle Problem. Eine Klassifizierung aller Aufgaben über Maxima und Minima versuchte EULER in einer früheren auch sonst wichtigen Abhandlung im 6. Bande der Commentarii[5]), und eine

1) L. EULER, *Sur la vibration des chordes.* Hist. Mém. Ac. Berlin **4**, a. 1748, 69—85 [1750].

2) L. EULER-SALOMON, Integralrechnung III, Anhang, 379—486.

3) G. ENESTRÖM, *Der Briefwechsel zwischen LEONHARD EULER und JOHANN I BERNOULLI.* Bibl. math. (5) **4**, 344—388, 1903; (5) **5**, 248—291, 1904; (5) **6**, 16 bis 87, 1905. — Der betr. Brief steht **5**, 276—285.

4) L. EULER, *Solutio problematis cujusdam a Cel. DAN. BERNOULLI propositi.* Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1738, 164—180 [1747].

5) L. EULER, *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis.* Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1732—33, 123—155 [1739].

schärfere Formulierung der Bedingungen für die Kurven mit Maximal- und Minimaleigenschaften enthält der 8. Band.[1]) Das waren aber nur Vorarbeiten auf das für die Variationsrechnung fundamentale Werk, die „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes“[2]), das im Jahre 1744 erschien. Mit diesem klassischen Werk beginnt auch die Literatur der Minimalflächen, da hier spezielle Fälle derselben betrachtet werden. Nachdem 1755 der junge LAGRANGE die von ihm erfundene vervollkommnete Methode EULER mitgeteilt, gab dieser eine erste zusammenhängende Darstellung des *calculus variationum* im 10. Bande der Novi Commentarii.[3]) In einer Fortsetzung dieser Arbeit stellte EULER das sogenannte Problem der Integrabilität auf, das in engster Beziehung zur Variationsrechnung steht, und erläuterte es durch mehrere Beispiele.[4]) Eine interessante Analogie zwischen dem ∂y und dem dy, oder zwischen der Variationsrechnung und der Theorie der Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln führt EULER durch im 16. Bande der Novi Commentarii.[5])

Funktionentheorie.

An die Spitze dieses Kapitels müssen wir eines der gediegensten inhaltreichsten und fruchtbarsten mathematischen Werke stellen, EULERS berühmte *Introductio in analysin infinitorum*, die im Jahre 1748 erschien.[6]) Der erste Band dieses klassischen Werkes ist eine vollständige Darstellung der algebraischen Analysis oder der elementaren Funktionen-

---

1) L. EULER, *Curvas maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis.* Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 159—190 [1741].

2) L. EULER, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Lausannae et Genevae 1744, 320 S. 4°. — Die Kapitel I, II, V u. VI, welche die Aufgaben der einfacheren Art behandeln, sind von P. STÄCKEL in deutscher Übersetzung herausgegeben: Abhandlungen über Variationsrechnung. I. Teil. Abhandlungen von JOH. BERNOULLI (1696), JAC. BERNOULLI (1697) und LEONHARD EULER (1744). OSTWALDS Klass. d. ex. Wiss. Nr. 46. Leipzig, W. ENGELMANN 1894.

3) L. EULER, *Elementa calculi variationum.* Novi Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1764, 51—92 [1766].

4) L. EULER, *Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum.* Novi Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1764, 94—134 [1766].

5) L. EULER, *Methodus nova ac facilis calculum variationum tractandi.* Novi Comm. Ac. Petrop. **16**, a. 1771, 551—580 [1772].

6) L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum.* Lausannae 2 v. 4°, 1748. — Deutsch von MICHELSEN. 3. Teil. Berlin 1788. — I. Bd. deutsch von MASER. Berlin 1885. — Die zahlreichen Ausgaben und Übersetzungen siehe bei VALENTIN l. c. Anm. 2) auf S. 64.

lehre in 18 Kapiteln. Wegen des ausführlichen Inhalts verweisen wir auf M. Cantors Geschichte der Mathematik.[1]) In Kap. 1 erweist sich Euler als der Schöpfer des Funktionsbegriffes. Dieser hier zum ersten Male an die Spitze der Theorie gestellte Begriff dient zugleich als Einteilungsprinzip für den Inhalt. Die Bezeichnung einer Funktion durch $f(x)$ sowie die Definition hatte Euler schon in den Abhandlungen des 7. Bandes der Commentarii gegeben, die wir in den Anmerkungen 6) (S. 91) und 2) (S. 91) genannt haben. Kapitel 9 enthält die Umformung der Funktionen, die Zerlegung in einfache Faktoren, die Zerfällung in Partialbrüche. Eine Fortsetzung bildet die Darstellung der trinomischen Faktoren in Kapitel 9 und die Entwicklung gebrochener Funktionen in Kapitel 12. Eine andere Umformung wird durch die Substitution bewirkt (Kapitel 3). Die Entwicklung in Reihen beginnt, wie wir schon oben sahen, mit Kapitel 4, in dem auch die rekurrenten Reihen behandelt werden, deren Theorie im 12. und 17. Kapitel fortgesetzt wird. Von den Funktionen mehrerer Variabeln handelt das 5. Kapitel. Mit dem 6. Kapitel beginnt die Theorie der elementaren transzendenten Funktionen, der Exponentialgrößen, der Logarithmen und der trigonometrischen Funktionen.

Es scheint wenig bekannt zu sein, daß auch Euler eine geometrische Darstellung des Imaginären gegeben hat. Als Einleitung zu einer Abhandlung „über analytische Theoreme, deren Beweis noch aussteht"[2]), wird die Größe $a + bi$ mittels eines Kreises geometrisch veranschaulicht. Die Ausziehung einer Wurzel mit beliebigem Exponenten aus $A \pm B$, wo beide oder B allein eine Quadratwurzel aus einer positiven oder negativen Zahl, mit Anwendungen auf Gleichungen, gab Euler im 13. Bande der Commentarii.[3]) Wichtige Untersuchungen über die näherungsweise Bestimmung beliebig vieler mittleren Proportionalen zwischen gegebenen Zahlen ohne Wurzelausziehung enthält eine Arbeit aus dem Jahre 1769[4]), und Formeln zur Berechnung

---

1) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* III. Bd., 2. Aufl. S. 699—721. 1901.

2) L. Euler, *Theoremata quaedam analytica, quorum demonstratio adhuc desideratur* (I. Omnes plane quantitates imaginariae, quaecunque in calculo analytico occurrere possunt, ad hanc formam simplicissimam $a + b\sqrt{-1}$ ita revocari possunt, ut litterae a et b quantitates reales denotent). Opusc. anal. **2**, 76—90. 1785.

3) L. Euler, *De extractione radicum ex quantitatibus irrationalibus.* Comm. Ac. Petrop. **13**, a. 1741—43, 16—60 [1751].

4) L. Euler, *De inventione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractione.* Novi Comm. Ac. Petrop. **14**, I, a. 1769, 188—214 [1770]. Comm. ar. **1**, 401—413.

irrationaler Größen, sowie des Logarithmus und der Exponentialfunktion $e^x = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]_{n=\infty}$ gibt eine Abhandlung aus dem Jahre 1773.[1])

Der Streit zwischen LEIBNIZ und JOH. I. BERNOULLI über die Logarithmen negativer Zahlen[2]) gab EULER Veranlassung, in verschiedenen Briefen an JOH. I. BERNOULLI aus den Jahren 1728—1729[3]) und an D'ALEMBERT aus dem Jahre 1741[4]) sowie in einer bahnbrechenden Arbeit in den Mémoires de l'Académie de Berlin vom Jahre 1749[5]) diese wichtige Frage zu berühren und zu entscheiden. Er war der erste, welcher auf die Unendlichvieldeutigkeit der Logarithmen hinwies. In der zuletzt genannten Abhandlung erscheint die Formel $i \log i = -\frac{\pi}{2}$, welche von größter Bedeutung, besonders für die Berechnung von π, werden sollte. Eine Fortsetzung dieser Abhandlung über die Logarithmen der negativen und imaginären Zahlen wurde aus den Opera posthuma erst 1862 veröffentlicht.[6]) U. a. wird hier die Formel $l(-1)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\mu \pm 2\mu m \pm 2\nu n)\pi i$ gegeben.

Die Beziehungen zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen, die EULER schon 1740 bemerkt hatte, veröffentlichte er zum ersten Male im Jahre 1743 im 7. Bande der Miscellanea Berolinensia.[7]) Es finden sich hier schon die Formeln:

$$e^z = \left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right]_{n=\infty}, \quad \sin s = \frac{e^{si} - e^{-si}}{2i}, \ \cos s = \frac{e^{si} + e^{-si}}{2}.$$

Von welcher weittragenden Bedeutung diese Relationen für die Analysis und die Trigonometrie, für die Berechnung von π und für andere

---

1) L. EULER, *Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi.* Novi Comm. Ac. Petrop. **18**, a. 1773, 136—170 [1774].

2) S. M. CANTOR, *Vorlesungen.* Bd. **3**, 2. Aufl., 1901, Kap. 97, S. 360 u. flg.

3) G. ENESTRÖM (vgl. Anm. 3) auf S. 94), Brief vom 10. Dezember 1729 u. vom 16. Mai 1729.

4) CHARLES HENRY, *Lettres inédites d'EULER à D'ALEMBERT.* Bull. bibl. stor. **19**, 136—148, 1886. Diese Briefe sind von Herrn E. LAMPE für die EULER-Festschrift übersetzt.

5) L. EULER, *De la controverse entre Mrs. LEIBNITZ et BERNOULLI sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.* Hist. Mém. Ac. Berlin **5**, a. 1749, 139—179 [1751].

6) L. EULER, *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.* §§ 1—34. Opera post. **1**, 269—281 [1862].

7) L. EULER, *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera.* Misc. Berol. **7**, 172—192, 1743.

numerische Entwickelungen werden sollten, braucht hier nicht näher erörtert zu werden.

Eulers Introductio enthält im 18. Kapitel die Lehre von den Kettenbrüchen, nach den fundamentalen Arbeiten im 9. und 11. Bande der Commentarii, die wir schon in den Anmerkungen 7) und 8) auf S. 78 erwähnt haben, dargestellt. In den dort gegebenen Beziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und gewissen Differentialgleichungen liegt, wie Herr Pringsheim[1]) nachgewiesen hat, der Keim des Beweises der Irrationalität von e und e^2. Zwanzig Jahre vor Lambert ist diese Irrationalität schon im wesentlichen bewiesen worden. Zugleich gibt auch Euler schon diejenigen allgemeinen Kettenbruch-Entwicklungen, auf denen der Lambertsche Beweis der Irrationalität von e^x, tg x und π, aus dem Jahre 1767, sowie der Legendresche Irrationalitätsbeweis für π^2 beruhen.

Die Untersuchungen Eulers über die schwingenden Saiten gaben ihm Veranlassung zur Einführung der willkürlichen Funktionen in die Lösungen einer gewissen partiellen Differentialgleichung und zur Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe. In einer schon oben genannten Arbeit aus dem Jahre 1748[2]) findet er als Lösung des Problems der schwingenden Saite die Kurve

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi v}{a} + \cdots.$$

Im 3. Bande der Novi Commentarii[3]) löst Euler die Aufgabe, eine Funktion zu finden, die für ganzzahlige Werte des Arguments $x = n$ vorgeschriebene Werte $f(n) = an$ annimmt, und behandelt dann die Frage nach der allgemeinsten periodischen Funktion, die für $x = 0$ den Wert 1 annimmt. Er erhält sie unter der Form

$$y = 1 + \sum_k (\alpha_k \sin 2k\pi x + \mathfrak{A}_k[\cos 2k\pi x - 1]).$$

Eulers Verdienste um die Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion durch eine trigonometrische Reihe hat B. Riemann in seiner berühmten Habilitationsschrift[4]) geschildert. Dan. Bernoullis Lösung des Pro-

1) A. Pringsheim, *Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π.* Sitzgsb. Ak. München. Math.-phys. Kl. 27, 325—337. 1898.

2) Vgl. Anm. 1) auf S. 94.

3) L. Euler, *De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum.* Novi Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1750—51, 36—85 [1753].

4) *Bernhard Riemanns Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß.* 2. Aufl. bearbeitet von Heinrich Weber. Leipzig 1892. XII. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. S. 227—264.

blems der schwingenden Saiten erschien in der Form von trigonometrischen Reihen. EULER meinte, entweder müsse jede willkürliche Abhängigkeit durch eine solche Reihe darstellbar sein, oder die BERNOULLIsche Lösung besitze nicht die volle Allgemeinheit. Er neigte sich mehr der letzteren Ansicht zu.[1]) So war er ein Vorläufer FOURIERS (1807). EULER gab die Integraldarstellung der Koeffizienten 1793[2]), also fast 30 Jahre vor FOURIER.

In der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln ist EULER ein Vorläufer von POISSON und CAUCHY. Er bezeichnet als Fundamentalsatz der Theorie der imaginären Größen den Satz, daß jede Funktion Z von z, die für $z = x + iy$ gleich $M + iN$ ist, für $z = x - iy$ in $M - iN$ transformiert wird. Herr P. STÄCKEL[3]) hat zum ersten Male darauf aufmerksam gemacht, daß EULER schon im Jahre 1777 die für die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln fundamentalen Relationen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

gefunden hat. Aus dem Integral

$$\int Z(z)dz = \int (M \pm iN)\, d(x \pm iy) = V(z) = P \pm iQ$$

folgert er zunächst, daß $Mdx - Ndy$ und $Ndx + Mdy$ integrabel sind, und daraus schließt er die angeführten Relationen.[4]) In der genannten Abhandlung untersucht er die Integrale $\int z^n \partial z$, $\int \frac{\partial z}{1+z^2}$, $\int \frac{\partial z}{1+z^3}$ und $\int \frac{z^{n-1}\partial z}{1+z^n}$, wenn $z = x + iy = v(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, und in einem Supplement nach zwei Methoden das Integral $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^m}$.[5]) Fortsetzungen dieser Untersuchungen und Anwendungen auf interessante

1) L. EULER, *Remarques sur les Mémoires de DAN. BERNOULLI, qui roulent sur la courbe que fait une corde tendue mise en vibration et sur les différentes espèces de vibrations des cordes.* Hist. Mém. Ac. Berlin **9**, 1753, 196—222 [1755].

2) L. EULER, *Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cujusdem anguli progredientibus.* Nova Acta Ac. Petrop. **11**, a. 1793, 114—132. [1798].

3) P. STÄCKEL, *Integration durch imaginäres Gebiet.* Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie. Bibl. math. (**3**) **1**, 109—128.

4) L. EULER, *De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis.* Nova Acta Ac. Petrop. **7**, a. 1789, 99—133 [1793]. Exhib. 20. III. 1777.

5) L. EULER, *Supplementum ad dissertationem praecedentem circa integrationem formulae* $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1-z^m}$, *casu quo ponitur* $z = v(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$. ib. 134—148.

Beispiele enthalten drei später in den Nova Acta 10, 12 und 14 veröffentlichte Abhandlungen.[1]) Anwendungen seiner Fundamentalsätze aus der Theorie der komplexen Funktionen auf die Theorie der Gammafunktionen enthält eine Abhandlung vom 30. April 1781, die in dem 4. Bande der Institutiones calculi integralis steht.[2])

Wir sahen oben, daß Kap. II der *Introductio* die Zerfällung in Partialbrüche behandelte. Zwei spätere Abhandlungen aus den Jahren 1780 und 1785[3]) geben neue Methoden für die Zerlegung sowohl rationaler, wie transzendenter Brüche in einfache Brüche. Diese Zerlegungen sind besonders fruchtbar in der Theorie der elliptischen Funktionen.

Schon in einem Briefe an Daniel Bernoulli vom 18. Februar 1734 hatte Euler eine Untersuchung mitgeteilt über eine Kurve, welche durch die Endpunkte einer Schar gleicher Ellipsenbogen geht. Diese Untersuchung erschien 1741.[4]) Eine Rektifikation der Ellipse, d. h. eine Entwicklung des elliptischen Integrals 1. Gattung nach Potenzen der Exzentrizität und eine andere nach Potenzen des Achsenverhältnisses gab Euler in dem 2. Bande der Opuscula varii argumenti 1750.[5]) Eine einfachere, zur Berechnung vorteilhaftere Reihe gab Euler später in den Novi Commentarii 18.[6]) Die Beziehungen zwischen den Bogen der Ellipse, Hyperbel und anderer algebraischer Kurven hatten Fagnano und andere auf elliptische Integrale geführt. Von Fagnano war schon 1716 der Satz bewiesen: „Ist ein Bogen einer Ellipse oder einer Hy-

---

1) L. Euler, *Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis.* (Exhib. 21. III. 1777.) Nova Acta Ac. Petrop. **10**, a. 1792, 3—19 [1797]. — *De insigni usu calculi imaginariorum in analysi.* (Exhib. 3. XI. 1777.) Nova Acta Petrop. **12**, a. 1794, 3—21 [1801]. — *De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt.* (Exhib. 21. III. 1777.) Nova Acta Ac. Petrop. **14**, a. 1797—98, 62—74 [1805].

2) L. Euler, *De valoribus integralium a terminis variabilis* $x = 0$ *usque ad* $x = \infty$ *extensorum.* (Exhib. 30. IV. 1781.) Instit. calc. int. **4**, Suppl. 5 no 4, 1794, 321—328. Ed. 3, 1845, 337—345.

3) L. Euler, *Nova methodus fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi.* Acta Ac. Petrop. **4**, a. 1780, P. I, 32—46 [1783]. — *De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices.* Opusc. an. **2**, 102—137. 1785.

4) L. Euler, *Solutio problematum rectificationem ellipsis requirentium.* Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 86—98 [1741].

5) L. Euler, *Animadversiones in rectificationem ellipsis.* Opusc. var. arg. **2**, Berol. 1750, 121—166.

6) L. Euler, *Nova series infinita maxime convergens perimetrum ellipsis exhibens.* Novi Comm. Ac. Petrop. **18**, a. 1773, 71—84 [1774].

perbel gegeben, so kann auf diesen Kurven stets ein zweiter Bogen angegeben werden, der sich von dem ersteren um eine algebraische Größe unterscheidet."[1]) Analytisch ausgedrückt war das eine Lösung der EULERschen Differentialgleichung. EULER gab zunächst das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

und dann die Integration der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}.\,^{2)}$$

Er fand das Additionstheorem für die elliptischen Integrale 2. Gattung und brachte durch geeignete einfache Bezeichnung die elliptischen Integrale zu einer gleichen Bedeutung in der Analysis wie die zyklometrischen Funktionen und die Logarithmen. Seine wichtigsten Arbeiten sind in den Bänden 8, 10 und 12 der Novi Commentarii enthalten.[3]) Sie begründeten die Theorie der elliptischen Transzendenten und gaben den Anstoß zu den Untersuchungen von LEGENDRE. Die Methode LAGRANGES zur Herleitung des Additionstheorems in dem 4. Bande der Mélanges de Turin erläuterte und vereinfachte EULER in den Acta v. J. 1778.[4]) Anwendungen auf Ellipsenbogen enthält eine Arbeit in den Acta v. J. 1781.[5]) In den Opera posthuma I (1862) findet sich

---

1) G. CARLO CONTE DI FAGNANO, *Teorema da cui se deduce una nuova misura degli Archi Elittici, Iperbolici e Cicloidali.* Giorn. de' Lett. d'It. **26**, 266—279, 1716; auch Produzioni mat. **2**, 336—342, 1750.

2) L. EULER, *De integratione aequationis differentialis* $\frac{m\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$. Novi Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1756—57, 37—57 [1761]. — *Observationes de comparatione arcuum irrectificabilium.* ib. 58—84.

3) L. EULER, *Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest.* Novi Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1760—61, 129—149 [1763]. *De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae.* Novi Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1764, 3—50 [1766]. — *Integratio aequationis* $\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{dy}{\sqrt{x+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$. Novi Comm. Ac. Petrop. **12**, a. 1766—67, 3—16 [1768]. — *Evolutio generalior formularum comparatione curvarum inserventium.* ib. 42—86.

4) L. EULER, *Dilucidationes super methodo elegantissima qua illustris* DE LA GRANGE *usus est in integranda aequatione differentiali* $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Acta Ac. Petrop. **2**, a. 1778. P. I, 20—57 [1780]. Instit. calc. int. **4**, 465—524.

5) L. EULER, *Uberior evolutio comparationis quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet.* Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1781, P. II, 23—44 [1785].



noch eine umfangreiche Arbeit über Vergleichung von nicht rektifikablen Kurvenbogen.[1] A. Enneper sagt in seinem Werke über Elliptische Funktionen[2]), nach Besprechung fast aller Arbeiten Eulers, die sich auf elliptische Integrale beziehen: „Es hat sich ergeben, daß das allgemeinste Additionstheorem für elliptische Integrale zuerst von Euler deutlich und explicite ausgesprochen ist, daß Euler eine Art Normalform elliptischer Integrale angenommen und auf dieselbe hingewiesen hat, welche sich wenig von der Normalform unterscheidet, welche die Basis der Forschungen von Legendre bildet. Die Arbeiten von Euler mußten für Legendre eine ebenso nützliche wie reiche Quelle sein, aus welcher der Verfasser des „Traité des fonctions elliptiques" eine Anzahl Ideen entnommen hat, welche eine unparteiische Auffassung dem Manne zuwenden muß, welcher ohne Übertreibung der Begründer der neueren Mathematik genannt werden kann."

Elementare Geometrie.

Bei der Vielseitigkeit Eulers ist es selbstverständlich, daß er auch der elementaren Planimetrie sein Interesse zuwandte, und infolgedessen auch hier mit fundamentalen Arbeiten hervortrat. Eine in mehrfacher Beziehung höchst interessante Arbeit ist betitelt: „Variae observationes geometricae."[3]) Sie beginnt mit dem Beweise eines von Fermat vorgeschlagenen Kreissatzes.[4]) Als Lemma beweist Euler die Relation $AB \cdot RS + AR \cdot SB = AS \cdot BS$ für 4 Punkte A, R, S, B einer Geraden. Diese ist die Fundamentalgleichung für das Doppelverhältnis, das von Möbius 1827 eingeführt und von Steiner zum Fundamentalbegriff der neueren Geometrie gemacht wurde. Es folgt eine Reihe von Sätzen über das Dreieck, das Viereck, den Kreis, das Sehnenviereck u. ä. Der schon an Goldbach in einem Briefe vom 23. Februar 1748 mitgeteilte Satz für die Mittenlinie m der Diagonalen e, f eines Vierecks mit den Seiten a, b, c, d:

---

1) L. Euler, *De comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.* Sectio I^a. De comparatione arcuum circuli et parabolae. Sectio II^a. Comparatio arcuum ellipsis, hyperbolae et parabolae cubicalis primariae. Op. posth. **1**, 452—486. 1862.

2) Alfred Enneper, *Elliptische Funktionen, Theorie und Geschichte.* Akademische Vorträge. 2. Aufl. neu bearbeitet und herausg. von Felix Müller, Halle 1890. S. 541.

3) L. Euler, *Variae demonstrationes geometricae.* Novi Comm. Ac. Petrop. **1**, a. 1747—48, 49—66 [1750].

4) Grunert, *Eulers Beweis des Fermatschen Satzes vom Kreise.* Arch. Math. Phys. **27**, 116—118, 1856.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2$$

wird hier ebenfalls bewiesen. Andere Sätze aus der sogenannten „neueren Dreiecksgeometrie“ enthält eine Arbeit vom Jahre 1764[1]), nämlich über die 4 merkwürdigen Punkte: Höhenpunkt, Schwerpunkt, Inkreispunkt und Umkreispunkt. Das Orthozentrum, das Baryzentrum und das Umkreiszentrum liegen auf einer Geraden, der EULERschen Geraden. Auch gab EULER eine einfache Konstruktion für die Aufgabe des PAPPUS: in einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen drei Seiten durch gegebene Punkte gehen.[2]) Er erweiterte hier (p. 96) dieses Problem für die Kugel. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1765[3]) stellt EULER die Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks auf, welche stattfinden, wenn zwei Winkel ein gegebenes Verhältnis haben. Diese Relationen, für die er eine rekurrente Reihe findet, führten später auf die Kreisteilungsgleichungen. Außer einer rein geometrischen wird auch eine trigonometrische Lösung des Problems gegeben. In zwei Abhandlungen, die aus dem Jahre 1779 stammen, aber erst im 1. Bande der Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg veröffentlicht wurden[4]), behandelt EULER die JACOB BERNOULLIsche Aufgabe, ein Dreieck durch zwei aufeinander senkrechte Linien in 4 gleiche Teile zu teilen. EULER führte den wichtigen Begriff des Ähnlichkeitspunktes für ebene gleichstimmig-ähnliche Figuren ein: „Haben zwei ähnliche Figuren die homologen Seiten AB und ab, so gibt es einen Punkt Γ in ihrer Ebene, so daß ΓAB und Γab ähnlich.“[5]) In derselben Arbeit spricht er auch von dem Ähnlichkeitszentrum für ähnliche Körper. In Kap. 18 der Introductio[6]), „Von der Ähnlichkeit und Verwandtschaft der Figuren“ gibt EULER den „figures de même espèce“ CLAIRAUTS den Namen „affine Figuren“. Die hier vorkommende Affinitätsbeziehung

1) L. EULER, *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum.* Novi Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1765, 103—123 [1767]. — Von GRUNERT teilweise mitgeteilt. Arch. Math. Phys. **26**, 343—350, 1856.

2) L. EULER, *Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio.* Acta Ac. Petrop. **4**, a. 1780, P. I, 91—96 [1783].

3) L. EULER, *Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se tenent rationem.* Novi Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1765, 67—102 [1767].

4) L EULER, *Dilucidationes super problemate geometrico: De quadrisectione trianguli, a JACOBO BERNOULLI olim tractata.* Mém. Ac. Pétersb. **1**, a. 1803—06, 26 bis 48 [1809]. — *Solutio completa problematis de quadrisectione trianguli per duas rectas inter se normales.* ib. 49—87.

5) L. EULER, *De centro similitudinis.* Nova Acta Ac. Petrop. **9**, a. 1791, 154 bis 165 [1795]. (Exhib. 23. IX. 1777).

6) L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum.* **2**, 442.

wurde von grundlegender Bedeutung für die Theorie der Verwandtschaften von Figuren, wie sie MÖBIUS in seinem Barycentrischen Calcul 1827 entwickelt hat. Wie wir schon oben bemerkten, sind in den Opera posthuma als „Fragmenta ex Adversariis mathematicis deprompta" eine Anzahl Aufgaben veröffentlicht, die EULER durch seine Schüler zusammenstellen und z. t. lösen ließ. In ihnen finden sich hübsche geometrische Aufgaben.[1]) Wir erwähnen hier die näherungsweise Teilung eines gegebenen Winkels in n gleiche Teile: Vom Scheitelpunkt trage man auf dem einen Schenkel $\frac{n-2}{n+1}r$, auf der Verlängerung des anderen $\frac{n-2}{2n-1}r$ ab und verbinde die Endpunkte.

Die Trigonometrie wurde dadurch, daß EULER die trigonometrischen Linien als Funktionen des Bogens auffaßte, zu einer ganz neuen Wissenschaft. Dazu kam die übersichtliche Schreibweise, welche er in die trigonometrischen Formeln einführte. Das geschah zuerst in einer astronomischen Abhandlung aus dem Jahre 1729[2]), in der Sätze aus der sphärischen Trigonometrie hergeleitet wurden. In der Lösung eines Problems über die Lunulae aus dem Jahre 1737[3]) kommt zum ersten Male die Bezeichnung $A \sin \frac{b}{c}$ für arcus sinus $\left(=\frac{b}{c}\right)$ und bei einem optischen Problem in den Nova Acta Eruditorum 1744 die Erklärung des A tng t oder arcus tangens $(=t)$ vor.[4]) Reihen für sin und tg vielfacher Bogen enthält eine Arbeit aus dem Jahre 1739, die erst 1750 erschien[5]), ebenso Reihen für arc sin, arc cos und deren Logarithmen. Welche Bedeutung die inzwischen erschienene „Introductio"[6]) für die Funktionentheorie hatte, haben wir schon oben erwähnt. Für die trigonometrischen Funktionen sind die §§ 127—138 von besonderer Wichtigkeit. Eine inhaltreiche Ergänzung dieser Abschnitte der Intro-

1) L. EULER, *Continuatio Fragmentorum ex Adversariis mathematicis depromptorum.* Opera posth. **2**, 487—518. II. Geometrica Nr. 97—104, p. 494—504.

2) L. EULER, *Solutio problematis astronomici ex datis tribus stellae fixae altitudinibus et temporum differentiis invenire elevationem poli et declinationem stellae.* Comm. Ac. Petrop. **4**, a. 1729, 98—101 [1735].

3) L. EULER, *Solutio problematis geometrici circa lunulas in circulis formatas.* Comm. Ac. Petrop. **9**, a. 1737, 207—221 [1744].

4) L. EULER, *Solutio problematis in Nov. Act. Erud. mense Novembri a.* 1743 *propositi (ad methodum tangentium inversam pertinentis).* Nova Acta Erud. Lips. 1744, 315—336.

5) L. EULER, *Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales.* Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1739, 194—230 [1750].

6) Vgl. Anm. 6) auf S. 95.

ductio bildet die Abhandlung: „Subsidium calculi sinuum".[1]) Hier betont EULER selbst die Wichtigkeit seiner Auffassung der trigonometrischen Verhältnisse als analytische Funktionen. Ganz besonders bahnbrechend wirkten aber zwei Abhandlungen EULERS aus den Mémoires der Berliner Akademie vom Jahre 1755[2]), welche die Trigonometrie auf der Kugel und auf dem Umdrehungsellipsoid begründeten. Hier bedient sich EULER zum ersten Male der einfachen Bezeichnung der Seiten und Winkel des Dreiecks, welche sich zum Schreiben und Verwandeln der trigonometrischen Formeln so äußerst praktisch erwies und der Trigonometrie eine neue geschmeidige Form verlieh. Auch die Einführung des Hilfswinkels handhabte EULER ganz so, wie wir es tun. Indem EULER Beziehungen entwickelte zwischen den Seiten und Winkeln eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks, begründete er zugleich drei Trigonometrien: 1. die auf der Kugel, für Dreiecke, deren Seiten größte Kreise sind, 2. die ebene Trigonometrie für unendlich große Kugelradien, und 3. die sphärische Trigonometrie auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoids. In einer späteren Abhandlung: „Trigonometria sphaerica universa"[3]) entwickelt EULER, mit Hilfe des zum sphärischen Dreieck gehörenden Dreikants, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt, alle Formeln der sphärischen Trigonometrie aus drei Fundamentalsätzen. Den Inhalt des sphärischen Dreiecks leitet EULER zuerst im Jahre 1778, dann auf zwei verschiedene Arten ab in einer Abhandlung im 10. Bande der Nova Acta[4]), die noch andere Aufgaben aus der sphärischen Trigonometrie enthält. Eine erst im Jahre 1815 veröffentlichte Arbeit[5]), die aus dem Jahre 1780 stammt, beschäftigt sich mit den 6 Abschnitten auf den Seiten eines

---

1) L. EULER, *Subsidium calculi sinuum.* Novi Comm. Ac. Petrop. **5**, a. 1754 bis 55, 164—204 [1760].

2) L. EULER, *Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et plus petits.* Hist. Mém. Ac. Berlin **9**, a. 1753, 223—257 [1755]. Deutsch von E. HAMMER, Ostwalds Klassiker d. exakt. Wiss. Nr. 73. Leipzig 1896, S. 1—39. — *Elémens de trigonométrique sphéroidique, tirés de la méthode des plus grands et plus petits.* ib. 258—293.

3) L. EULER, *Trigonometria sphaerica universa, ex primis principiis breviter et dilucide derivata.* Acta Ac. Petrop. **3**, a. 1779, P. I, 72—86 [1782]. — Deutsch von E. HAMMER, Ostw. Kl. d. ex. Wiss. Nr. 73. Leipzig 1896, S. 41—54.

4) L. EULER, *De mensura angulorum solidorum.* Acta Ac. Petrop. **2**, a. 1778, P. II, 31—54 [1781]. — *Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum.* Nova Acta Ac. Petrop. **10**, a. 1792, 47—62 [1797].

5) L. EULER, *Geometrica et Sphaerica quaedam.* Mém. Ac. St. Pétersb. **5**, a 1812, 96—114 [1815]. (Exhib. 1. V. 1780.)

ebenen und sphärischen Dreiecks, die durch 3 sich in einem Punkte schneidende Transversalen gebildet werden. Eine interessante trigonometrische Behandlung von Aufgaben über das durch 4 Punkte einer Ebene bestimmte Sechsseit finden wir in den Acta vom Jahre 1783[1]), und eine trigonometrische Lösung des Apollonischen Problems im 6. Bande der Nova Acta.[2]) Von den vielen Untersuchungen über das Multiplikations- und Teilungssystem der trigonometrischen Funktionen seien außer der Anm. 1) d. vor. S. genannten nur noch zwei erwähnt, die eine aus dem Opuscula analytica 1, 1783, die andere aus den Nova Acta 5, a. 1787.[3])

Die Theorie der trigonometrischen Funktionen behandelt auch die Auflösung der transzendenten Gleichungen. Im 22. Kapitel des 2. Bandes der Introductio werden transzendente Gleichungen von der Form $x = \cos x$ und analoge gelöst. Zum ersten Male wendet Euler hier die Regula falsi auf die Lösung der transzendenten Gleichungen an. Fortsetzungen enthalten die „Considerationes cyclometricae" im 16. Bande der Novi Commentarii.[4]) Eine Auflösung der berühmten Keplerschen Gleichung gab Euler schon in einer astronomischen Arbeit aus dem Jahre 1740.[5]) Die soeben genannten „Considerationes cyclometricae" sind noch in anderer Hinsicht interessant. Hier wird gezeigt, daß die Konstruktion quadrierbarer Lunulae abhängt von der Lösung der Gleichung $m : n = \sin^2 m : \sin^2 n$. Auf S. 169 sagt Euler, er sei von der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises keineswegs überzeugt, da noch kein Beweis für die Irrationalität von π erbracht sei.

In der Stereometrie wird die bekannte Relation zwischen den Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten eines Polyeders, $E + F = K + 2$, allgemein der Eulersche Satz genannt. Er war schon Descartes bekannt, wie aus einer Aufzeichnung Descartes' aus unbekannter Zeit hervorgeht, von der Leibniz zwischen 1672 und 1676 eine Abschrift

---

1) L. Euler, *De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum.* Acta Ac. Petrop. **6**, a. 1782, P. I, 3—18 [1786].

2) L. Euler, *Solutio facilis problematis, quo quaeritur circulus, qui datos tres circulos tangat.* Nova Acta Ac. Petrop. **6**, a. 1788, 95—101 [1790]. (Exhib. 4. XI. 1779.)

3) L. Euler, *Quomodo sinus et cosinus angulorum multiplorum per producta exprimi queant.* Opusc. anal. **1**, 353—363, 1783. — *De multiplicatione angulorum per factores expedienda.* Nova Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1787, 27—51 [1789].

4) L. Euler, *Considerationes cyclometricae.* Novi Comm. Ac. Petrop. **16**, a. 1771, 160—170 [1772].

5) L. Euler, *Emendatio tabularum astronomicarum per loca planetarum geocentrica.* Comm. Ac. Petrop. **12**, a. 1740, 109—221 [1750]. S. 119, sq.

genommen.[1]) Der Satz wurde von EULER wieder entdeckt, und zwar zunächst durch Induktion gefunden und in den „Elementa doctrinae solidorum“[2]) veröffentlicht, in einer unmittelbar darauf folgenden Abhandlung[3]) aber streng bewiesen. Die zweite Abhandlung enthält auch die Darstellung des Tetraederinhalts durch die 6 Kanten. In einer späteren Abhandlung im 2. Bande der Acta wird die Theorie der Polyeder mit Hilfe der Theorie der Kugel weiter entwickelt.[4]) Hierin wird auch eine neue Methode des Kartenzeichnens gegeben. Von den Arbeiten EULERS über Kartenprojektion werden wir in der Flächentheorie reden. Wir erwähnen hier noch eine Minimum-Aufgabe aus der Stereometrie: „Über der Geraden AB ein Dreieck AOB zu zeichnen, so daß, wenn man einen gegebenen Punkt V außerhalb der Ebene mit A, B und O verbindet, die Summe der Dreiecke $AVO + BVO$ ein Minimum ist“, in den Opera posthuma, 1[5]), und zwei Lösungen der Aufgabe: „Eine Kugel zu finden, die 4 gegebene Kugeln berührt“, in den Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg, t. 2.[6])

Analytische und Differential-Geometrie.

Der II. Band von EULERS „Introductio in analysin infinitorum“ ist eine methodische Darstellung der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Im wesentlichen verdankt man EULER die Ausdehnung und vollständige Durcharbeitung der DESCARTESschen Koordinatenmethode für den Raum. Wegen einer näheren Inhaltsangabe verweisen wir auf M. CANTORS Geschichtswerk.[7]) Die ersten 4 Kapitel handeln von den Kurven überhaupt, ihrer Einteilung und ihren Haupt-

---

1) E. DE JONQUIÈRES, *Écrit posthume de Descartes intitulé de solidorum elementis.* Bibl. math. (2) **4**, 43—55. 1890.

2) L. EULER, *Elementa doctrinae solidorum.* Novi Comm. Ac. Petrop. **4**, a. 1752—53, 109—140 [1758].

3) L. EULER, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hederis planis inclusa sunt praedita,* ib. 140—160.

4) L. EULER, *De corporibus regularibus per doctrinam sphaericam determinatis; ubi simul nova methodus, globos sive coelestes sive terrestres charta obducendi traditur.* Acta Ac. Petrop. **2**, a. 1778, P. II, 3—19 [1781].

5) L. EULER, *Problematis ex theoria maximorum et minimorum solutio.* Op. posth. **1**, 403—407 [1862].

6) L. EULER, *Solutio facilis problematis quo quaeritur sphaera, quae datas quatuor sphaeras utcunque dispositas contingat.* Mém. Ac. Pétersb. **2**, a. 1807—8, 17—28 [1810]. (Exhib. 15. XI. 1779.)

7) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* **3**. Bd., 2. Aufl., S. 802—818. 1901.

eigenschaften, die folgenden 4 von den Kegelschnitten, Kap. 9 und 10 von den Kurven 3. Grades, Kap. 11 von Kurven 4. Grades. In der Einteilung der Kurven 3. Grades in 16 Arten, sowie in der Lehre von den Asymptoten der algebraischen Kurven ist EULER der direkte Vorgänger PLÜCKERS. Betrachtungen über die Gestalt der Kurven, Bildung der Gleichungen von Kurven mit vorgeschriebenen Eigenschaften, Krümmung der Kurven und Kurven mit einem oder mehreren Durchmessern sind Gegenstand der Kapitel 12—16. Kap. 17 enthält die erste Behandlung der Kurven, die keine Spiralen sind, mit Hilfe von Polarkoordinaten. Die nächsten drei Kapitel betrachten die Ähnlichkeit und Verwandtschaft der Kurven, ihre Durchschnittspunkte und ihre graphische Darstellung. Transzendente Kurven, Aufgaben über den Kreis und Lösungen transzendenter Gleichungen schließen die ebene analytische Geometrie. In dem „Anhang", der die krummen Flächen behandelt und der mit der Einführung des Raumkoordinatensystems beginnt, ist zuerst die erstmalige Einteilung der Flächen 2. Grades in fünf Geschlechter hervorzuheben, dann die EULERschen Formeln zur Transformation der Koordinaten. In der Flächentheorie ist EULER Vorläufer von MONGE und HACHETTE.

EULERS Arbeiten über Kurven und Flächen reichen bis zum Jahre 1727 zurück. Die erste Veranlassung zu ihnen gab das von NIC. BERNOULLI vorgeschlagene System zweier Scharen paralleler Kurven, die sich gegenseitig unter demselben Winkel schneiden. EULER behandelt das Problem im 2. und 5. Bande der Commentarii.[1]) In einem Briefe an JOHANN I. BERNOULLI vom 27. August 1737 nennt EULER die Methode, welche er hier benutzt habe, „analysis infinitorum indeterminata". Sie unterscheide sich von der bekannten „analysis infinitorum" wie die DIOPHANTische Methode von der bestimmten Algebra. Die Entdeckung dieser Methode der unbestimmten Infinitesimalrechnung schreibt er JOHANN I. BERNOULLI zu. Sie dient hauptsächlich zur Vergleichung von Kurvenbogen. Zwei wichtige Abhandlungen über schiefwinklige und rechtwinklige Trajektorien gab EULER im 17. Bande der Novi Commentarii vom Jahre 1772 und 1. Bande der Nova Acta vom Jahre 1783.[2]) Die Methode beruht auf der Ein-

1) L. EULER, *Problematis trajectoriarum reciprocarum solutio.* Comm. Ac. Petrop. **2**, a. 1727, 90—111 [1729]. — *Methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas.* Acta Erud. 1727, 408. — *De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis.* Comm. Ac. Petrop. **5**, a. 1730—31, 169—174 [1738].

2) L. EULER, *Digressio de trajectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis.* Novi Comm. Ac. Petrop. **17**, a. 1772, 205—248 [1773]. — *Considerationes super*

führung eines variablen Parameters in die Gleichung neben den Koordinaten. Was die Vergleichung von Kurvenbogen betrifft, so glaubte EULER zuerst, bewiesen zu haben, daß es außer dem Kreise keine algebraische Kurve gibt, deren Bogen gleich einem Kreisbogen ist, doch wies er später in einer Arbeit, die aus dem Jahre 1781 stammt, aber erst 1830 veröffentlicht wurde[1]), nach, daß es unendlich viele algebraische Kurven gibt, deren Bogen gleich einem Kreisbogen ist. Die Anwendung der Differentialrechnung auf die Kurven, die Tangenten der Kurven und deren ins Unendliche gehenden Zweige behandelt die Sectio III der „Institutionum calculi differentialis", die in den Opera posthuma 1862 erschien.[2]) In einer Abhandlung in den Berliner Mémoires vom Jahre 1745, welche diejenigen Eigenschaften der Kegelschnitte untersucht, die sie mit unendlich vielen anderen Kurven gemein haben, finden sich die Anfänge der Theorie der Verteilung der Durchmesser einer Kurve.[3]) Für die schon von PAPPUS ohne Beweis gegebene Konstruktion der konjugierten Axen einer Ellipse, wenn 2 konjugierte Durchmesser gegeben sind, gab EULER den Beweis und eine neue Konstruktion.[4])

Die erste Anwendung der Bogenkoordinaten (x, s) machte EULER bei einer Aufgabe über die Tautochrone.[5]) Die esoterischen Koordinaten, coordonnées intrinsèques oder natürlichen Koordinaten (s, ϱ) treten zum ersten Male auf in einer EULERschen Abhandlung über die Traktorie.[6]) Ihre Wichtigkeit hat neuerdings E. CESÀRO in seiner Geometria intrinseca dargelegt.[7]) Mit Hilfe derselben Koordinaten löst EULER 1740 das Problem der Kurven mit gleichartigen höheren Evo-

---

trajectoriis tam rectangulis quam obliquangulis. Nova Acta Ac. Petrop. **1**, a. 1783, 3—46 [1787].

1) L. EULER, *De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat.* Mém. Ac. Pétersb. **11**, 114—124 [1830].

2) L. EULER, *Institutionum calculi differentialis Sectio III.* Opera posth. **1**, 342—402.

3) L. EULER, *Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes.* Hist. Mém. Ac. Berlin **1**, a. 1745, 71—98 [1746].

4) L. EULER, *Solutio problematis geometrici.* Novi Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1750—51, 224—234 [1753].

5) L. EULER, *Solutio singularis casus circa tautochronismum.* Comm. Ac. Petrop. **6**, a. 1732—33, 28—36 [1739].

6) L. EULER, *De constructione aequationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus.* Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 66 bis 85 [1741].

7) E. CESÀRO, *Lezioni di geometria intrinseca.* Napoli 1896. Deutsch: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Von G. KOWALEWSKI. Leipzig 1901.

luten.[1]) In einer Fortsetzung dieser Arbeit über Pseudozykloiden benutzt EULER zum ersten Male die Entwickelungskoordinaten (Richtungswinkel oder Amplitude φ und Krümmungsradius ϱ).[2]) Einen ersten Beweis des JOH. BERNOULLIschen Satzes, daß ein beliebiger konvexer Kurvenbogen durch unendlich oft wiederholte Abwickelung in den Bogen einer Zykloide übergeführt werden kann, gab EULER im Jahre 1764.[3]) Die sogenannte SAVARYsche Gleichung für die Krümmungsmittelpunkte der zyklischen Linien (1845) fand EULER schon 1765 in einer Abhandlung über die vorteilhafteste Gestalt der Zähne eines Rades.[4]) In einer Arbeit vom Jahre 1781 werden zwei Arten der Entstehung von Epizykloiden und von Hypozykloiden unterschieden.[5])

Der eigentliche Entdecker des sogenannten LAMBERTschen Theorems von der Fläche des parabolischen Sectors ist EULER; er bewies es in einer Abhandlung über die Bahn des Kometen vom Jahre 1742.[6]) Der Satz geriet in Vergessenheit und wurde von LAMBERT 1761 von neuem entdeckt. Erst GAUSS nannte in seiner Theoria motus planetarum, 1809, EULER als den Entdecker. Auch in seiner „Theoria motuum Planetarum et Cometarum", Berol. 1744, leitete EULER seine Formel ab.

Den Krümmungsradius einer gegebenen Kurve fand EULER nach der Methode der Maxima und Minima 1789[7]), und untersuchte, unter Anwendung der uneigentlichen Koordinaten (Krümmungsradius und Radiusvektor), die nach ihm benannte Kurve[8]), für welche der Krüm-

---

1) L. EULER, *Investigatio curvarum quae evolutas sui similes producunt.* Comm. Ac. Petrop. **12**, a. 1740, 3—52 [1750].

2) L. EULER, *Investigatio curvarum, quae similes sunt evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cujuscunque.* Nova Acta Ac. Petrop. **1**, a. 1783, 75—116 [1787].

3) L. EULER, *Demonstratio theorematis Bernoulliani, quod ex evolutione curvae cujuscunque rectangulae in infinitum continuatae tandem cycloides nascantur.* Novi Comm. Ac. Petrop. **10**, a. 1764, 179—198 [1766].

4) L. EULER, *Supplementum de figura dentium rotarum.* Novi Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1765, 207—231 [1767]. Fortsetzung der Abhandlung: De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda. Novi Comm. Ac. Petrop. **5**, a. 1754—55, 299 bis 316 [1760].

5) L. EULER, *De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum.* Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1781, P. I, 48—59 [1784].

6) L. EULER, *Determinatio orbitae Cometae qui mense Martio hujus Anni 1742 potissimum fuit observatus.* Miscell. Berol. **7**, a. 1743, 1—90.

7) L. EULER, *Methodus facilis investigandi radium osculi, ex principio maximarum et minimarum petita.* Nova Acta Ac. Petrop. **7**, a. 1789, 83—86 [1793].

8) L. EULER, *De curvis quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus.* Mém. Ac. St. Pétersb. **9**, a. 1819—20, 47—56 [1824].

mungsradius in einem Punkte eine Funktion des Abstandes dieses Punktes von einem festen Punkte ist.

Drei Abhandlungen aus der Theorie der Maxima und Minima mögen hier noch erwähnt werden; die erste vom Jahre 1780 sucht die kleinste einem rechtwinkligen Parallelogramm umschriebene Ellipse; die beiden anderen, aus dem Jahre 1777 stammenden, aber erst 1795 veröffentlichten, die kleinste durch 4 beliebige Punkte gehende Ellipse und die einem Dreieck umschriebene Ellipse von kleinstem Flächeninhalt.[1])

Die Theorie der Kurven doppelter Krümmung behandelte EULER nach zwei verschiedenen Methoden in zwei aufeinanderfolgenden Abhandlungen der Acta für das Jahr 1782.[2])

Die Arbeiten JOH. I. BERNOULLIS über die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf einer krummen Fläche, die mit dem Jahre 1698 beginnen, veranlaßten EULER, wiederholt auf dieses Problem zurückzukommen. In mehreren Briefen an JOHANN BERNOULLI vom 18. 2. 1729 und 16. 5. 1729[3]), sowie in drei Arbeiten, zwei früheren aus den Jahren 1728 und 1736, und einer späteren, erst 1806 erschienenen, entwickelt er verschiedene elegante analytische Methoden.[4]) Er bewies auch in seiner „Mechanica" 1736, bei der Untersuchung eines Punktes, der frei von anderen Kräften, gezwungen ist, sich auf einer Fläche zu bewegen, rein analytisch die Haupteigenschaft der geodätischen Linien und wurde so ein Vorläufer von LAGRANGE (1806) und GAUSS (1827).

---

1) L. EULER, *De ellipsi minima dato parallelogrammo rectangulo circumscribenda.* Acta Ac Petrop. **4**, a. 1780, P. II, 3—17 [1784]. — *Problema geometricum, quo inter omnes ellipses quae per data quatuor puncta traduci possunt, ea quaeritur, quae habet aream minimam.* Nova Acta Ac. Petrop. **9**, a. 1791, 132—145 [1795]. — *Solutio problematis maxime curiosi, quo inter omnes ellipses, quae circa datum triangulum circumscribi possunt, ea quaeritur, cujus area sit omnium minima.* ib. 146—153.

2) L. EULER, *Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi.* Acta Ac. Petrop. **6**, a. 1782, P. I, 19—36 [1786]. Dissertatio altera, ib. 37—57.

3) Vgl. Anm. 3) auf S. 94.

4) L. EULER, *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente.* Comm. Ac. Petrop. **3**, a. 1728, 110—124 [1732]. — *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis.* Comm. Ac. Petrop. **8**, a. 1736, 159—190 [1741]. — *Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda.* Nova Acta Ac. Petrop. **15**, a. 1799—1802, 44—54 [1806]. — Vgl. G. ENESTRÖM, *Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques.* Bibl. math. (**2**) **13**, 19—24, 1899, u. P. STÄCKEL, *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien.* Ber. Sächs. Ges. d. Wiss. **45**, 447—467, 1893.



Drei für die Theorie der krummen Flächen wichtige Abhandlungen beschäftigen sich mit den rektifikablen Kurven, erstens auf einer Kugeloberfläche, zweitens auf dem Mantel eines geraden Kegels und drittens auf den sphäroidischen Flächen.[1]) Auch die Theorie der Krümmung wird hier gefördert. Die ersten fundamentalen Untersuchungen über die Theorie der Krümmung von Flächen entwickelte Euler in den Mémoires de l'Académie de Berlin vom Jahre 1760.[2]) Er fand die nach ihm benannte Formel $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\vartheta}{r_2} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_1}$ für den Krümmungsradius R eines beliebigen Normalschnittes der Fläche, wo r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien und ϑ der Winkel, den die Ebene des Schnittes mit der Ebene des zu r_2 gehörigen Hauptnormalschnittes bildet. Auf diesen Fundamenten entwickelten Meusnier und Dupin ihre Theorien. In einer Untersuchung der Bedeutung, welche irreguläre und diskontinuierliche Funktionen für die Zeichnung von krummen Linien haben, löst Euler u. a. das Problem, alle Oberflächen zu finden, deren Normalen gleiche Länge haben.[3]) Auf dasselbe Problem kommt Euler noch einmal zurück in einer für die Theorie der krummen Flächen fundamentalen Abhandlung, die erst 1790 erschien, in der er eine für Kurven gebräuchliche Methode anwendet, um Flächen zu bestimmen, die gewisse Eigenschaft in bezug auf Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen und andere dergleichen Linien haben.[4])

Der Erste, welcher die Oberfläche des schiefen Kegels mit Kreisbasis zu bestimmen suchte, war Varignon, 1727. Als natürlicher Weg, dieses Problem anzugreifen, diente Euler die Abwickelung des Kegels.[5]) Diese Abwickelung führt, wie er in einer Abhandlung, die posthum im Jahre 1788 erschien, zeigt, auf eine transzendente Kurve

---

1) L. Euler, *De curva rectificabili in superficie sphaerica.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **15**, a. 1770, 195—216 [1771]. — *De curvis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis.* Acta Ac. Petrop. **5**, a. 1781, P. I, 60—73 [1784]. — *De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroidica quacunque geometrice ducendis.* Nova Acta Ac. Petrop. **3**, a. 1785, 57—68 [1788].

2) L. Euler, *Recherches sur la courbure des surfaces.* Hist. Mém. Ac. Berlin **16**, a. 1760, 119—143 [1767].

3) L. Euler, *De usu functionum discontinuarum in analysi.* Novi Comm. Ac. Petrop. **11**, a. 1765, 3—77 [1767].

4) L. Euler, *De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata.* Nova Acta Ac. Petrop. **6**, a. 1788, 77—94 [1790].

5) L. Euler, *De superficie conorum scalenorum aliorumque corporum conicorum.* Nov. Comm. Ac. Petrop. **1**, a. 1747—48, 3—19 [1750].

mit merkwürdigen Eigenschaften.[1]) Die erste Berechnung der Oberfläche eines zweiachsigen Ellipsoids erscheint in einer Abhandlung der Novi Commentarii vom Jahre 1771, in der auch die Prinzipien der analytischen Theorie der abwickelbaren Flächen entwickelt werden.[2]) In einem Briefe an LAGRANGE[3]) erzählt er, daß er das Problem gelöst habe, x, y, z als Funktionen von t, u so darzustellen, daß $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + du^2$ ist, d. h. das Problem, alle auf eine Ebene abwickelbaren Flächen zu finden.

Daß EULER die Theorie der Biegung der Flächen ungefähr 60 Jahre früher als GAUSS behandelt hat, folgt aus einer in den Opera posthuma 1, 1862, veröffentlichten Abhandlung[4]), die bald nach 1766 geschrieben ist. Die Abbildung der Kugeloberfläche wird nach einem neuen Prinzip in drei Abhandlungen behandelt, die im 1. Bande der Acta vom Jahre 1777 veröffentlicht sind.[5]) Das Wort Abbildung wird hier im weitesten Sinne aufgefaßt, so daß die einzelnen Punkte der Kugelfläche nach einem beliebigen Gesetze in einer Ebene dargestellt werden; und von diesem allgemeinen Begriff geht EULER bei seinen Untersuchungen aus. Daß die verschiedenen Arten der stereographischen Projektion aus allgemeinen Formeln abgeleitet werden, ist ein wesentlicher Fortschritt gegen LAMBERT, und bildet eine wichtige Vorarbeit für die Untersuchungen von LAGRANGE.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Erwähnung zweier Arbeiten EULERS über die Translation starrer Körper, die in den Novi Commentarii vom Jahre 1775 veröffentlicht wurden, und durch die EULER sich als Vorläufer von CHASLES erweist.[6]) Sie gehören ihrem wesentlichen Gehalt nach in die Mechanik.

---

1) L. EULER, *De superficie coni scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur.* Nova Acta Ac. Petrop. **3**, a. 1785, 69—89 [1788].

2) L. EULER, *De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet.* Novi Comm. Ac. Petrop. **16**, a. 1771, 3—34 [1772].

3) L. LAGRANGE, Oeuvres XIV, 217—218, 221—223; vgl. auch p. 234.

4) L. EULER, Opera posthuma I, 494—496: *Problema invenire duas superficies, quarum alteram in alteram transformare licet, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias.*

5) L. EULER, *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano.* Acta Ac. Petrop. **1**, a. 1777, P. I, 107—132 [1778]. — *De projectione geographica superficiei sphaericae.* ib. 133—142. — *De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata.* ib. 143—153. — Deutsch: Drei Abhandlungen über Kartenprojection. Herausg. von A. WANGERIN, Klass. d. exakt. Wiss. Nr. 93, Leipzig 1898.

6) L. EULER, *Formulae generales pro translatione corporum rigidorum.* Novi

Schlußbemerkung.

Mit unserer kurzen Übersicht über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik verfolgten wir lediglich den Zweck, bei Gelegenheit der Feier seines 200sten Geburtstages das Interesse der Fachgenossen für sein wissenschaftliches Wirken zu beleben und das Studium seiner Schriften durch sorgfältige Quellenangaben zu erleichtern. Eulers staunenswerte Produktivität macht es erklärlich, daß wir uns in dieser Festschrift auf die reine Mathematik beschränkten. Seine Arbeiten auf den Gebieten der angewandten Mathematik, nämlich der Mechanik, der Physik und der Astronomie, kommen an Zahl fast denen aus der reinen Mathematik gleich. Wir begnügen uns damit, auf Serie II, Opera physica, und Serie III, Opera astronomica, Nr. 420 bis 768, des Hagenschen Index und auf einige Schriften hinzuweisen, welche die Würdigung der Leistungen Eulers in der Mechanik, Physik und Astronomie zum Gegenstande haben. Neben den Biographien Eulers von Nic. Fuss[1]), Condorcet[2]), R. Wolf[3]) und F. Rudio[4]) kommt eine Festschrift in Betracht, durch welche die Naturforschende Gesellschaft zu Basel die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler hundert Jahre nach ihrem Tode feierte.[5]) Sie enthält einen Vortrag von Fr. Burkhardt, Leonhard Euler (S. 39—50) einen Vortrag von H. Kinkelin, Leonhard Euler (S. 51—71), und eine Abhandlung von Ed. Hagenbach-Bischoff, Leonhard Eulers Verdienste um Astronomie und Physik (S. 72—95). Über bahnbrechende Arbeiten Eulers in der Mechanik belehrte uns der geistvolle Vor-

---

Comm. Ac. Petrop. **20**, a. 1775, 189—207 [1776]. — *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi.* ib. 208—238.

1) Nic. Fuss, *Éloge de M. Leonard Euler, lu à l'Académie Impériale des Sciences, dans son Assemblée du 23. Octobre 1783.* Avec une liste complète des Ouvrages de M. Euler. St. Pétersbourg 1783. Auch Nova Acta Ac. Petrop. **1**, ad ann. 1783. Hist. 159—212 [1787]. Deutsch mit Zusätzen non Nic. Fuss. Berlin 1786.

2) M. J. A. N. Caritat de Condorcet. *Éloge de M. Leonard Euler.* Hist. Mém. Ac. sc. Paris 1783. Oeuvres, Éd. d'Arago; **3**, 1847.

3) Rud. Wolf, *Beiträge zur Kulturgeschichte der Schweiz.* Zürich 1858—62. Bd. IV.

4) F. Rudio, *Leonhard Euler.* Vortrag, gehalten auf dem Rathause zu Zürich am 8. Dezember 1883. Basel 1884. 24 S. kl. 8⁰.

5) *Die Basler Mathematiker Daniel Bernoulli und Leonhard Euler.* Hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforschenden Gesellschaft. Basel 1884. Anhang zu den Verhandlungen T. **7**. 95 S. 8⁰.

trag, den Fritz Kötter bei unsrer Euler-Feier hielt. Wegen der Leistungen Eulers in der reinen und technischen Mechanik verweisen wir auf M. Rühlemanns Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik.[1]) Über die Entdeckungen Eulers in der Physik berichten die Werke von A. Heller[2]) und F. Rosenberger[3]); und die Vorlesungen von J. C. Poggendorff[4]) würdigen insbesondere die Verdienste Eulers um Optik und Akustik. J. H. v. Mädlers vortreffliche Geschichte der Himmelskunde[5]) zählt 93 Schriften Eulers auf, die für die Astronomie von Bedeutung sind. „Unsere Liste gibt uns", — so fährt Mädler fort —, „ein freilich nur äußerliches Bild der astronomischen Tätigkeit dieses Mannes, etwa den achten Teil seiner gesamten. Doch wer wird hier mit der Elle messen wollen? Wir würden, da wohl niemand seines Faches so viel geschrieben hat als er, ihn einen Vielschreiber, und zwar den eminentesten von allen, zu nennen versucht sein; leider verknüpft sich mit diesem Worte ein Nebenbegriff, der wohl auf niemand weniger als auf unsern Euler paßt. Denn gediegen, gründlich durchdacht, vollendet ist alles, was wir von ihm besitzen vom ersten bis zum letzten Federstrich. Wohl mögen die Lagrange und Laplace, die Gauss und Bessel manches, wozu er den ersten Anstoß gegeben, noch tiefer durchforscht, weiter ausgeführt, eleganter dargestellt haben, veraltet von Euler ist nichts. Denn welche Aufgabe der Wissenschaft wir auch wählen mögen, wir werden sie sämtlich, direkt oder indirekt, von Euler bearbeitet, und meistens zuerst gründlich bearbeitet finden. Die Achromasie der Objektive, das widerstehende Mittel, die Mondtheorie, die sekulären Gleichungen, die ausführlicheren, die Störung betreffenden Theorien, die Kometenfrage und wie vieles andere noch — alles dies weiset ur-

---

1) M. Rühlemann, *Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik und der damit in Zusammenhang stehenden mathematischen Wissenschaften.* Zunächst für technische Lehranstalten bestimmt. Leipzig 1885. § 19. L. Euler, S. 167—181.

2) A. Heller, *Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit.* Bd. **2**, 392—400. Stuttgart 1884. Buch II. Die neueste Zeit. L. Euler.

3) F. Rosenberger, *Die Geschichte der Physik in Grundzügen.* **2**. Teil. Geschichte der Physik in der neueren Zeit. Braunschweig 1884. S. 288—300, 319 bis 320, 333—345.

4) J. C. Poggendorff, *Geschichte der Physik.* Vorlesungen. Leipzig 1879. Siehe im Register: Euler.

5) J. H. v. Mädler, *Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die neueste Zeit.* Braunschweig 1873. Bd. **1**, 437—443.

sprünglich auf Euler hin, vor dessen geistigem Auge — gleichviel ob das leibliche ihm dienstbar sei oder nicht — sich alles dieses in reinster, durch keine Dissonanz getrübter Harmonie klar darstellte, und als ein unerschöpflicher Quell über ein halbes Jahrhundert hindurch die Wissenschaft belebte."

ZUR ENTSTEHUNG DER BEGRIFFE DER EXPONENTIAL-FUNKTION UND DER LOGARITHMISCHEN FUNKTION EINES KOMPLEXEN ARGUMENTS BEI

LEONHARD EULER

VON

E. LAMPE

IN BERLIN

Die konsequente Einführung imaginärer Variabeln in die Exponentialfunktion und in die logarithmische Funktion verdanken wir LEONHARD EULER, während vereinzelte Versuche in dieser Richtung schon vorher, unter anderem besonders von seinem hochverdienten Lehrer JOH. BERNOULLI gemacht worden sind. In der Introductio in analysin (1748) ist von imaginären Variabeln bei der Exponentialfunktion ein häufiger Gebrauch gemacht; die hierauf beruhende Theorie des Logarithmus, von der man Spuren in der Introductio finden kann, ist von EULER erst in der Abhandlung entwickelt worden: *„De la controverse entre Mrs. LEIBNITZ et BERNOULLI sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires"* (*Histoire de l'Académie de Berlin.* Année 1749, T. V, p. 139—179, gedruckt 1751). Der Inhalt dieser Arbeit ist von Herrn M. CANTOR in seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (2. Aufl. Bd. III, S. 722—726) mit gewohnter Meisterschaft in objektiver Weise dargestellt worden. An dieser Stelle erwähnt nun zwar Herr CANTOR die von ihm vorher schon analysierten bezüglichen Ansichten von LEIBNIZ und J. BERNOULLI; er hat aber nicht angemerkt, daß der Kern der EULERschen Ausführungen in dieser Abhandlung schon in einigen Briefen EULERS an D'ALEMBERT aus dem Jahre 1747 enthalten ist. Dieselben sind von CH. HENRY herausgegeben im Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche von BONCOMPAGNI, Tomo XIX, p. 136—148 (1886) als *„Lettres inédites d'EULER à D'ALEMBERT"*. Welchen Schwierigkeiten die Einführung der jetzt als elementar erachteten Vorstellungen bei Mathematikern ersten Ranges wie JOH. BERNOULLI und D'ALEMBERT begegnete, wie dieselben Einwände von beiden erhoben wurden, dies zu betrachten ist allein schon interessant. Ebenso dient dieser Briefwechsel auch zur richtigen Einschätzung der Bedeutung von EULER. Mit Siegesgewißheit und in voller Klarheit erläutert er seine Theorie von verschiedenen Gesichtspunkten aus und weist alle Einwände D'ALEMBERTS in ruhiger Rede zurück. Aus diesem Grunde schien es mir lehrreich, die dieser Frage gewidmeten Briefe aus dem nicht gerade weit verbreiteten Bullettino auszuziehen und als Beitrag zur Kenntnis des EULERschen Genius

in dem seinem Andenken geweihten Bande in deutscher Übersetzung abzudrucken.

Der im Bullettino gegebene Text der erwähnten Briefe ist durch mehrere offenbare Irrtümer verunstaltet; vermutlich haben die Handschriften hierzu Anlaß gegeben. Die Abweichungen von dem Texte des Bullettino sind in Fußnoten kenntlich gemacht. Zum besseren Verständnisse der Argumentation EULERS habe ich hinter diesen Briefen eine Stelle aus der Schrift „De la controverse usw." in deutscher Übersetzung folgen lassen.

Für die Entstehung der EULERschen Ideen und für seine Arbeitsweise sind ferner die Briefe EULERS an JOH. BERNOULLI beachtenswert, welche Herr ENESTRÖM jüngst in der Bibliotheca Mathematica abgedruckt hat. Die in dieser wertvollen Zeitschrift, 3. Reihe, Bd. IV (1903), S. 338—365, befindlichen Briefe aus den Jahren 1727—1729 drehen sich zum Teil um die Frage der Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen. Die bezüglichen Stellen dieser Briefe habe ich in deutscher Übersetzung den Briefen EULERS an D'ALEMBERT vorangeschickt. Man ersieht aus ihnen, wie EULER im Alter von 20 bis 22 Jahren schon auf den Kern der Sache losgeht, ohne sich durch die Autorität seines hochangesehenen, von ihm kindlich verehrten Lehrers beirren zu lassen. Einige Male ist er nahe daran, den wahren Sachverhalt zu erschauen; dann aber läßt er ohne ersichtlichen Grund die Sache fallen und scheint sich längere Zeit nicht mehr mit ihr beschäftigt zu haben.

Die Abfassung der Introductio, die nach dem Briefe an D'ALEMBERT vom 28. September 1748 mehr als drei Jahre vor der Vollendung des Druckes (1748) abgeschlossen gewesen ist, dürfte vielleicht EULER wieder auf die Frage der Logarithmen negativer Zahlen zurückgeführt haben. Für die Zeit, in der EULER diese Theorie durchgearbeitet hat, sind die Briefe an D'ALEMBERT wohl entscheidend. Man erkennt aus ihnen, wie er 1747 den Gegenstand meistert, ihm von verschiedenen Seiten beikommt. Dagegen lehnt er schon in dem eben erwähnten Briefe vom 28. September 1748 es ab, sofort auf neu erhobene Einwürfe von D'ALEMBERT zu antworten, weil ihm der Gegenstand der imaginären Logarithmen nicht mehr vertraut genug sei. Hierdurch ist wohl das Jahr 1747 als das Jahr der Entstehung von EULERS „heute klassischer Lösung", wie sich HENRY in dem Einleitungsworte zu jenen Briefen ausdrückt, hinreichend beglaubigt. Im Jahre 1747 sehen wir den erfindungsreichen Kopf erfüllt von den Ideen der Logarithmen negativer und imaginärer Zahlen, übersprudelnd quillt ihm die Rede von seiner Entdeckung; ein Jahr später sind diese Gedanken in seinem über-

mächtig arbeitenden Geiste von der Fülle der ihm zuströmenden neuen Probleme so weit zurückgedrängt, daß er Bedenken trägt, auf erneute Erläuterungen einzugehen, bis er die Zeit gewonnen habe, eine nähere Prüfung der Sache vorzunehmen.

Bewundernd erkennen wir, mit welcher Klarheit der neue Begriff der Funktion einer komplexen Variable plötzlich bei EULER durchbricht, und begreifen an diesem Beispiele, daß in seinem gewaltig arbeitenden Gehirn die Keime so vieler Gedanken entstanden sind, welche bis in die Gegenwart hinein sich als fruchtbar erweisen.

Die Einwände der Zeitgenossen EULERS sind bis auf den heutigen Tag noch nicht ganz verstummt, sondern wagen sich entweder ganz nackt oder etwas schamhaft verkleidet immer wieder hervor an das Tageslicht. Vielleicht wirken die Briefe EULERS an D'ALEMBERT also auch heute noch aufklärend. Als Kuriosum führe ich an, daß JOHANN ANDREAS CHRISTIAN MICHELSEN, Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium, der Übersetzer der Introductio und aufrichtige Bewunderer ihres „unsterblichen Verfassers“ von „berühmtem Namen“, auf S. 493—544 in seinen Zusätzen zum siebenten und achten Kapitel des ersten Bandes (1788) die EULERsche Theorie, die er nicht begriffen hat, bekämpft. Wenn EULER durch seinen Genius davor meistens bewahrt geblieben ist, nach schlecht begründeten unfertigen Methoden unrichtige Schlüsse zu ziehen, so sieht man aus den langatmigen Ausführungen MICHELSENS, wohin die Anwendung solcher fehlerhaften Methoden führen kann. Weil manche Äußerungen JOH. BERNOULLIS an die Behauptungen MICHELSENS anklingen, erlaube ich mir zum Schlusse zwei Seiten aus MICHELSENS Argumentation wiederzugeben.

---

1. Aus dem Briefe von L. EULER an J. BERNOULLI, Petersburg, 5. Novbr. alten Stils, 1727 (Bibl. Math. [3] **4**, 348).

Ich bin zufällig auf diese Gleichung gestoßen: $y = (-1)^x$; was für eine Figur sie darstellt, scheint schwer bestimmbar, da y bald positiv, bald negativ, bald imaginär ausfällt; mir scheint sie nicht eine stetige Linie auszudrücken, sondern unendlich viele Punkte, welche diskret im Abstande gleich 1 zu beiden Seiten der Achse liegen, aber gleichzeitig zusammengenommen der Achse gleichkommen.

---

2. Aus der Antwort J. Bernoullis an L. Euler, Basel, 9. Januar 1729 (Bibl. Math. [3] **4**, 351—352).

Du fragst bei $y = (-1)^x$, was dies ist. Ich ermittele dies so: Es sei:

$$y = (-n)^x,$$

so folgt

$$l(y) = x l(-n),$$

mithin

$$\frac{dy}{y} = dx l(-n).$$

Es ist aber

$$l(-n) = l(+n),$$

denn generell

$$dl(-z) = \frac{-dz}{-z} = \frac{+dz}{+z} = dl(z),$$

hieraus

$$l(-z) = l(z),$$

somit

$$\frac{dy}{y} = dx l(+n)$$

und nach Integration $ly = xln$,

woraus $y = n^x =$ (im Falle $n = \pm 1$) $1^x = 1$. Folglich $y = 1$.

---

3. Aus der Antwort L. Eulers an J. Bernoulli, Petersburg, 10. Dezbr. 1728 (Bibl. Math. [3] **4**, 353).

Was Du mir neulich über die Potenzen negativer Größen schriftlich erläutert hast, löst zwar den vorliegenden Zweifel, und mir selbst sind inzwischen einige Beweisgründe beigefallen, durch welche ich es nachweisen zu können vermeine, daß $lx = l(-x)$. Andere jedoch sind mir entgegengetreten, die das Gegenteil glaubhaft machen, und ich weiß durchaus nicht, welchen ich zustimmen soll. Für die Bejahung spricht außer Deinen mir schriftlich gegebenen Argumenten auch das folgende. Es sei $l(xx) = z$, so ist $\frac{1}{2}z = l\sqrt{xx}$, aber $\sqrt{xx}$ ist ebensowohl $-x$ wie $+x$, daher ist $\frac{1}{2}z$ gleich lx und $l(-x)$. Es könnte allerdings eingeworfen werden, xx habe zwei Logarithmen; wer aber das aussagen wollte, müßte unendlich viele anerkennen. Jener Grund aber, daß die Differentiale von lx und $l(-x)$ gleich sind, scheint mir weniger für die Gleichheit von $l(x)$ und $l(-x)$ zu beweisen; denn aus der Gleichheit der Differentiale darf man nicht auf die Gleichheit der Integrale schließen, wie $a + x$ nicht gleich x ist deswegen, weil die Differentiale gleich sind. Ähnlich liegt aber unser Fall. Es ist nämlich $l(-x) = lx + l(-1)$; hieraus darf auf die Gleichheit von lx und $l(-x)$ nicht eher geschlossen werden, als bis bewiesen ist, $l(-1)$ sei Null. Ent-

gegenstehende Argumente sind die folgenden, welche auf Widersprüche führen. Wäre nämlich $l(x) = l(-x)$, so wäre $x = -x$ und $\sqrt{-1} = 1$. Hier könnte aber eingewandt werden, doch weiß ich nicht, ob mit glücklichem Erfolge, aus der Gleichheit der Logarithmen dürfe ein Schluß auf die Gleichheit der Zahlen nicht gemacht werden. Und dann bleibt mein Zweifel betreffs der Kurve $y = (-1)^x$ annoch bestehen. Ich gebe aber zu, daß x nicht gleich $-x$ ist, selbst wenn $l(x) = l(-x)$ ist; dennoch fürchte ich, daß dieses bei einer Rechnung angewandte Prinzip zu einem Fehler führt. Der Radius eines Kreises sei a, ein Sinus y, der zugehörige Kosinus x, so geht aus Deiner Methode der Zurückführung der Kreisquadratur auf Logarithmen hervor, daß die Fläche des Sektors

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l \frac{x + y\sqrt{-1}}{x - y\sqrt{-1}},$$

und für $x = 0$ ergibt sich der Kreisquadrant

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l(-1).$$

Wenn also $l(-1) = 0$ ist, muß auch $\sqrt{-1} = 0$ sein, und schließlich $1 = 0$. Wie ich mich aus diesen Widersprüchen herauswickle, weiß ich ganz und gar nicht; deshalb möchte ich von Dir, hochberühmter Mann, erfahren, was Du hierüber denkst.

---

4. Aus dem Briefe J. Bernoullis an Euler, Basel, d. 18. April 1729 (Bibl. Math. [3] **4**, 358—361).

Auf die früheren Briefe habe ich zum Teil schon in den an meinen Sohn gerichteten Briefen geantwortet; dort habe ich gezeigt, daß Euere Zweifel (denn auch er hat ähnliche Schwierigkeiten wegen der imaginären Logarithmen erhoben) nur daraus entspringen, daß der Begriff, den Ihr über die Logarithmen negativer Größen gehabt habt, mit dem Wesen der Sache nicht gut genug sich deckte, und habe gesagt, wenn festgehalten wird (und zwar mit Recht): $lx = l(-x)$, sei dies zu verstehen $l[-(x)]$, nicht aber $l(-x)$; Ihr hättet dieses beides aber vermengt, obschon ein großer Unterschied zwischen beidem besteht. So ist z. B. $l\left[-(x)^{\frac{1}{2}}\right]$ etwas Reelles, aber $l\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)$ imaginär.[1]) Beachtet man

1) Mit Herrn Eneström stimme ich darin überein, daß der Sinn dieser Sätze dunkel ist. Ich glaube aber, daß man nicht so tief suchen darf, wie er es in der Fußnote Bibl. Math. (3) **4**, 359 getan hat. Wie wäre es, wenn $l\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)$ aufzufassen wäre als $l\left(-x\right)^{\frac{1}{2}}$ bei positivem x? Die Briefe Eulers an D'Alembert zeigen, daß es sich damals um recht einfache Mißverständnisse handelte. Die von mir hinzugefügten eckigen Klammern hinter l sollen unsere heutige Schreibweise darstellen.

dies richtig, so schwinden alle Euere Schwierigkeiten und die ungeheuerlichen daraus hergeleiteten Folgen. Was das Bedenken anlangt, das Du ferner vorbringst, das aus der durch einen Logarithmus ausgedrückten Fläche eines Kreissektors entnommen ist, daß nämlich die Fläche des Sektors

$$= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}},$$

wo der Sinus $= y$, der Kosinus $= x$ gesetzt ist, wie durch meine Methode der Zurückführung der Quadratur des Kreises auf Logarithmen gefunden wird, so habe ich gleichfalls meinem Sohne schon in Erinnerung gebracht, daß in dem Falle $x = 0$ diese Fläche wirklich gleichsam als 0 herauskomme, obgleich sie dem Quadranten gleich sein müsse. Hieraus dürfe aber nichts anderes geschlossen werden, als daß jener Ausdruck

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

um eine konstante Größe nQ, oder um ein Vielfaches des Quadranten zu vermehren sei. Dies geht auch daraus hervor, daß Sinus und Kosinus untereinander vertauschbar sind, und zwar kann dies nicht bloß auf eine Weise geschehen, sondern auf unendlich viele, so daß man hat $x = 0$ und $y = 1$, oder umgekehrt $x = 1$ und $y = 0$; denn dies tritt ein, wenn der Sektor $= 1\,Q$, oder $2\,Q$, oder $3\,Q$, ... angenommen wird, oder wenn man will $= 0\,Q$, und somit besteht kein Grund, weswegen

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$$

eher das eine ausdrücke als das andere. Lieber möchte ich es so fassen, daß die Fläche des Sektors allgemein in der Formel festzulegen ist:

$$\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{+1}} + nQ,$$

aber derart, daß, sobald der erste Teil zu Null wird, das, was fehlt, durch nQ ergänzt werden kann, d. h. durch ein Vielfaches oder ein Submultiplum des Quadranten, je nachdem die Notwendigkeit vorliegt. Man findet nämlich stets durch Differentiation des obigen Sektors sein Differential in der Form $\frac{aa\,dx}{2\sqrt{aa-xx}}$, wie dies sein muß. In dem Falle des Halbquadranten, wo $x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$, erhält man auch den ersten Teil $= 0$, oder wenn man dies vorzieht: $= \frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$. Daher ist $\frac{1}{2}Q$ hinzu-

zufügen; aber derartige imaginäre Ausdrücke eignen sich besser für den Gebrauch, wenn sie in Reihen entwickelt werden, in denen dann die imaginären Posten sich vernichten.[1])

---

5. Aus dem Briefe L. EULERS an J. BERNOULLI, Petersburg, d. 16. Mai 1729 (Bibl. Math. [3] 4, 365).

Was Du mir zuerst über die imaginären Logarithmen schreibst, das ist mir noch nicht deutlich genug; hauptsächlich kann ich den Unterschied, welchen Du zwischen $l[-(x)]$ und $l(-x)$ aufstellst, noch nicht fassen, auch nicht durch welche Rechnung man eher zu dem einen dieser Logarithmen gelangen müsse als zum anderen. Außerdem scheint mir der Ausdruck des Kreissektors $\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ mit der gehörigen Konstante schon versehen zu sein, da er für $x=0$ einen verschwindenden Sektor ergibt.[2]) Wenn ferner bloß nQ hinzugefügt werden müßte, was ich noch nicht begreife, scheint mir n außer einem Vielfachen der Vierzahl nichts anderes bedeuten zu können, da zuletzt nach Durchlaufung der vier Quadranten eine Umdrehung vollendet ist. Wenn aber n auch $\frac{1}{2}$ sein kann, wird es auch $\frac{1}{4}$ und alle Zahlen bedeuten können; daher ist es dann überflüssig, noch $\frac{aa}{\sqrt{-1}}\, l\, \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ anzuwenden, um den Sektor auszudrücken, da ja nQ allein zur Darstellung jedweden Sektors genügt. Wie dem nun auch sein möge, so scheint mir die Sache doch so zu liegen, daß weder Du von Deiner Vorstellung aus, noch wir von der unsrigen hierbei in einen Fehlschluß hineinlaufen dürfen.

---

6. EULER an D'ALEMBERT (Bull. Boncomp. **19**, 137—140).

Geehrter Herr!

Es ist durchaus richtig, daß das Beispiel der Kurve

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{x+a},$$

1) Die Anmerkung des Herrn ENESTRÖM a. a. O. S. 360 scheint mir ebenfalls einen zu tiefen Sinn bei J. BERNOULLI vorauszusetzen. Wenn für $x=0$, $y=1$ BERNOULLI auf den Wert 0 seines Ausdrucks ohne Konstante schließt, so setzt er $l(-1)=0$, in Anwendung seines Satzes $l(x)=l(-x)$. Nun greift er, um das richtige Resultat zu erhalten, zu dem Strohhalm einer Integrationskonstante, die er je nach Bedürfnis wählt, ohne daran zu denken, daß die Integrationskonstante nicht von Fall zu Fall den Wert wechseln darf. An eine Integration auf komplexem Wege kann man ja bei BERNOULLI nicht denken. Die richtige Antwort gibt EULER in dem folgenden Briefe.

2) Hier dürfte eine Verwechselung von x mit y geschehen sein.



die in dem Falle $a = 0$ plötzlich eine ganze Hälfte verliert, nicht beweist, dasselbe müsse bei der Kurve[1])

$$y = \frac{1}{n-1}(x^{n-1} - 1)$$

in dem Falle $n = 1$ eintreten; auch habe ich mich dieses Beispiels nur bedient, um die Möglichkeit einer solchen Einbuße in einem gewissen Falle nachzuweisen, und ich ziehe daraus nur den Schluß: obgleich die letztere Kurve immer einen Durchmesser hat, wenn n eine ungerade Zahl ist, so könnte dieser Schluß seine Gültigkeit im Falle $n = 1$ verlieren. Hiermit glaube ich Ihrem aus dieser allgemeinen Formel entnommenen Einwurfe völlig begegnet zu sein, obschon dieser Fall für meine These nichts beweist; denn ich hatte zunächst den Nachweis zu führen gesucht, daß die für die Realität der Logarithmen negativer Zahlen angeführten Beweisgründe nicht gerade verläßlich sind. Allein mir scheint meine Theorie nicht der positiven Beweise zu ermangeln. Bevor ich sie jedoch darlege, muß ich Ihrem Einwurfe begegnen, der sich auf die Gleichung $y = e^x$ stützt, in der nach Ihrer Meinung die Zahl[2]) e^1 mit gleichem Rechte einen positiven und einen negativen Wert haben kann. Ich gebe sogar zu, daß ihr Wert ganz willkürlich ist; denn wenn Sie $e = 10$ setzen, ist der Exponent x der gemeine oder Tabellenlogarithmus der Zahl y, und wenn[3]) $e = 2{,}718\ldots$ oder $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$, wird x der hyperbolische Logarithmus der Zahl y. Sobald man aber der Zahl e einen bestimmten Wert beilegt, ist das ganze System der Logarithmen aller Zahlen bestimmt, ebenso wie die Kurve, deren Gleichung $y = e^x$ ist, und da e gleichsam ihr Parameter ist, darf man ihm nicht

---

1) So ersetze ich die im Bull. stehende Gleichung

$$y = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)(x^{n-1} - 1)},$$

die keinen Sinn hat. Euler definiert ja in der Abhdl. De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli den $lx = y$ durch die Gleichung

$$y = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

für ein unendlich großes n. Dieser Gleichung entspricht aber die Form

$$y = \frac{1}{n-1}(x^{n-1} - 1)$$

mit $\lim n = 1$.

2) Im Bullettino steht e', was keinen Sinn hat.

3) Statt $e = 2{,}305$ im Bull. ist $e = 2{,}718\ldots$ gesetzt.

gleichzeitig zwei verschiedene Werte beilegen, ohne daß die Kurve in eine Zusammensetzung aus zwei verschiedenen Kurven übergeht. Genau so hätte man für die Gleichung $yy = ax$, wenn man für a einen doppelten Wert einsetzte, z. B. $a = +1$ und $a = -1$, zwei verschiedene Kurven, welche nicht durch das Band der Stetigkeit miteinander zusammengehalten würden. Hiernach scheint es mir ganz klar, daß, wenn man $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ setzt, die Logarithmen der negativen Zahlen unmöglich[1]) sein müssen; man braucht nur zu beachten, daß es unmöglich ist, einen solchen Wert von x zu finden, daß e^x oder $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$ einen negativen Wert entstehen läßt. Es scheint Ihnen paradox, daß die Differentiale von ly und $l(-y)$ die nämlichen sind; aber Sie werden mir doch diese Gleichheit in einem allgemeineren Sinne zugestehen, nämlich $d(ly) = d(\overline{lay})$ für jede beliebige konstante Zahl a; hieraus entnehme ich, daß nicht die geringste Schwierigkeit besteht, weshalb man es im Falle $a = -1$ leugnen soll. Mit dem Schlußverfahren, vermöge dessen Sie beweisen, daß $l(-1) = 0$, können Sie ebenso beweisen, daß $l\sqrt{-1} = 0$; denn da $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1$, haben Sie $l\sqrt{-1} + l\sqrt{-1} = l(-1)$, d. h. $2l\sqrt{-1} = l(-1) = \frac{1}{2}l(+1)$ und damit $l\sqrt{-1} = \frac{1}{4}l(+1) = 0$, und wenn Sie dieses Schlußverfahren zurückweisen, werden Sie zugeben, daß das erstere nicht überzeugender ist. Nun werden Sie mir wenigstens darin beistimmen, daß die Logarithmen der imaginären Zahlen nicht reell sind; sonst könnte ja der Ausdruck $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ nicht die Quadratur des Kreises ausdrücken. Es sei $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \alpha$, woraus $l\sqrt{-1} = \alpha\sqrt{-1}$, d. h. eine imaginäre Größe. Wenn also $l\sqrt{-1}$ imaginär ist, warum sollte es dann nicht $2l\sqrt{-1} = l(-1)$ sein? Ferner, da man $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$ hat, würden Sie nach Ihrem Schlußverfahren $3l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) = l1 = 0$ erhalten, und der Logarithmus von $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ wäre ebenso gleich 0 wie $l(+1)$, $l(-1)$, $l\sqrt{-1}$ usw., was nicht haltbar ist. Allein Sie werden mir entgegnen, daß sogar $l(+1)$ imaginär sein müßte, da er gleich

$$2l(-1) = 4l\sqrt{-1} = 3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \cdots$$

1) Euler schreibt impossible, später imaginaire.

ist. Das ist nun gerade, was ich will; denn ich behaupte, $l(+1)$ hat unendlich viele verschiedene Werte, unter denen einer gleich 0 ist, alle anderen aber imaginär sind. Um dies klarer darzulegen, mögen $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \varkappa \ldots$ die Logarithmen der Einheit sein; dann behaupte ich, daß $\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\eta, \ldots$ die Werte von $l(-1)$ sind, und zwar alle imaginär, jedoch so beschaffen, daß der doppelte Wert jedes einzelnen sich unter den Logarithmen von $+1$ befindet. Dagegen folgt nicht, daß die Hälfte jedes der Werte von $l(+1)$ sich unter denen von $l(-1)$ befindet, weil ja -1 nur ein Wert von $\sqrt{+1}$ ist, während der andere $+1$ ist, deren Logarithmen $\frac{1}{2}\cdot 0, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\zeta, \ldots$ sind, und dies sind genau dieselben wie $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \ldots$ Denn $\frac{1}{2}\beta = \alpha$, $\frac{1}{2}\delta = \beta$, $\frac{1}{2}\zeta = \gamma$, $\frac{1}{2}\theta = \delta, \ldots$ Da in ähnlicher Weise die drei Kubikwurzeln aus 1 gleich 1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ sind, folgen die Logarithmen dieser drei Wurzeln;

$$l(1) = \frac{0}{3}, \frac{\gamma}{3}, \frac{\zeta}{3}, \frac{\iota}{3}, \frac{\mu}{3}, \ldots,$$

und zwar sind dies die nämlichen Werte wie $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{\alpha}{3}, \frac{\delta}{3}, \frac{\eta}{3}, \frac{\varkappa}{3}, \frac{\nu}{3}, \ldots,$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{\beta}{3}, \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\theta}{3}, \frac{\lambda}{3}, \frac{\xi}{3}, \ldots,$$

und diese Bezeichnungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ beruhen nicht auf einer bloßen Vermutung; ich habe sogar die Ehre gehabt, Ihnen ihre wirklichen Werte mitzuteilen. Ist nämlich π der Umfang[1]) eines Kreises vom Radius 1, so sind die Werte von $l(+1)$ diese[2]):

$$0, \pm\pi\sqrt{-1}, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 3\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}, \pm 5\pi\sqrt{-1}, \ldots;$$

die von $l(-1)$ sind:

$$\pm\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1}, \qquad \pm\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1}, \qquad \pm\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1}, \ldots$$

Allgemein habe ich gefunden:

$$l(1^p) = \pi(mp+n)\sqrt{-1}, \quad l(-1)^p = \pi(\tfrac{1}{2}p + mp + n)\sqrt{-1}\,^{3)},$$

wo m und n beliebige positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen. Hierdurch verschwinden ganz und gar alle Schwierigkeiten, die man in keiner Weise beseitigen könnte, wenn man die Logarithmen der negativen Zahlen reell machen wollte auf Grund von $2l(-1) = l(+1) = 0$;

---

1) Also ist hier $\pi = 2\cdot 3{,}14159\cdots$ gesetzt; vgl. S. 131, Anm. 2).

2) Statt des ersten Wertes 0 steht im Bull. fälschlich α.

3) Hier ist $\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{+1}$ im Bull. gesetzt.

denn nach derselben Schlußweise wäre man genötigt zu behaupten, daß $l\sqrt{-1} = 0$ und $l\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = 0$.

Sie sagen ferner, daß, weil $e^x = y$, die Zahl y, wenn $x = \frac{1}{2}$ ist, sowohl positiv als auch negativ sein kann; allein da e^x hier den Wert der Reihe $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ bezeichnet, glaube ich mich auf sicherem Boden zu befinden, wenn ich sage, e^x bezeichne nie mehr als einen Wert, und zwar den positiven, selbst wenn x ein Bruch wäre, bei dem die Wurzelausziehung die Formel e^x mehrdeutig zu machen scheint.[1])

Ihre Schrift über die Bewegung des Mondes ist zweifelsohne von einer auf den letzten Grund reichenden Tiefe, und Ihre Überlegenheit in den schwierigsten Rechnungen leuchtet überall hervor. Die Bemerkung, die Ihnen zu schreiben ich mir die Freiheit genommen hatte, betraf nur die Anwendung Ihrer Rechnung auf den Gebrauch astronomischer Tafeln. Es handelt sich zu diesem Zwecke um die für die Berechnung leichten Annäherungen, und mich dünkte, daß die Art, in der Sie das Problem behandeln, in bezug auf diese Annäherungen nicht gerade geeignet wäre. Denn nach Behandlung dieser Frage auf viele verschiedene Arten habe ich nur einen Weg gefunden, der sich für den astronomischen Gebrauch eignet; hieraus habe ich auch meine Mondtafeln berechnet. Ich bin daher um so neugieriger auf die Fortsetzung Ihrer Untersuchungen über diesen Gegenstand und habe inzwischen die Ehre zu sein mit der größten Hochachtung, mein Herr,

Ihr ganz ergebener und gehorsamer Diener

L. Euler.

Berlin, den 15. April[2]) 1747.

---

7. Euler an D'Alembert (Bull. Boncomp. **19**, 140—142).

Geehrter Herr!

Ich benutze die Abreise des Herrn Delisle, um Ihren letzten Brief zu beantworten und Ihnen einen jungen Mann unserer Akademie zu empfehlen, der die Erlaubnis zur Begleitung des Herrn Delisle erhalten hat. Er ist der Sohn eines unserer Astronomen Namens

1) Diese Stelle ist deshalb bedeutsam, weil aus ihr erhellt, daß Euler zum Bewußtsein der in der Exponentialreihe gegebenen neuen funktionentheoretischen Definition der Exponentialfunktion durchgedrungen war.

2) Dieser Brief ist also vom Geburtstage Eulers aus Berlin datiert; er vollendete an diesem Tage sein vierzigstes Lebensjahr.

Grischow. Nachdem er schon einige Fortschritte in der Astronomie gemacht hat, glaubt er seine Zeit nicht besser anwenden zu können, als durch Aufsuchung einer Gelegenheit, aus der Einsicht und der Geschicklichkeit der Pariser Astronomen Nutzen zu ziehen; ich bitte Sie, ihm den Zutritt bei diesen zu erleichtern und ihn besonders mit Ihrem Wohlwollen zu beehren.

In bezug auf unsere Streitfrage über die Logarithmen der negativen und imaginären Zahlen hoffe ich, daß sie bald erledigt sein wird. In Ihrer Schrift über die Integrale, welche im zweiten Bande unserer Denkschriften jüngst gedruckt ist, habe ich Ihren Anordnungen gemäß den Artikel gestrichen, in dem Sie vom $\log(-1)$ redeten, und ich glaube, daß Sie über diesen Gegenstand in kurzem eines Sinnes mit mir sein werden. Ich gebe darin nach, daß die Formel e^x in dem Falle $x = \frac{1}{2}$ zwei Werte haben soll[1]); aber Sie werden mir auch zubilligen, daß in den anderen Fällen der Wert von e^x nicht negativ sein kann, und da es sich hauptsächlich um den $\log(-1)$ handelt, werden Sie nicht behaupten wollen, daß e^x gleich -1 werden kann, falls man $x = 0$ setzt; somit beweist dieses Argument wenigstens nichts für Sie.

Wenn Sie sagen, daß man $l(-x)$ in eine Reihe auflösen könnte, deren Wert reell wäre, so ist mir dies unverständlich, es sei denn, dies solle bedeuten, die Glieder der Reihe seien reell, dann wird man aber auch $\sqrt{-x}$ in eine solche Reihe auflösen können. Übrigens will ich zugeben, daß dasjenige, was ich in meinem ersten Briefe von der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$ ausgesagt habe, nichts für mich beweist; ebenso beweist aber auch die Zweideutigkeit von e^x in gewissen Fällen nichts gegen mich, weil man ja auch drei Werte zugestehen müßte, wenn $x = \frac{1}{3}$, vier im Falle $x = \frac{1}{4}$, usw.; das würde jedoch zu weit führen.

Sobald Sie sagen, die Größe e dürfe nicht als der Parameter der logarithmischen Kurve angesehen werden, sondern als die Ordinate, die der Abszisse $x = 1$ entspricht, und daß sie deshalb sowohl positiv als auch negativ sein dürfe, könnte ich mit demselben Rechte sagen, die logarithmische Kurve habe nicht bloß zwei gleiche und ähnliche Zweige gemäß den beiden Formeln $x = l(+y)$ und $x = l(-y)$, sondern so viele wie man überhaupt will: $x = l(+y)$, $x = l(my)$, $x = l(ny)$, ..., weil ja alle diese Formeln dasselbe Differential $dx = dy/y$ haben. Was

1) Wenn dieses Zurückweichen mehr als eine Höflichkeitsphrase ist, kann der Satz entweder bedeuten, daß Euler in seiner Auffassung des vorangehenden Briefes schwankend geworden ist, oder daß er der Auffassung der von Stolz und Gmeiner formulierten „allgemeinen Potenz“ nahe ist.

nun Ihre Transformation von e^x in $e^{\frac{k}{g}}$ anlangt, wo $k:g$ sich wie eine ungerade Zahl zu einer geraden verhält[1]), so könnte man sich mit demselben Rechte jene Formel so vorstellen, daß $k:g =$ gerade : ungerade oder ungerade : ungerade, und dann würden Sie nicht auf Ihre Rechnung kommen. Mir däucht also, alle diese Gründe sind nicht stark genug, um zu beweisen, daß $l(+x) = l(-x)$.

Hiernach ziehen Sie es in Zweifel, ob die aus dem Sinus hergeleitete Formel alle Logarithmen von -1 gibt; allein ich weiß nicht, ob ein des Beweises entbehrender Zweifel meine Darlegung umstürzen kann, und betreffs der Formel $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ halte ich daran fest, daß sie nur die Werte $\frac{1}{2}(4n+1)\pi$ umfaßt, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, π den Umfang eines Kreises[2]) vom Durchmesser 1; demnach kann diese Formel nie 0 ergeben. Es ist ja richtig, daß meine Ansicht sich auf die aus den Sinus hergeleitete Formel stützt; allein ich sehe keinen Grund, weshalb diese Formel nicht alle Logarithmen von $\sqrt{-1}$ geben soll, und ich glaube immer noch, daß die Gründe „für" stärker sind als die „gegen".

Bei der Formel für die Kreisbogen $s = \sqrt{-1} \cdot l(x + \sqrt{xx-1})$, wenn x den Kosinus des Bogens s bezeichnet, sehe ich schließlich keinen Grund ein, daran zu zweifeln, daß für $x > 1$ der Bogen eine rein imaginäre Größe $b\sqrt{-1}$ werden sollte, so daß also $l(x + \sqrt{xx-1}) = b$; ich glaube auch nicht, daß Sie das Gegenteil beweisen werden.

Ich habe der Akademie eine Schrift[3]) über diesen Gegenstand mitgeteilt, in der ich diesen Gegenstand derartig in das richtige Licht gestellt zu haben glaube, daß ich für meinen Teil nicht die geringste

1) Der Originaltext des Bull. lautet: Pour ce qui regarde votre transformation de e^x en $\frac{e^{\frac{x}{g}}}{a^{\frac{x}{g}-1}}$ ou $x:g$ comme un nombre impair à un pair, on se pourrait avec autant de droit imaginer cette formule que $x:g =$ pair: impair, ou impair: pair et alors vous ne trouveries pas votre conte. Il me semble donc que toutes ces raisons ne sont pas assez fortes pour prouver que $l(+x) = l(-x)$. An sich ist diese Stelle unverständlich. Da x und k in der Schreibschrift leicht zu verwechseln sind, habe ich nach dieser Konjektur mit Fortlassung des unsinnigen $a^{\frac{x}{g}-1}$ im Nenner eine Fassung gesucht, die dem Gedankengange Eulers entspricht.

2) Hier ist also $\pi = 3{,}14159 \cdots$; vgl. S. 128, Anm. 1).

3) Jedenfalls die Abhandlung aus Mém. Berlin V. Mit ihr hat also Euler alle ihn in dieser Frage quälenden Zweifel endgültig abgetan.

Schwierigkeit mehr darin finde, obgleich ich ehedem aufs äußerste mich beschwert gefühlt habe.

Ich habe die Ehre, mit der größtmöglichen Hochachtung zu sein, mein Herr,

Ihr ganz ergebener und gehorsamer Diener
L. Euler.

Berlin, den 19. August 1747.

Ps. — Sie gestehen mir zu, daß $l(+1) = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$ und daß $l(-1) = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$, aber Sie sagen, mein Herr, daß unter den Logarithmen von -1 sich auch 0 befindet. Da also zwei Logarithmen von -1 durch Addition $l(+1)$ geben, sind die Logarithmen von $+1$ nicht nur $\pm 2n\pi\sqrt{-1}$, sondern auch $\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. Ferner gestehen Sie mir zu, daß $l\sqrt{-1} = \pm\frac{1}{2}(4n\pm 1)\pi\sqrt{-1}$ und daß $l(-\sqrt{-1}) = \pm\frac{1}{2}(4n\mp 1)\pi\sqrt{-1}$, daß jedoch diese Formeln nicht alle Logarithmen von $+\sqrt{-1}$ und von $-\sqrt{-1}$ enthalten, und daß sich darunter auch 0 befinde; mithin, da $l(+\sqrt{-1}) + l(-\sqrt{-1}) = l(+1)$, wird der $l(+1)$ auch die Formeln $\pm\frac{1}{2}(4n\pm 1)\pi\sqrt{-1}$ umfassen. Ebenso, wenn Sie sagen, die Null sei auch der Logarithmus der höheren imaginären Einheitswurzeln, so sind Sie schließlich auch gezwungen, zu sagen, alle Logarithmen von $+1$ seien in der Formel $\frac{m}{n}\pi\sqrt{-1}$ oder $a\sqrt{-1}$ enthalten, welche Größe man auch für a annehmen mag; damit würde $l(+1)$ ganz unbestimmt, eine Folgerung, die mir auszureichen scheint, um Ihren Einwurf aufzuheben. Wenn ich nun aber nach meiner Ansicht behaupte:

$$l(+1) = 0,\quad \pm 2\pi\sqrt{-1},\quad \pm 4\pi\sqrt{-1},\quad \pm 6\pi\sqrt{-1},\ \ldots;$$

$$l(+\sqrt{-1}) = +\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},\ \ldots,$$
$$-\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1},\ \ldots;$$

$$l(-1) = \pm\pi\sqrt{-1},\quad \pm 3\pi\sqrt{-1},\quad \pm 5\pi\sqrt{-1},\ \ldots;$$

$$l(-\sqrt{-1}) = +\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{11}{2}\pi\sqrt{-1},\ \ldots,$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},\ \ldots,$$

so werden Sie die schönste Harmonie finden. Denn zwei beliebige Logarithmen von -1 bringen durch Addition immer einen $l(+1)$ hervor. Zwei Logarithmen von $\sqrt{-1}$ geben durch Addition immer einen

$l(-1)$; dasselbe gibt die Addition zweier Logarithmen von $-\sqrt{-1}$, und ein $l(+\sqrt{-1})$ plus einem $l(-\sqrt{-1})$ gibt immer einen $l(+1)$. Diese Bemerkung allein scheint mir auszureichen, um Sie von der Richtigkeit meiner Ansicht zu überzeugen; wenn Sie dagegen die geringste Änderung in meinen Formeln machen, sind Sie gezwungen, die Logarithmen von $+1$ ganz unbestimmt zu machen; ich bitte Sie, dieses Argument recht zu erwägen.

---

8. Euler an D'Alembert (Bull. Boncomp. **19**, 143).

Geehrter Herr!

Von Herrn de Maupertuis habe ich erfahren, daß Sie für einige Zeit die mathematischen Forschungen zurücklegen wollen, um Ihre durch zu große Anspannung beträchtlich geschwächte Gesundheit wiederherzustellen. Dieser Entschluß, zu dem ich Ihnen den vollen von Ihnen erwarteten Erfolg wünsche, findet meine ganze Billigung in solchem Maße, daß ich Sie nicht darin durch Überlegungen über die imaginären Logarithmen stören will. Ich hätte ohnehin fast nichts über diesen Gegenstand hinzuzufügen, was ich Ihnen nicht schon angemerkt habe, und ich zweifle sehr, ob meine Schrift über diesen Gegenstand alle Zweifel zu heben vermag, welche Sie mir vorzulegen sich die Mühe gegeben haben. Aber nach allem, was Sie mir zugebilligt haben, sind diese Zweifel für Ihre Ansicht nicht günstig, und es gibt niemanden, der sie besser zu beantworten verstünde als Sie selbst.

Wenn Sie bei Ihren Zerstreuungen Lust haben, irgend eine Untersuchung zu führen, die nicht viel Anspannung verlangt, nehme ich mir die Freiheit, Ihnen den folgenden Ausdruck vorzulegen:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots,$$

der, durch wirkliche Multiplikation entwickelt, die Reihe gibt:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57} \\ -x^{70}-x^{77}+\cdots,$$

die mir wegen des leicht in ihr zu entdeckenden Gesetzes recht bemerkenswert erscheint; allein ich sehe nicht, wie dieses Gesetz ohne Induktion aus dem vorgelegten Ausdruck hergeleitet werden könnte.

Indem ich Ihnen für alle Güte danke, die Sie für unseren Herrn Grischow zeigen, habe ich die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu sein, mein Herr,

Ihr ganz ergebener und gehorsamer Diener

L. Euler.

Berlin, den 30. Dezbr. 1747.



Druck von B. G. Teubner in Leipzig.